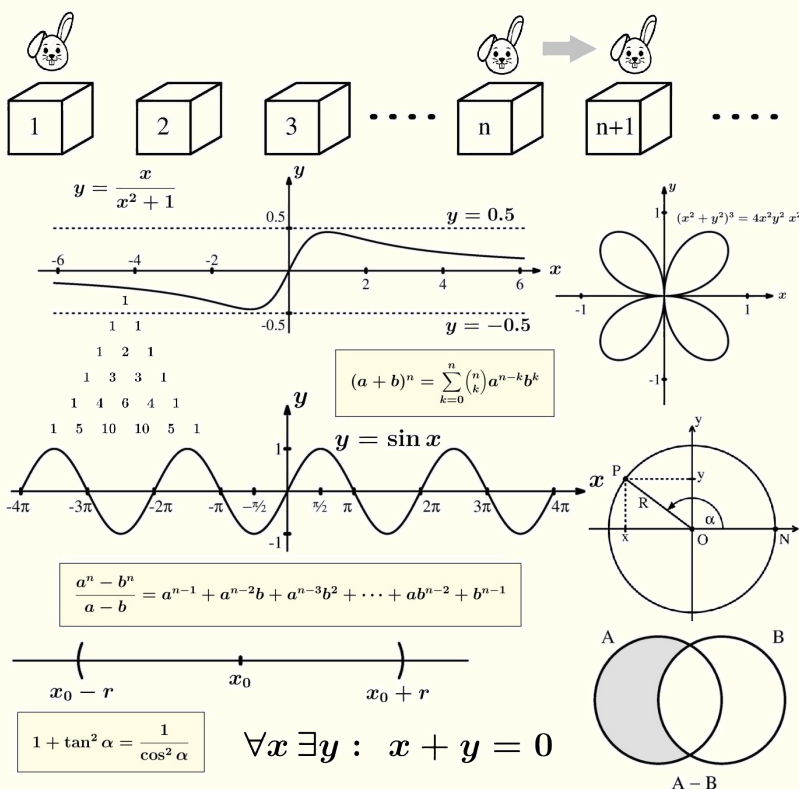


מתמטיקה

רגע לפני ...

ריענון, השלמות, והכנה, רגע לפני כניסה ללימודים במוסדות להשכלה גבוהה בפקולטות להנדסה, מדעים מדויקים, ומדעי החברה



- ◀ המספרים הממשיים
- ◀ אי-שוויונים
- ◀ סדרות
- ◀ עקרון האינדוקציה המתמטית
- ◀ לוגיקה ותורת הקבוצות
- ◀ פונקציות וגרפים
- ◀ נוסחאות טריגונומטריות
- ◀ מושגי יסוד בהנדסה אנליטית
- ◀ פולינומים
- ◀ נוסחת הבינום
- ◀ נוסחאות פירוק

הקדמה

נקודת המוצא לכתיבת ספר זה היא ההכרה כי קיים פער משמעותי בין רמת הדרישות הקיימת בלימודי המתמטיקה התיכונית לבין זו של המוסדות להשכלה גבוהה. רמת ההפשטה הגבוהה, רמת ההעמקה, והקצב המהיר של העברת החומר המאפיינים את לימודי המתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה, יוצרים קשיים לסטודנטים רבים כבר בראשית דרכם האקדמית. בניגוד לצורות לימוד שונות של מתמטיקה תיכונית, בלימודי המתמטיקה במוסדות להשכלה גבוהה נדרשת מן התלמיד הבנה מעמיקה יותר של מושגים, ולא רק יישומם בתרגילים שגרתיים.

לדעת המחברים, ניתן לגשר על הפער הזה, במקרים רבים, על ידי הכנה מתאימה, גם בסמוך לתחילת הלימודים. זו היא מטרתו העקרית של הספר. נכללים בו נושאים, אשר למרות חשיבותם במתמטיקה הגבוהה, נדחקים לשוליים בלימודים התיכוניים. לדעת המחברים, לימוד מוקדם של נושאים אלה עשוי להביא לשיפור ניכר בהישגיו של התלמיד בתחילת לימודיו האקדמיים.

הצגת החומר נעשית בצורה תמציתית, המאפשרת קליטה מהירה. בספר זה מעל מאה דוגמאות, המסייעות לתלמיד בהבנת המושגים והקשר ביניהם.

המחברים מודים לד"ר בן-ציון קון על עזרתו הרבה בכתיבת חלק נכבד מפרקי הספר, על עידודו, וטרחתו הרבה בהוצאת המהדורה הראשונה של הספר לאור (1994). לאור הביקוש ממורים ותלמידים חידשנו את הספר במהדורה דיגיטלית הנוכחית. נשמח לקבל תגובות, הערות, ורעיונות בנוגע לתוכנו ולצורתו של הספר, ממורים וסטודנטים כאחד.

המחברים מקווים כי הקורא ימצא בספר עזר רב לקראת לימודיו האקדמיים ובמהלך צעדיו הראשונים.

סמ' אלכס	
זעפרני קופרמן	

נובמבר 2018

תוכן עניינים

1.	המספרים הממשיים לסוגיהם	6
2.	אי-שוויונים	8
3.	הערך המוחלט	12
4.	קטעים וסביבות	14
	קטעים סופיים	14
	קטעים אינסופיים	14
	סביבות	15
5.	סדרות כלליות	17
6.	סכומים חלקיים של סדרות	21
7.	סדרות חסומות וסדרות מונוטוניות	24
8.	עקרון האינדוקציה המתמטית	27
	עקרון האינדוקציה המתמטית	28
9.	שימוש בסימנים לוגיים	31
	סימן הגרירה הלוגית " $\Rightarrow$ " וסימן השקילות הלוגית " $\Leftrightarrow$ "	31
	סימן השלילה הלוגית " $\neg$ "	32
	הסימנים: או, וגם ($\vee, \wedge$)	32
	כללים לוגיים	33
	כמתים לוגיים	34
10.	מושגים יסודיים בתורת הקבוצות	36
	יחס ההכלה	38
	שיון קבוצות	38
	איחוד וחיתוך	38
	הפרש והשלמה	39

11. מושג הפונקציה	42
הגדרת מושג הפונקציה	42
דרכים להגדרת פונקציה	43
הגדרה על ידי נוסחה מפורשת	44
הגדרה לפי מקרים	44
הגדרה על ידי אלגוריתם	44
הגדרה על ידי טבלת ערכים	45
תחום הגדרה טבעי	45
תמונה של פונקציה	46
12. גרף של פונקציה	47
פונקציות חסומות	48
13. פעולות על פונקציות ועל גרפים	51
גרף של משוואה	53
14. פונקציות מונוטוניות ופונקציות הפוכות	56
פונקציות חד-חד ערכיות	57
פונקציות על	58
פונקציות הפוכות	59
גרפים של פונקציות הפוכות	59
15. פונקציות מחזוריות, זוגיות, ואי-זוגיות	62
פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות	64
16. פונקציות טריגונומטריות	68
המחזוריות והזוגיות של הפונקציות הטריגונומטריות	72
17. פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות	78
הפונקציות הלוגריתמיות	80
18. מושגים יסודיים בהנדסה אנליטית	83
שיפוע של ישר	84
זווית בין שני ישרים	85
המשוואה הכללית של הישר	86
משוואת המעגל	87

