פרק 1

גבול, רציפות, וגזירות של פונקציות במספר משתנים

1.1 גבול של פונקציה

לשם פשטות נגדיר את מושג הגבול עבור פונקציה של שני משתנים. ההגדרה עבור שלושה ויותר משתנים דומה לחלוטין.

הגדרה 1.1: (סביבה נקובה) אם E היא סביבה של הנקודה (x_0, y_0) (כדורית או מלבנית) אז הקבוצה $E - \{(x_0, y_0)\}$ נקראת **סביבה נקובה של** (x_0, y_0)

- בכתיב לוגי זה נראה כך

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in D - \{(x_0, y_0)\} : \\ |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\end{gathered}$$

כאן D הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x, y)$.

- חשוב לזכור שהנקודה (x, y) השואפת לנקודה (x_0, y_0) תמיד שונה מהנקודה (x_0, y_0)! לכן הגדרת הפונקציה דרושה בסביבה נקובה של (x_0, y_0) בלבד.

1.1.1 דוגמאות

- באופן מילולי: הפונקציה $f(x,y)$ שואפת לגבול L בנקודה פנימית (x_0,y_0) אם ככל שהנקודה (x,y) קרובה לנקודה (x_0,y_0), הערך של $f(x,y)$ הולך ומתקרב ל־L.
- **דוגמה 1:** נניח ש־ $f(x,y)=x+y$. נוכיח על פי ההגדרה ש־

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=3$$

יהי $\varepsilon>0$. יש למצוא $\delta>0$ כך ש־ $|(x+y)-3|<\varepsilon$ עבור כל נקודה $(x,y)\neq(1,2)$, שמרחקה מהנקודה $(1,2)$ קטן מ־δ. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. תהי (x,y) נקודה כלשהי שמקיימת $|(x,y)-(1,2)|<\delta$. אזי

$$|x-1|=\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|(x,y)-(1,2)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ובאותו אופן נוכיח כי $|y-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן

$$\begin{aligned}|f(x,y)-3| &= |(x+y)-3|\\ &= |(x-1)+(y-2)|\\ &\leq |x-1|+|y-2|\\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

הוכחנו שלכל (x,y)

$$|(x,y)-(1,2)|<\delta \implies |(x+y)-3|<\varepsilon$$

לכן $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x+y=3$.

פיתרון שני: לפעמים שימוש בסביבה מלבנית מפשט ומקל מאוד. במקרה

הנוכחי, הסביבה המלבנית של הנקודה $(1,2)$ היא

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x-1|, |y-2| < \delta \right\}$$

עלינו לכן להוכיח את הטענה

$$|x-1| < \delta, \quad |y-2| < \delta \implies |(x+y)-3| < \varepsilon$$

וזה יוצא הרבה יותר פשוט מהסביבה הכדורית

$$|(x+y)-3| = |(x-1)+(y-2)| \leq |x-1| + |y-2| < \delta + \delta = \varepsilon$$

- חישוב גבולות של פונקציות בכמה משתנים הוא בדרך כלל עניין יותר מסובך ומורכב מחישוב גבול של פונקציה במשתנה יחיד. אין לנו כוונה לספק בפרק זה את כל הכלים המתקדמים בנושא. נסתפק בכמה כלים פשוטים שמאפשרים לנו לחשב גבולות של פונקציות מסוימות, ובכלים להוכחת אי־קיום גבול במקרים אחרים.
- **טענה 1.1: (כלל הסנדביץ')** יהיו $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$, שלוש פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה (x_0,y_0), שמקיימות

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

אז $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta_1 > 0$ כך שאם $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta_1$ אז $|f(x,y)-L| < \varepsilon$. כמו־כן קיים $\delta_2 > 0$ כך שאם $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta_2$

אזי $|h(x,y)-L|<\varepsilon$. ברור כי

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon \iff L-\varepsilon<f(x,y)<L+\varepsilon$$
$$|f(x,y)-L|<\varepsilon \iff L-\varepsilon<f(x,y)<L+\varepsilon$$

יהי $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. אזי עבור כל נקודה (x,y),
אם $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$ אזי

$$L-\varepsilon<f(x,y)\le g(x,y)\le h(x,y)<L+\varepsilon$$

כלומר

$$L-\varepsilon<g(x,y)<L+\varepsilon$$

ולכן $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L$. ∎

מסקנה 1.2: אם $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)|=0$ אזי $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$

הדרכה: נשתמש בכלל הסנדביץ'

$$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$$

דוגמה 2: הוכח כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^4\sin xy=0$

הוכחה: נשתמש בכלל הסנדביץ': $-x^4\le x^4\sin xy\le x^4$.