89	משוואת האליפסה
90	משוואת ההיפרבולה
90	משוואת הפרבולה
92	19. פולינומים ומשפט השארית
95	שורשים של פולינומים
96	יחסים בין מקדמים ושורשים של פולינום
101	20. נוסחת הבינום של ניוטון
102	משולש פסקל
105	21. נוסחאות פירוק

1. המספרים הממשיים לסוגיהם

אנו מניחים כי מושג המספר הממשי מוכר לקורא מלימודיו התיכוניים, ולכן נסתפק בסקירה קצרה אודות הסוגים העקריים של המספרים הממשיים. מספרים שלמים וחיוביים, ז"א המספרים $1, 2, 3, \dots$, נקראים **מספרים טבעיים**. את קבוצת כל המספרים הטבעיים מקובל לסמן ע"י $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

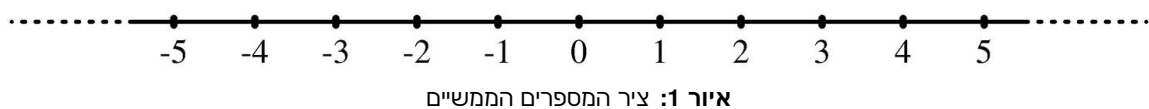
כאשר n מסמן בדרך כלל מספר טבעי כלשהו. נציין כי המספר 0 הוא מספר שלם, אך הוא אינו חיובי ואינו שלילי, ולכן המספר 0 אינו נכלל בקבוצת המספרים הטבעיים. את קבוצת כל המספרים **השלמים** מקובל לסמן ע"י $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

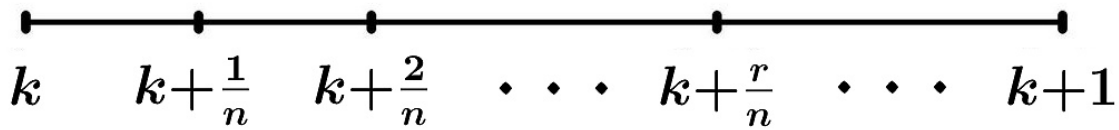
כל מספר הניתן לתיאור על ידי $\frac{m}{n}$, כאשר m ו- n הם מספרים שלמים ו- $n \neq 0$, נקרא **שבר** או **מספר רציונלי**. את קבוצת כל המספרים הרציונליים נסמן על ידי $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \text{ מספרים שלמים ו-} n \neq 0 \right\}$$

כל מספר שלם k הוא מספר רציונלי כי ניתן להציג את k גם על ידי $k = \frac{k}{1}$. ההיפך, כמובן, אינו נכון: קיימים מספרים רציונליים שאינם שלמים. על מספרים רציונליים ניתן לבצע ארבעה פעולות חשבון יסודיות: חיבור, חיסור, כפל, וחילוק (להוציא חילוק באפס). מבחינה גאומטרית ניתן להציג את המספרים הרציונליים על ידי נקודות שעל קו ישר אופקי, שנקרא גם **ציר המספרים הממשיים**, כפי שרואים בציור 1.



הדבר נעשה כך: נבחר באופן שרירותי קטע סופי — שימש כיחידת מידה (למשל נוכל לבחור בקטע שאורכו 1 ס"מ). נחלק את הישר L לאינסוף קטעים בהתאם ליחידת המידה שקבענו. נקבל אינסוף נקודות חלוקה להן נתאים את כל המספרים השלמים. כל מספר רציונלי $q = \frac{m}{n}$ אפשר לרשום כסכום של מספר שלם ושבר פשוט $q = k + \frac{r}{n}$ (כאשר k הוא מספר שלם ו- $0 \leq r < n$). נתבונן בקטע $[k, k+1]$ של הישר שלנו. נחלק אותו ל- n קטעים שווים ונתאים את q לנקודת החלוקה ה- r , כמתואר בציור 2.



איור 2: ייצוג מספרים רציונליים (שברים) על ציר המספרים הממשיים

כידוע, קיימות על ציר המספרים נקודות שאינן מתאימות למספרים רציונליים. למשל המספר $\sqrt{2}$ (אורך האלכסון בריבוע בעל צלע שאורכה הוא 1) אינו רציונלי. לכל המספרים מסוג זה נקרא **מספרים אי-רציונליים**.

לסיכום, לכל נקודה על ציר המספרים ניתן להתאים, בצורה חד-משמעית, מספר רציונלי או אי-רציונלי, ולהיפך: לכל מספר רציונלי או אי-רציונלי מתאימה, באופן חד-משמעי, נקודה על ציר המספרים. הקבוצה המורכבת מכל המספרים הרציונליים והאי-רציונליים נקראת **קבוצת המספרים הממשיים** והיא מסומנת ע"י $\mathbb{R}$. הפעולות החשבוניות היסודיות שמנינו לעיל, חלות גם על מספרים ממשיים. להלן רשימת הכללים היסודיים הנוגעים לפעולות החשבוניות הללו ביחס לקבוצת המספרים הממשיים:

א. $x + y = y + x$ (קומוטטיביות).

ב. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (אסוציאטיביות).

ג. $x + 0 = x$ (0 מספר ניטרלי לחיבור).

ד. לכל מספר ממשי x קיים מספר ממשי y המקיים $x + y = 0$. המספר y נקרא **המספר הנגדי של x** והוא מסומן $-x$.

ה. $xy = yx$ (קומוטטיביות).

ו. $(xy)z = x(yz)$ (אסוציאטיביות).

ז. $x \cdot 1 = x$ (1 הוא מספר ניטרלי לכפל).

ח. לכל מספר ממשי $x \neq 0$ קיים מספר ממשי y המקיים $xy = 1$. המספר y נקרא **המספר ההופכי של x** והוא מסומן x^{-1} .

ט. $x(y + z) = xy + xz$ (חוק הפילוג)

באמצעות פעולות הכפל והחיבור נגדיר את פעולות **החיסור והחילוק** באופן הבא:

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} \quad (y \neq 0).$$

בנוסף לפעולות אלה, קיימות גם פעולות החזקה והוצאת שורש. פעולות חשבוניות מסוימות אינן אפשריות במצבים מסוימים. למשל, לא ניתן להוציא שורש ריבועי ממספר שלילי, או לחלק מספר ממשי כלשהו באפס. ניתן להרחיב את קבוצת המספרים הממשיים לקבוצת

מספרים עשירה יותר, **קבוצת המספרים המרוכבים**, אותה מסמנים על ידי $\mathbb{C}$, ואשר בה קיים שורש ריבועי לכל מספר. הדיון בקבוצה זו חורג ממסגרת הספר הזה.

דוגמא 1: הצג את המספרים 7.03 ו-0.104 כמנה של שני מספרים שלמים. **פתרון:**

$$7.03 = \frac{703}{100}, -0.104 = \frac{-104}{100} = \frac{-26}{25}$$

2. אי-שוויונים

בכדי לפתור אי-שוויון או להוכיח את נכונותו עבור קבוצה נתונה של מספרים, נזדקק לכללים הבסיסיים הבאים:

1. אי-השוויון $a < b$ שקול לאי-השוויון $a + c < b + c$.

2. אי-השוויון $a < b$ שקול לאי-השוויון $a - c < b - c$.

3. אם $a < b$ ואם $c > 0$ אזי $ac < bc$, ו- $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

4. אם $a < b$ ואם $c < 0$ אזי $ac > bc$, ו- $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

5. אם $a < b$ ו- $b < c$ אזי $a < c$.

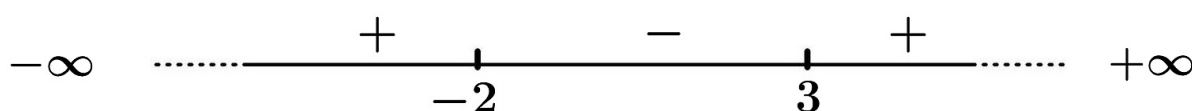
נציין כי כל הכללים הללו נשארים נכונים אם נחליף את הסימנים $<$ ו- $>$ בסימנים $\leq$ ו- $\geq$. את שתי הטענות $x < y$ ו- $y < z$ מקצרים בדרך כלל ע"י טענה אחת: $x < y < z$.

דוגמא 1: מצא את כל הערכים של x עבורם מתקיים אי-השוויון $-1 < 3 - 2x < 15$.

פתרון: נחסיר את המספר 3 מכל אגפי אי-השוויון ונקבל אי-שוויון שקול: $-4 < -2x < 12$. ע"י חילוק כל הביטויים במספר -2 נקבל אי-שוויון שקול נוסף: $-6 < x < 2$, שהוא הפתרון לבעיה: $-6 < x < 2$. מקובל לקרוא לקבוצת כל הערכים הזו בשם **קבוצת הפתרונות** של אי-השוויון. במקרה הנוכחי ברור כי קבוצת הפתרונות היא למעשה הקטע הפתוח $(-6, 2)$.

דוגמא 2: פתור את אי-השוויון $\frac{x-3}{x+2} > 0$.

פתרון: במילים פשוטות, עלינו למצוא את כל הערכים של x עבורם השבר $\frac{x-3}{x+2}$ חיובי. לשם כך נמצא את כל הנקודות x בהן השבר מחליף את סימנו משלילי לחיובי או להיפך. המונה $x-3$ מחליף סימן בנקודה $x=3$ בלבד, והמכנה $x+2$ מחליף את סימנו בנקודה $x=-2$ בלבד. לכן השבר כולו עשוי להחליף את סימנו בנקודות $x=3$ ו- $x=-2$ לכל היותר. בהתאם לעובדה זו, נחלק את ציר המספרים לשלשה קטעים:



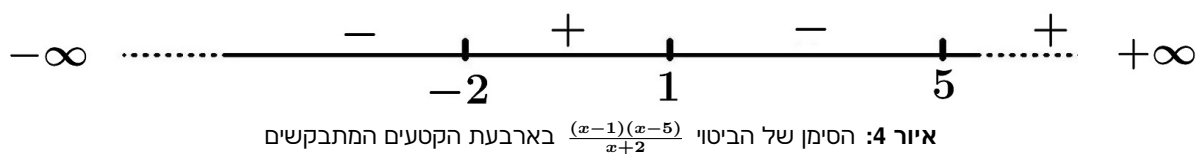
איור 3: ייצוג הפיתרון של אי-השוויון $\frac{x-3}{x+2} > 0$ על ציר המספרים הממשיים: $x < -2$ איחוד $x > 3$

בקטע $x > 3$ המונה והמכנה חיוביים ולכן השבר חיובי; בקטע $-2 < x < 3$ המונה שלילי אך המכנה חיובי ולכן השבר שלילי; בקטע $x < -2$ המונה וגם המכנה שליליים ולכן השבר חיובי. מכאן נובע שקבוצת הפתרונות היא

$$\{x \mid x < -2 \text{ או } x > 3\}$$

דוגמא 3: פתור את אי-השוויון $\frac{(x-1)(x-5)}{x+2} \leq 0$.

פתרון: המונה מחליף את סימנו בנקודות $x = 1$ ו- $x = 5$, והמכנה מחליף את סימנו בנקודה $x = -2$. לכן השבר כולו עשוי להחליף את סימנו בנקודות $x = -2, 1, 5$. נחלק את ציר המספרים לארבעה קטעים בהתאם לנקודות חלוקה אלו ונבדוק את סימנו של השבר בכל אחד מן הקטעים האלה:



בקטע $x < -2$ המונה חיובי והמכנה שלילי ולכן השבר שלילי. בקטע $-2 < x < 1$ המונה והמכנה חיוביים ולכן השבר חיובי. באותו אופן מוצאים כי בקטע $1 < x < 5$ השבר שלילי, ובקטע $5 < x$ השבר חיובי. נציין כי במקרה זה יש לקחת בחשבון גם את נקודות החלוקה עצמן $x = -2, 1, 5$, מאחר והשבר עשוי להתאפס בחלק מהן. בנקודה $x = -2$ המכנה מתאפס ולכן השבר אינו מוגדר בנקודה זו, ועל כן נקודה זו יוצאת מן הדיון באופן אוטומטי. לעומת זאת, השבר מתאפס בנקודות $x = 1, 5$, ולכן נקודות אלו נכללות בקבוצת הפתרונות. לסיכום, קבוצת הפתרונות היא:

$$\{x \mid x < -2 \text{ או } 1 \leq x \leq 5\}$$

דוגמא 4: פתור את אי-השוויון $\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 5} \geq x$.

פתרון: ראשית כל נביא את אי-השוויון לצורה דומה לזו שבשתי הדוגמאות הקודמות ע"י החסרת x משני אגפיו:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 5} - x \geq 0$$

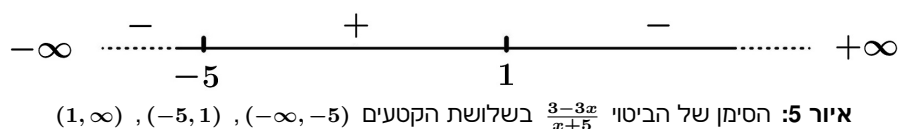
ולכן

$$\frac{x^2 + 2x + 3 - x(x + 5)}{x + 5} \geq 0$$

ולאחר פישוט המונה נקבל

$$\frac{3-3x}{x+5} \geq 0$$

כמו בשתי הדוגמאות הקודמות, קל לבדוק כי השבר האחרון מחליף את סימנו אך ורק בנקודות $x = -5$ ו- $x = 1$. סימני השבר בקטעי החלוקה נתונים בציר הבא:



השבר אינו מוגדר בנקודה $x = -5$, ולכן קבוצת הפתרונות היא

$$\{x \mid -5 < x \leq 1\}$$

דוגמא 5: הוכח כי אם $0 < x < y$ או $x < y < 0$ אזי $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