דוגמה 3: הוכח כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}=0$

הוכחה:

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\le\frac{|x^2y|}{x^2}=|y|$$

ברור כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$. לכן על פי כלל הסנדביץ', $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|=0$.
מהמסקנה לעיל נובע כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=0$.

- **דוגמה 4:** חשב את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

פתרון: נשתמש באי השוויון $|xy| \le x^2+y^2$ (שנובע מ־$(|x|-|y|)^2 \ge 0$).

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ נובע מייד מהגדרת הגבול, כי הביטוי $\sqrt{x^2+y^2}$ הוא המרחק בין הנקודה (x,y) לנקודה $(0,0)$. לכן המסקנה נובעת מכלל הסנדביץ'.

- טכניקה נוספת לחישוב גבול היא על ידי הצבה שמעבירה אותנו משני משתנים למשתנה יחיד (ואז עומדים לרשותנו כל הטכניקות של חדו"א 1).

- **דוגמה 5:** חשב את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

פתרון: נציב $r=\sqrt{x^2+y^2}$. ברור כי $(x,y)\to 0$ אם ורק אם $r\to 0$.
לכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{r\to 0} r^2 \sin\frac{1}{r} = 0$$

הגבול האחרון נובע מכך ש־$r^2 \to 0$, והפונקציה $\sin\frac{1}{r}$ חסומה.
אבל אפשר לנמק גם על ידי כלל הסנדביץ'

$$-r^2 \le r^2 \sin\frac{1}{r} \le r^2$$

כי לכל $r \ne 0$ מתקיים $-1 \le \sin\frac{1}{r} \le 1$.

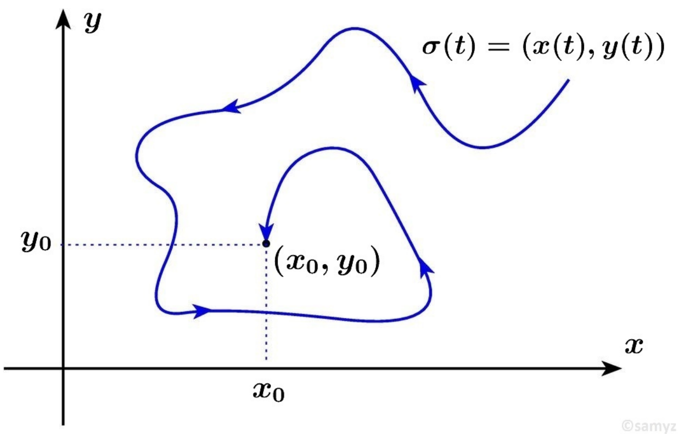
- יש לציין כי בשלושת הדוגמאות האחרונות, הפונקציה לא מוגדרת בנקודה בה הגבול מחושב! כשנדבר על רציפות, נשתמש בערך של הגבול בכדי לתקן את הפונקציה בנקודה החסרה.

1.1.2 חישוב גבול לאורך מסלול

- בניגוד למקרה החד-מימדי של גבול ימני וגבול שמאלי, ברב-מימד יש אינסוף דרכים מגוונות להתקרב לנקודה על ידי מסלול.
- תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבה נקובה של הנקודה (x_0,y_0). יהי $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in I$, מסלול רגולרי שכולל את הנקודה (x_0,y_0). כלומר, בנקודת זמן $t=t_0$, $\sigma(t_0)=(x_0,y_0)$. **הגבול של** $f(x,y)$ **לאורך המסלול בנקודה** $t=t_0$ מוגדר על ידי

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t))$$

לאחר הצבת המסלול $\sigma(t)$ נקבל גבול רגיל של משתנה יחיד t.



איור 1.1: גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) לאורך מסלול $\sigma(t)$

- אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ אז ברור כי $\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=L$ לכל מסלול רציף $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ שמקיים $\sigma(t_0)=(x_0,y_0)$.
- **מסקנה 1.3:** אם קיימים שני מסלולים שונים σ_1, σ_2, שבהם הגבולות שונים, אז לא קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
- המסקנה האחרונה מספקת לנו טכניקה חשובה להוכחת אי־קיום גבול. המסלולים הכי פשוטים שכדאי לנסות בשלב ראשון הם כמובן קווים ישרים, ובפרט ישרים מהצורה $x=x_0$ או $y=y_0$.

דוגמה 6: הוכח כי לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

פתרון: קל לראות שלאורך המסלול $\sigma_1(t)=(t,0)$ הגבול הוא 1, ולאורך המסלול $\sigma_2(t)=(0,t)$ הגבול הוא 0.

דוגמה 7: הוכח כי לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

פתרון: על שני המסלולים של הדוגמא הקודמת הגבול הוא 0. אבל על המסלול $\sigma_3(t)=(t,t)$ הגבול הוא

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(t)y(t)}{x(t)^2+y(t)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$$

למעשה הגבול על כל מסלול ישר $\sigma(t)=(at,bt)$ יוצא שונה, ולכן לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

דוגמה 8: הוכח כי לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

פתרון: במקרה זה כל המסלולים הישרים $\sigma(t)=(at,bt)$ נותנים

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(t)^2y(t)}{x(t)^4+y(t)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2bt^3}{a^4t^4+b^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^4t+\frac{b^2}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{0\pm\infty} = 0$$

(במקרה ש־$b=0$, המונה מתאפס ונקבל שוב שהגבול הוא אפס). מכך לא ניתן ללמוד כלום. אם ניקח מסלול פרבולי $\sigma(t)=(t,t^2)$ נקבל

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(t)^2y(t)}{x(t)^4+y(t)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$

ולכן הגבול לא קיים. הערה: a, b הם קבועים ממשיים שאינם אפס יחד.

1.1.3 חישוב גבול לאורך סדרה

בדומה למקרה של גבול של פונקציה במשתנה יחיד גם כאן ניתן לאפיין גבול של פונקציה באמצעות סדרות.

משפט 1.4: (Heine) לפונקציה $f(x,y)$ יש גבול L בנקודה (x_0,y_0) אם ורק אם לכל סדרת נקודות $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ בסביבה נקובה של (x_0,y_0), אם $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=L$.

הוכחה: זהה למקרה של משתנה יחיד. נשאיר את הפרטים לתלמיד.

תרגיל 1.1: תהי $f(x,y)=\begin{cases}\sin\frac{1}{xy}, & x,y\neq 0\\ 0, & x=0 \text{ או } y=0\end{cases}$.

הוכח שלא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

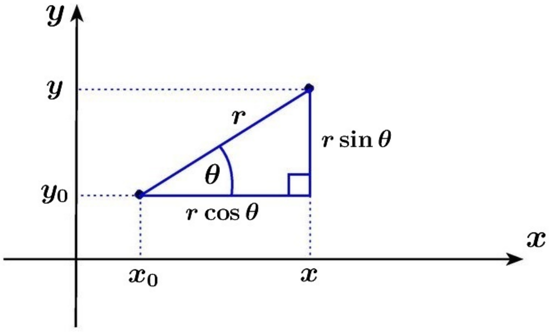
הדרכה: בדוק את גבול הפונקציה $\sin\frac{1}{xy}$ לאורך הסדרות

$$\begin{aligned}(x_n,y_n)&=\left(\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{n}\right)\\(x_n,y_n)&=\left(\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2n})},\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

1.1.4 שימוש בקואורדינטות קוטביות

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבה נקובה של (x_0,y_0). ברור כי לכל נקודה (x,y) בסביבה זו, קיימים $r>0$, $0\leq\theta<2\pi$, כך ש־

$$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$$



איור 1.2: קואורדינטות קוטביות סביב הנקודה (x_0,y_0)

ולכן נוכל להגדיר $F(r,\theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$

משפט 1.5: אם $|F(r,\theta)| \le |g(r)| \cdot |h(\theta)|$, כאשר $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, ו־ $h(\theta)$ פונקציה חסומה, אז $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

- המשפט נובע בקלות מכלל הסנדביץ' ורלבנטי עבור פונקציות של שני משתנים בלבד.
- **דוגמה 9:** הוכח כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

פתרון: חישבנו כבר את הגבול בדוגמא 4. נבצע זאת שוב באמצעות קואורדינטות קוטביות

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

לאחר המרת קואורדינטות נקבל

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r,\to 0} \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r} \\ &= \lim_{r,\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = \lim_{r,\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

במקרה זה רואים מייד כי הפונקציה $g(r) = r$ שואפת לאפס כאשר $r \to 0$. הפונקציה $h(\theta) = \cos\theta\sin\theta$ חסומה. לכן על פי המשפט הקודם, הגבול של $f(x,y)$ בנקודה $(0,0)$ הוא 0.