הוכחה: מכל אחד מן המקרים $0 < x < y$ או $x < y < 0$ יוצא ש- $xy > 0$ ולכן $\frac{1}{xy} > 0$. לכן אם נשתמש בכלל 3 ונכפיל את שני האגפים של אי-השוויון $x < y$ במספר החיובי $\frac{1}{xy}$ נקבל $\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$. כלומר $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. ■

דוגמא 6: הוכח כי לכל $x, y > 0$ מתקיים $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

הוכחה: אי-השוויון $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ שקול לאי-השוויון $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$, שהוא שקול לאי-השוויון $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. ברור כי הביטוי $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ אינו יכול להיות שלילי, מאחר והריבוע של כל מספר לעולם אינו שלילי. לכן אי-השוויון המקורי נכון. הביטוי $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ מתאפס רק כאשר $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, כלומר רק כאשר $x = y$. ■

הערה: $\frac{x+y}{2}$ הוא הממוצע החשבוני של x ו- y , ואילו $\sqrt{xy}$ הוא הממוצע ההנדסי של x ו- y . לכן הוכחנו למעשה כי הממוצע ההנדסי של כל שני מספרים חיוביים תמיד קטן או שווה לממוצע החשבוני. אם נתונים n מספרים חיוביים $x_1, x_2, \dots, x_n$, אז הממוצע ההנדסי שלהם הוא $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ והממוצע החשבוני הוא $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. ניתן להוכיח כי גם במקרה זה הממוצע ההנדסי אינו עולה על הממוצע החשבוני:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

אי-שוויון זה נקרא **אי-שוויון הממוצעים**. נסתפק בהוכחתו בשני מקרים בלבד.

דוגמא 7: הוכח את אי-שוויון הממוצעים עבור שלשה מספרים ועבור ארבעה מספרים.

הוכחה: נתחיל בהוכחת האי-שוויון למקרה $n = 4$. נזכור כי עבור $n = 2$, אי-שוויון הוכח כבר בדוגמא הקודמת.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= (x_1 x_2)(x_3 x_4) \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right]^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^4 \end{aligned}$$

ולכן קבלנו $\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$. שים לב כי, במהלך ההוכחה, השתמשנו פעמיים באי-שוויון הממוצעים עבור $n = 2$. בכדי להוכיח את אי-שוויון עבור $n = 3$ נסמן

$$(2.1) \quad M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

ונסתמך על אי-שוויון הממוצעים עבור $n = 4$:

$$(2.2) \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + M}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 M}$$

מן השוויון (2.1) נובע ש- $3M = x_1 + x_2 + x_3$. לכן

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + M}{4} = \frac{3M + M}{4} = M \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 M}$$

כלומר, $M \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 M}$. מכאן ש- $M^4 \geq x_1 x_2 x_3 M$, ולכן $M^3 \geq x_1 x_2 x_3$, ולכן $M \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. נשתמש שוב בשוויון (2.1) ונקבל $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$. ■

תרגילים

1. פתור את אי-שוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } 10 < 3 - 7x \leq 24 & \text{ב. } \frac{3x - 6}{x + 2} \leq 0 \\ \text{ג. } \frac{(x + 1)(x - 2)}{x - 3} \leq 0 & \text{ד. } -1 \leq \frac{2x + 3}{x - 1} \leq 1 \end{array}$$

2. הוכח את אי-שוויון הממוצעים עבור $n = 8$ ועבור $n = 5$.

3. בהסתמך על אי-שוויון הממוצעים, הוכח כי $x + \frac{1}{x} \geq 2$, לכל $x > 0$. מתי מתקבל שוויון?

4. הוכח כי לכל $a, b > 0$ מתקיים $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. מתי מתקבל שוויון?

תשובות סופיות

1. א. $-3 \leq x < -1$ ב. $-2 < x \leq 2$ ג. $2 \leq x < 3, x \leq -1$ ד. $-4 \leq x \leq -\frac{2}{3}$

3. הערך המוחלט

עבור כל מספר ממשי, הערך המוחלט של x מוגדר באופן הבא:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{אם } x \geq 0 \\ -x, & \text{אם } x < 0 \end{cases}$$

גאומטרית, הערך המוחלט של x הינו המרחק של x מן המספר 0 בציר המספרים.

דוגמא 1: חשב את $|x|$, כאשר

א. $x = 5$ ב. $x = -5$ ג. $x = 0$

פתרון:

א. $|5| = 5$ ב. $|-5| = -(-5) = 5$ ג. $|0| = 0$

דוגמא 2: פשט את הביטוי $|x-3| + |x-1|$ כאשר

א. $x \geq 3$ ב. $1 \leq x < 3$ ג. $x < 1$

פתרון:

א. עבור $x \geq 3$ מתקיים $x-3 \geq 0$, ולכן גם $x-1 \geq 0$. מכאן ש-

$$|x-3| + |x-1| = x-3 + x-1 = 2x-4$$

ב. עבור $1 \leq x < 3$ מתקיים $x-3 < 0$, $x-1 \geq 0$, ולכן

$$|x-3| + |x-1| = -(x-3) + (x-1) = 2$$

ג. עבור $x < 1$ מתקיים $x-3 < 0$ ו- $x-1 < 0$, ולכן

$$|x-3| + |x-1| = -(x-3) - (x-1) = -2x+4$$

הכללים היסודיים של הערך המוחלט

1. $|x| \geq 0$, ו- $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

2. $-|x| \leq x \leq |x|$.

3. יהי $a > 0$, אזי $|x| \leq a$ אם ורק אם $-a \leq x \leq a$.

4. $|x| \geq a$ אם ורק אם $x \geq a$ או $x \leq -a$.

5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (אי-שוויון המשולש).

6. $|x| - |y| \leq |x - y|$.

7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

דוגמא 3: פתור את אי-השוויונים

א. $|2x - 4| \leq 6$ ב. $|3x + 1| \geq 7$.

פתרון:

א. על פי תכונה 3, $-6 \leq 2x - 4 \leq 6$, ולכן $-2 \leq 2x \leq 10$, ולכן הפתרון הוא $-1 \leq x \leq 5$.

ב. על סמך תכונה 4 נקבל $3x + 1 \geq 7$ או $3x + 1 \leq -7$. לכן הפתרון הוא $x \geq 2$ או $x \leq -\frac{8}{3}$.

דוגמא 4: הוכח כי אם $|x| \leq a$ ו- $|y| \leq b$ אזי $|x + y| \leq a + b$.

הוכחה: מאי-שוויון המשולש (תכונה 5) נקבל

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq a + b.$$

ולכן $|x + y| \leq a + b$.

דוגמא 5: הוכח שאם $|x - 2| < 0.1$ אזי $|3x + 5| < 11.3$.

הוכחה: מתכונה 3 של הערך המוחלט נובע ש- $-0.1 < x - 2 < 0.1$, ולכן $1.9 < x < 2.1$, ולכן $5.7 < 3x < 6.3$, ולכן $10.7 < 3x + 5 < 11.3$. היות ו- $3x + 5 > 0$, הרי ש- $|3x + 5| < 11.3$.

דוגמא 6: הוכח שאם $|x - 1| < \frac{1}{10}$ אז $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \frac{1}{19}$.

הוכחה: מתכונה 3 של הערך המוחלט נקבל שוב $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$. נפעיל את כללי אי-השוויונים ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{9}{10} &< x < \frac{11}{10} \\ \frac{19}{10} &< x + 1 < \frac{21}{10} \\ \frac{10}{21} &< \frac{1}{x+1} < \frac{10}{19} \end{aligned}$$

את אי-השוויון האחרון גזרנו מן התכונה שהוכחנו בדוגמא 5 של הפרק הקודם. לסיכום, קבלנו

$$\left| \frac{1}{x+1} \right| < \frac{10}{19}$$

על סמך תכונה 7 של הערך המוחלט

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = |x-1| \cdot \left| \frac{1}{x+1} \right| < \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{19} = \frac{1}{19}$$

וההוכחה הושלמה.

4. קטעים וסביבות

בענפים שונים של המתמטיקה דנים לעיתים קרובות בקבוצות מיוחדות של מספרים ממשיים שנקראים **קטעים**. נביא מספר דוגמאות.

4.1 קטעים סופיים

לכל שני מספרים ממשיים $a \leq b$, נסמן על ידי $[a, b]$ את קבוצת כל המספרים הממשיים x שמקיימים את התנאי: $a \leq x \leq b$. במונחים של תורת הקבוצות, ניתן לרשום הגדרה זו גם באופן הבא:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

כל קבוצה כזו נקראת **קטע סגור**. באופן דומה נגדיר את **הקטע הפתוח** (a, b) על ידי

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

ההבדל היסודי שבין הקטע הסגור $[a, b]$ לקטע הפתוח (a, b) הוא שהראשון כולל בתוכו את המספרים a ו- b , ואילו השני אינו כולל מספרים אלה. המספרים a ו- b נקראים **קצות הקטע**. הקבוצה

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

נקראת **קטע חצי-פתוח חצי-סגור**.

4.2 קטעים אינסופיים

יהי a מספר ממשי כלשהו. קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים את התנאי: $x > a$, נקראת **חצי-ישר פתוח**, והיא מסומנת על ידי (a, ∞) . באופן דומה, קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים את התנאי: $a \leq x$, נקראת **חצי-ישר סגור**, והיא מסומנת על ידי $[a, \infty)$. נציין כי הסימן ∞ אינו מסמן שום מספר ממשי מסוים אלא מסמן את המונח "אינסוף" באופן סמלי בלבד. למשל את קבוצת המספרים הממשיים

עצמה מקובל לתאר גם באופן הבא:

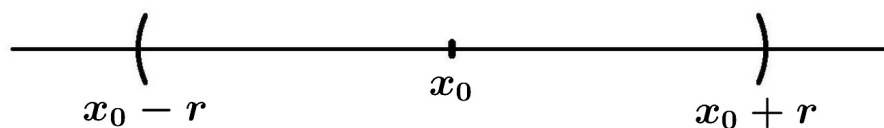
$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

4.3 סביבות

תהי x_0 נקודה על ציר המספרים, ויהי $r > 0$ מספר ממשי חיובי. קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים את אי-השוויון

$$(4.1) \quad |x - x_0| < r$$

נקראת **סביבה של הנקודה x_0 ברדיוס r** . מבחינה גאומטרית, קבוצה זו מהווה קטע פתוח וסימטרי ביחס לנקודה x_0 , הכוללת את כל הנקודות x על ציר המספרים אשר מרחקן מן הנקודה x_0 קטן מ- r , כפי שרואים בציור 6.



איור 6: סביבה של הנקודה x_0 ברדיוס r : $(x_0 - r, x_0 + r)$

הנקודה x_0 נקראת **מרכז הסביבה**, והמספר r נקרא **רדיוס הסביבה**. נציין כי הנקודות $x = x_0 - r$ ו- $x = x_0 + r$ עצמן אינן שייכות לסביבה! על סמך תכונה 3 של הערך המוחלט, ברור כי אי-השוויון (4.1) שקול לאי-השוויון $-r < x - x_0 < r$ ואי-שוויון זה שקול לאי-השוויון

$$x_0 - r < x < x_0 + r,$$

כפי שניתן לראות ברור יותר בציור 6. לכן ניתן לתאר את הסביבה פשוט ע"י הקטע הפתוח $(x_0 - r, x_0 + r)$. בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי נעשה שימוש תכוף בסביבות מסוג זה על מנת להגדיר מושגים חשובים כגון מושג הגבול ומושג הרציפות. ברוב המקרים הללו הרדיוס הוא בדרך כלל מספר ממשי חיובי קטן מאוד אשר נהוג לסמנו ϵ . ברור שככל שהרדיוס ϵ הולך וקטן הולכת הסביבה ומתכווצת סביב הנקודה x_0 .

דוגמא 1: תאר בעזרת אי-שוויון מתאים את כל אחת מן הסביבות הבאות.

א. סביבה ברדיוס $r = \frac{1}{100}$ אשר מרכזת בנקודה $x_0 = 2$.

ב. סביבה ברדיוס $r = \frac{1}{2}$ אשר מרכזת בנקודה $x_0 = -2$.

פתרון:

א. $|x - 2| < \frac{1}{100}$ או באופן שקול: $1.99 < x < 2.01$.

ב. $|x + 2| < \frac{1}{2}$ או באופן שקול: $-2.5 < x < -1.5$.

דוגמא 2: תאר בעזרת קטעים פתוחים את כל אחת מן הסביבות שבדוגמא 1.

פתרון: א. $(1.99, 2.01)$ ב. $(-2.5, -1.5)$

תרגילים

1. תאר את כל אחת מן הקבוצות שלפניך בצורת קטע
- א. $\{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$ ב. $\{x \mid -3 < x < 5\}$ ג. $\{x \mid x^3 > 64\}$ ד. $\{x \mid x^2 \leq 64\}$
ה. $\{x \mid 1 - |x| > 0\}$ ו. $\{x \mid 1 + x < 0\}$

2. תאר את כל אחד מן הקטעים הבאים על ידי אי-שוויון מתאים:
- א. $[-7, 3]$ ב. $[0, \infty)$ ג. $(-\infty, 0]$

3. פתור את הבעיות הבאות:
- א. $|x - 1| = 3$ ב. $|x - 2| < 3$ ג. $|x + 1| \geq 2$ ד. $|x - 1| + |x + 2| < 5$
ה. $x + |x - 1| \geq 3$

4. בהסתמך על התכונות היסודיות של הערך המוחלט, הוכח כי לכל x מתקיים:
- א. $|x - 4| - |x - 7| \leq 3$ ב. $|x + 1| + |3 - x| \geq 4$

5. הוכח שאם $|x| < \frac{1}{10}$ אזי $\left| \frac{x+2}{1-x} - 2 \right| < \frac{1}{3}$.

6. הוכח שאם $|x - 3| < 0.01$ אזי $|2x + 1| < 7.02$.

7. מהי המשמעות הגאומטרית של כל אחד מאי-השוויונים הבאים:
- א. $|x - 2| < \frac{1}{10}$ ב. $0 < |x - 3| < \frac{1}{10}$ ג. $|x + 1| > 7$

תשובות סופיות

1. א. $[-1, 5]$ ב. $(-3, 5)$ ג. $(4, \infty)$ ד. $[-8, 8]$ ה. $(-1, 1)$ ו. $(-\infty, -1)$
2. א. $-7 \leq x \leq 3$ ב. $x \geq 0$ ג. $x \leq 0$
3. א. $x = 4, x = -2$ ב. $-1 < x < 5$ ג. $x \leq -3$ או $x \geq 1$ ד. $-3 < x < 2$ ה. $x \geq 2$
7. א. x שייך לסביבה $(1.9, 2.1)$ ב. x שייך לסביבה $(2.9, 3.1)$ אך $x \neq 3$ ג. x נמצא במשלים של הקטע הסגור $[-8, 6]$

5. סדרות כלליות

בפרק זה נציג את מושג הסדרה אשר מופיע לרוב במסגרת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, והינו כלי חשוב מאוד למטרות שונות שם. בלשון פשוטה, **סדרה** של מספרים ממשיים היא **רשימה סופית או אינסופית** של מספרים ממשיים:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

לכל איבר בסדרה מתאים מספר טבעי n שנקרא **האינדקס של האיבר** המציין את מקומו של האיבר ביחס לאיברים האחרים של הסדרה. איבר בסדרה אשר האינדקס שלו הוא n מסומן בדרך כלל ע"י הביטוי a_n , ונקרא **האיבר הכללי** של הסדרה. הסדרה בכללותה מסומנת ע"י הביטוי $\{a_n\}_{n=1}^{\ell}$, כאשר $n = 1$ מציין את האינדקס של האיבר הראשון ו- ℓ מציין את האינדקס של האיבר האחרון (אם הסדרה היא סופית). אם הסדרה אינסופית נסמן אותה ע"י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. הסדר הטבעי שקיים על $\mathbb{N}$ מקנה לסדרה את תכונתה החשובה ביותר: תכונת ה**סדר** (ומכאן השם "סדרה"). החוק המתמטי שבאמצעותו מוגדר האיבר הכללי של הסדרה $a_n = f(n)$ נקרא **נוסחת האיבר ה- n** של הסדרה או בקצרה **נוסחת האיבר הכללי**.

דוגמא 1: סמן בקצרה את כל אחת מן הסדרות הבאות.

א. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

ב. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{150}$

ג. $a_7, a_8, a_9, \dots, a_{5k+3}$

ד. $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$

פתרון:

א. $\{a_n\}_{n=1}^6$ ב. $\{b_n\}_{n=1}^{150}$ ג. $\{a_n\}_{n=7}^{5k+3}$ ד. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$

דוגמא 2: רשום את שבעת האיברים הראשונים של כל אחת מן הסדרות אשר נוסחת האיבר הכללי שלהן נתונה ע"י:

א. $a_n = n^2 + 3n$ ב. $b_n = 5 + (-1)^n$ ג. $c_n = \sqrt[n]{2n+1}$

פתרון:

א. 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70

ב. 4, 6, 4, 6, 4, 6, 4

ג. 3, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[5]{11}$, $\sqrt[6]{13}$, $\sqrt[7]{15}$

נעבור להיכרות עם רשימת דוגמאות של סדרות טיפוסיות.

דוגמא 3:

א. הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ נקראת **הסדרה ההרמונית**. נוסחת האיבר הכללי של סדרה זו היא $a_n = \frac{1}{n}$.

ב. הסדרה $1, -2, 3, -4, 5, \dots, (-1)^{n+1}n, \dots$ נקראת סדרה מתחלפת משום שסימני איבריה מתחלפים לסירוגין מחיובי לשלילי. באופן כללי, כל סדרה מן הצורה $(-1)^n a_n$, כאשר a_n סדרה חיובית (או שלילית) נקראת **סדרה מתחלפת**.

ג. הסדרה: $5, 5, 5, 5, 5, \dots, 5, \dots$ נקראת **סדרה קבועה** ונוסחת האיבר הכללי שלה היא $a_n = 5$.

ד. יהיו a ו- q שני מספרים ממשיים. הסדרה $a_n = aq^{n-1}$ נקראת **סדרה הנדסית**. המספר q נקרא **המנה הקבועה** של הסדרה. עבור $n = 1$ נקבל כי a הוא האיבר הראשון של הסדרה.

ה. יהיו a ו- d שני מספרים ממשיים. אם לכל מספר טבעי n נגדיר $a_n = a + d(n-1)$ אז נקבל סדרה שנקראת **סדרה חשבונית**. המספר d נקרא **ההפרש הקבוע** של הסדרה; a הוא האיבר הראשון של הסדרה ($a_1 = a$).

ו. שתי סדרות עשויות להכיל את אותם המספרים ועם זאת להיות שונות זו מזו. למשל לסדרות $a_n = 1 + (-1)^n$ ו- $b_n = 1 - (-1)^n$ אותם האיברים, אך איברים אלה רשומים במקומות שונים. האיברים של הסדרה a_n הם:

$$0, 2, 0, 2, 2, 0, \dots, 0, 2, \dots$$

והאיברים של הסדרה b_n הם:

$$2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, \dots$$

ז. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא **מוגדרת היטב** אם קיים כלל המתאים לכל מספר טבעי n את האיבר a_n של הסדרה באופן חד-משמעי. כלל כזה נוח לפעמים לתאר בצורה מילולית. למשל נוכל להגדיר סדרה על ידי: האיבר a_n הוא הספרה ה- n ית לאחר הנקודה בהצגה העשרונית של $\sqrt{2}$. על ידי חישוב של $\sqrt{2}$ נוכל לרשום כמה מן האיברים הראשונים של הסדרה:

$$4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, \dots$$

ט. דרך מיוחדת להגדרת סדרה היא ע"י **כלל נסיגה**. הגדרה כזו מורכבת משני שלבים

עקריים:

1. הגדרה של כמה מן האיברים הראשונים של הסדרה.

2. נוסחת נסיגה לחישוב איבר של הסדרה באמצעות האיברים הקודמים.

הגדרה מסוג זה נקראת גם **הגדרה רקורסיבית** של סדרה. למשל, אם נגדיר $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, ו- $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ נקבל את הסדרה המפורסמת של פיבונצ'י:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

נציין כי את האיבר a_3 בסדרה חשבנו על ידי כלל הנסיגה

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

ואת האיבר הרביעי a_4 , נחשב שוב על ידי שימוש בכלל הנסיגה:

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

ובאופן כללי, האיבר a_n שווה לסכום שני האיברים הקודמים לו. מדוגמא זאת אנו למדים שבמקרה של סדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה, בכדי לחשב את האיבר a_n , יש קודם כל לחשב את כל האיברים הקודמים ל- a_n . זאת בניגוד להגדרת סדרה על ידי נוסחת איבר כללי, אשר בה, בכדי לחשב את a_n , מספיק להציב את n בנוסחת האיבר הכללי בלבד, ואין שום צורך בידיעת האיברים הקודמים ל- a_n .

דוגמא 4: נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$. חשב את האיבר החמישי בסדרה.

פתרון: בכדי למצוא את a_5 עלינו קודם כל לחשב את a_1, a_2, a_3, a_4 .

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1 + a_1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1 + a_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1 + a_3} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = \frac{1}{1 + a_4} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

קבלנו $a_5 = \frac{5}{8}$.

דוגמא 5: נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $b_{n+1} = (n+1)b_n$, $b_0 = 1$. חשב את האיבר השישי של הסדרה.

פתרון:

$$\begin{aligned} b_6 &= 6 \cdot b_5 = 6 \cdot 5 \cdot b_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot b_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot b_2 \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot b_1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_0 = 720 \end{aligned}$$

קבלנו $b_6 = 720$. הקורא בודאי שם לב לכך שלמעשה $b_n = n!$ לכל n טבעי (כולל $n=0$), כאשר $n!$ (n עצרת) מציין $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

תרגילים

1. רשום את חמשת האיברים הראשונים של כל אחת מן הסדרות הבאות.

א. $a_n = \frac{n-1}{n}$ **ב.** $a_n = \frac{n}{3n + (-1)^n}$

ג. $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot (-1)^n$, $a_1 = 1$ **ד.** $a_n = 2^{n-1} - n^2 + 3$

2. רשום את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה: $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $a_1 = 2$.

3. מצא נוסחת איבר כללי עבור כל אחת מן הסדרות הבאות:

א. $1 \cdot 3, -2 \cdot 4, 3 \cdot 5, -4 \cdot 6, \dots$

ב. $1.1, 4.01, 9.001, 16.0001, \dots$

ג. $1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{1}{16}, \dots$

4. הראה שבסדרה $a_n = \frac{9n-7}{17-5n}$ קיימים בדיוק שלשה איברים חיוביים ומצא אותם.

5. הראה שכל איברי הסדרה $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$ נמצאים בין $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{3}{5}$ פרט לחמשת האיברים הראשונים.

6. הגדר את כל אחת מן הסדרות הבאות באמצעות נוסחת נסיגה:

א. $a_n = \frac{n}{2n+1}$ **ב.** $a_n = 5n^3$ **ג.** $a_n = 7 \cdot 5^n + 1$ **ד.** $a_n = \frac{(2n)!}{n!}$

תשובות סופיות

1. א. $a_5 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = 0$

ב. $a_5 = \frac{5}{14}, a_4 = \frac{4}{12}, a_3 = \frac{3}{8}, a_2 = \frac{2}{7}, a_1 = \frac{1}{2}$

ג. $a_5 = 3, a_4 = 0, a_3 = 1, a_2 = -1, a_1 = 1$

ד. $a_5 = -6, a_4 = -5, a_3 = -2, a_2 = 1, a_1 = 3$

2. $a_5 = 2^{65536}, a_4 = 65536, a_3 = 16, a_2 = 4, a_1 = 2$

$$3. \quad \text{א. } a_n = (-1)^{n+1}n(n+2) \quad \text{ב. } a_n = n^2 + \frac{1}{10^n} \quad \text{ג. } a_n = 2n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$4. \quad a_1, a_2, a_3 \text{ הם האיברים החיוביים היחידים בסדרה.}$$

$$6. \quad \text{א. } a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} + a_n, a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{ב. } a_{n+1} = a_n + 15n^2 + 15n + 5, a_1 = 5$$

$$\text{ג. } a_{n+1} = a_n + 28 \cdot 5^n, a_1 = 36$$

$$\text{ד. } a_{n+1} = (4n+2)a_n, a_1 = 2$$

6. סכומים חלקיים של סדרות

לכל סדרה נתונה $\{a_n\}_{n=1}^{\ell}$ (סופית או אינסופית) נגדיר סדרה חדשה $\{S_n\}_{n=1}^{\ell}$ באופן הבא

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$(6.1) \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\vdots$$

הסדרה החדשה $\{S_n\}_{n=1}^{\ell}$ נקראת **סדרת הסכומים החלקיים** של $\{a_n\}_{n=1}^{\ell}$.

דוגמא 1: חשב את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת הסכומים החלקיים של הסדרה

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ כאשר } a_n = 2n - 1$$

פתרון: על סמך ההגדרה של $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

בפרק על עקרון האינדוקציה מתמטית (דוגמא 1) נוכיח שלמעשה $S_n = n^2$ לכל n טבעי.

דוגמא 2: נתונה הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. חשב את סכומה החלקי S_4 . מצא נוסחה כללית עבור S_n .

פתרון:

$$\begin{aligned}
 S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

החישוב כאן היה קל משום שהביטוי השני של כל איבר התבטל עם הביטוי הראשון של האיבר הבא. מן המקרה המסוים הזה ניתן להבין כי אותה תופעה חוזרת על עצמה גם במקרה הכללי:

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

ולכן הנוסחה הכללית של סדרת הסכומים החלקיים היא $S_n = \frac{n}{n+1}$.

נסתכל עכשיו על התהליך ההפוך. נניח שאנו מקבלים כנתונה את סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}_{n=1}^{\ell}$, האם נוכל לשחזר באמצעותה את הסדרה המקורית $\{a_n\}_{n=1}^{\ell}$? ראשית כל ברור כי

$$a_1 = S_1$$

את האיבר השני a_2 נקבל ע"י החסרת S_1 מ- S_2

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1$$

ובאופן דומה נוכל לחשב גם את האיבר השלישי

$$a_3 = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2$$

נוכל להמשיך כך ולחשב את האיברים $a_4, a_5, \dots$ וכן הלאה. בכל המקרים שולט אותו הכלל:

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$$

ולכן קבלנו נוסחה כללית עבור כל $n > 1$,

$$(6.2) \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

דוגמא 3: סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא $S_n = n^2 + 2n$. חשב את a_{10} , ומצא את הנוסחה הכללית של a_n .

פתרון: על פי נוסחה (6.2)

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 2 \cdot 10) - (9^2 + 2 \cdot 9) = 21$$

$$n > 1, \text{ ובאופן כללי, } a_1 = S_1 = 3$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2n) - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n + 1$$

כלומר, נוסחת האיבר הכללי של הסדרה המקורית היא $a_n = 2n + 1$.

נזכיר כי סדרה $a_1, a_2, \dots, a_m$ נקראת חשבונית אם

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_m - a_{m-1} = d$$

כאשר המספר d הוא ההפרש הקבוע של הסדרה. מעובדה זו נובע כי נוסחת האיבר הכללי היא

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (1 \leq n \leq m)$$

נוסחת הסכומים החלקיים היא

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}, \quad (1 \leq n \leq m)$$

כמו כן, נזכיר כי סדרת מספרים $a_1, a_2, \dots, a_m$ שונים מאפס נקראת הנדסית אם

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_m}{a_{m-1}} = q$$

כאשר המספר q נקרא המנה הקבועה של הסדרה. נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית היא

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (1 \leq n \leq m)$$

ונוסחת הסכומים החלקיים היא

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1, 1 \leq n \leq m)$$

תרגילים

1. נוסחת הסכומים החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הם $S_n = n^2 + 3n$. הראה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חשבונית, ומצא את נוסחת האיבר הכללי שלה.
2. ידוע כי נוסחת הסכום החלקי של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא $S_n = 5n - 2n^2$. חשב את a_{10} .
3. הוכח כי נוסחת הסכומים החלקיים של הסדרה $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$ היא $S_n = \frac{2n}{4n + 2}$.
4. ידוע כי $S_n = n^3 + n$ ו- $a_n = 62$. מצא את n .
5. ידוע כי $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$. חשב את a_1, a_2, a_5 , ואת a_n .

תשובות סופיות

1. $a_n = 8n - 4$
2. $a_{10} = -33$
4. $n = 5$
5. $a_n = \frac{1}{4n^2 - 2n}, a_5 = \frac{1}{90}, a_2 = \frac{1}{12}, a_1 = \frac{1}{2}$

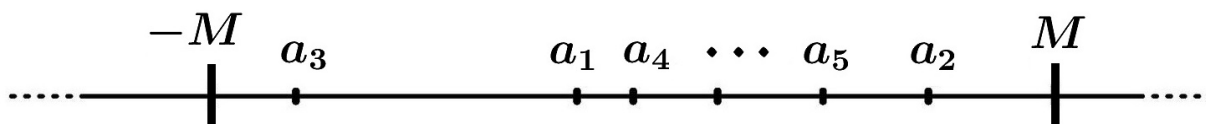
7. סדרות חסומות וסדרות מונוטוניות

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר ממשי M כזה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$. למספר M נקרא **חסם מלעיל** של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים מספר ממשי m כזה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq m$. למספר m נקרא **חסם מלרע** של הסדרה.

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה. באופן שקול: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם קיים מספר M כזה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$, או באופן שקול

$$-M \leq a_n \leq M$$

ולכן $-M$ חוסם את הסדרה מלמטה, ו- M חוסם את הסדרה מלמעלה, ולכן הסדרה חסומה.



איור 7: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה על ידי M , ומלמטה על ידי $-M$

דוגמא 1: הוכח כי הסדרה $a_n = 9n^2 + \frac{1}{n^2}$ חסומה מלמטה ע"י $M = 6$. כלומר, לכל n טבעי $a_n \geq 6$.

הוכחה: נסתמך על אי-שוויון הממוצעים (ראה דוגמא 6) אשר טוען שלכל $x, y > 0$ מתקיים

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

ולכן

$$\frac{9n^2 + \frac{1}{n^2}}{2} \geq \sqrt{9n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \sqrt{9} = 3$$

מכאן ש- $9n^2 + \frac{1}{n^2} \geq 6$ לכל n טבעי.

דוגמא 2: הוכח כי הסדרה $a_n = 9n^2 + \frac{1}{n^2}$ אינה חסומה מלמעלה.

הוכחה: הסדרה a_n חסומה מלמעלה ע"י M אם לכל n , $a_n \leq M$. לכן, בכדי להראות שהסדרה a_n אינה חסומה מלמעלה, נוכיח שעבור כל חסם אפשרי M , ישנו n כך ש- $a_n > M$. יהי M מועמד כלשהוא להיות חסם. נבחר מספר טבעי גדול כך ש- $n > M$. אזי $n^2 > M$, ולכן $9n^2 > M$, ולכן גם $9n^2 + \frac{1}{n^2} > M$. קבלנו, אם כן, ש- $a_n > M$. לכן שום M אינו יכול להיות חסם מלעיל של הסדרה, ועל כן הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

דוגמא 3: הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+7}$ חסומה.

הוכחה: נזכיר כי על פי ההגדרה, עלינו להראות שני דברים:

א. הסדרה חסומה מלמטה.

ב. הסדרה חסומה מלמעלה.

לגבי א' ברור שהסדרה חסומה מלמטה ע"י $m = 0$ (הרי כל איבר בסדרה חיובי, כלומר $a_n > 0$ לכל n). לגבי ב', הסדרה חסומה מלמעלה ע"י $M = \frac{6}{5}$, כי לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 7} < \frac{3n^2 + 2n^2 + n^2}{5n^2} = \frac{6n^2}{5n^2} = \frac{6}{5}$$

לסיכום קבלנו, שלכל n טבעי, $0 < a_n < \frac{6}{5}$.

דוגמא 4: הוכח כי הסדרה ההנדסית $a_n = 5 \cdot (\frac{1}{2})^{n+3}$ חסומה.

הוכחה: ברור כי לכל n טבעי, $0 < (\frac{1}{2})^{n+3} < 1$, ולכן $0 < a_n < 5$.

הערה: באופן כללי, אם $|q| \leq 1$ אזי לכל n טבעי $|q^{n-1}| \leq 1$, ולכן לכל a ממשי $|aq^{n-1}| \leq |a|$, ולכן כל סדרה הנדסית בעלת מנה קבועה q , המקיימת $|q| \leq 1$, היא

חסומה (על ידי $|a|$). $(M = |a|)$.

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל n , $a_n \leq a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא **מונוטונית עולה ממש** אם לכל n , $a_n < a_{n+1}$. הסדרה נקראת **מונוטונית יורדת** אם לכל n , $a_n \geq a_{n+1}$. הסדרה נקראת **מונוטונית יורדת ממש** אם לכל n , $a_n > a_{n+1}$. נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

דוגמא 5:

- א. הסדרה $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ממש כי לכל n טבעי מתקיים $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 ב. הסדרה $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש כי לכל n טבעי, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, ולכן

$$2 - \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

- ג. הסדרה $a_n = n!$ היא מונוטונית עולה ממש מאחר ו-

$$a_{n+1} = (n+1)! = (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot a_n > a_n$$

ולכן $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי.

תרגילים

1. בדוק אם הסדרות הבאות חסומות מלמעלה, חסומות מלמטה, או חסומות.

א. $a_n = 3 + (-1)^n$
 ב. $a_n = \frac{3n}{n^2 + 10}$

א. $a_n = n^2 - 15n$
 ב. $a_n = \frac{3^n}{5n^2}$

2. בדוק את המונוטוניות של כל אחת מן הסדרות הבאות.

א. $a_n = \frac{3^n}{5n^2}$
 ב. $a_n = 7n - 4$

א. $a_n = n^2 - 7n$
 ב. $a_n = 5 + (-2)^n$

תשובות סופיות

1. א. חסומה כי $2 \leq a_n \leq 4$ ב. חסומה כי $0 < a_n < 3$
 ג. חסומה מלמטה כי $a_n > -56.25$ ד. חסומה מלמטה כי $a_n > 0$
 2. א. עולה ב. עולה ג. לא מונוטונית ד. לא מונוטונית

8. עקרון האינדוקציה המתמטית

טענות