1.1.5 גבול נשנה

- הגבולות הנשנים של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) מוגדרים על ידי

$$A = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \qquad B = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

הרעיון הוא להשאיף כל משתנה בנפרד.

- **טענה 1.6:** אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, ואם קיימים שני הגבולות הנשנים, אז $A = B = L$.
- ההיפך אינו נכון! למשל, הגבולות הנשנים של הפונקציה $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ קיימים ושניהם שווים אפס, אך בדוגמא 7 הראינו שלפונקציה זו אין גבול בנקודה $(0,0)$.
- יתירה מזו, ייתכן גם שהגבול הרגיל קיים, אך הגבולות הנשנים לא קיימים. הדוגמא לכך היא

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}, & x,y \neq 0 \\ 0, & x,y = 0 \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$. נשאיר את הפרטים לקורא.

1.1.6 אריתמטיקה של גבולות

משפט 1.7: יהיו $f(x,y)$, $g(x,y)$, שתי פונקציות מוגדרות בסביבה נקובה של הנקודה (x_0,y_0). אם קיימים הגבולות

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

אזי

א. קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right] \pm \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right]$$

ב. קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right] \cdot \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right]$$

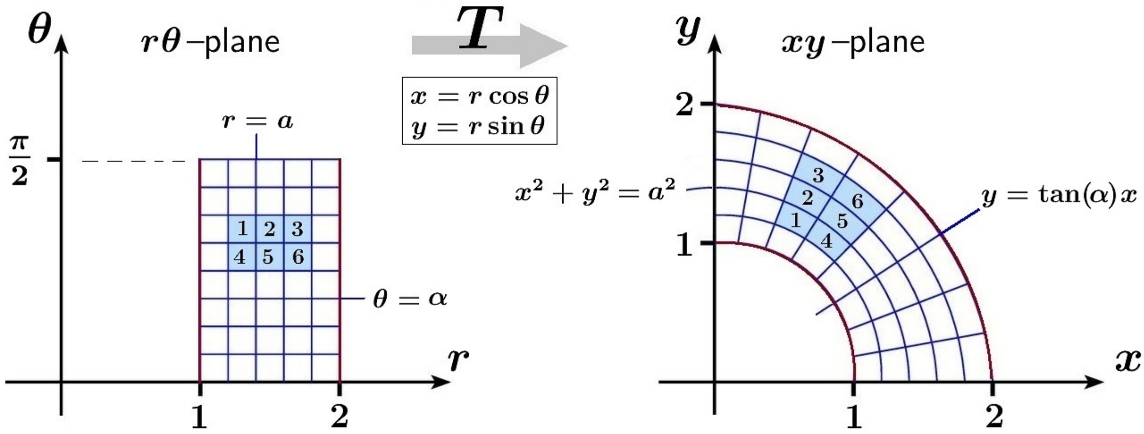
ג. אם $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$ אזי קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$$

ד. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)^\alpha = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]^\alpha$$

ניתן להוכיח משפט זה על פי הגדרת הגבול או על פי משפט היינה.

דוגמא להכנסת תמונה באמצעות החבילה zfig.sty:



איור 1.3: ההעתקה T מעתיקה ישרים אנכיים $r=a$ למעגלים $x^2+y^2=a^2$, וישרים אופקיים $\theta=\alpha$ לישרים משופעים $y=\tan(\alpha)x$

סימנים קליגרפיים

abcdefghijklmnopqrstuvxyz
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVXYZ

$\mathcal{A}\ \mathcal{B}\ \mathcal{C}\ \mathcal{D}\ \mathcal{E}\ \mathcal{F}\ \mathcal{G}\ \mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{J}\ \mathcal{K}\ \mathcal{L}\ \mathcal{M}\ \mathcal{N}\ \mathcal{O}\ \mathcal{P}\ \mathcal{Q}\ \mathcal{R}\ \mathcal{S}\ \mathcal{T}\ \mathcal{U}\ \mathcal{V}\ \mathcal{X}\ \mathcal{Y}\ \mathcal{Z}$
$\dashv \lfloor \rfloor \lceil \rceil \{ \} \langle \rangle | \| \updownarrow \Updownarrow \backslash \wr \surd \amalg \nabla \int \sqcup \sqcap \sqsubseteq \S \dagger \ddagger$
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVXYZ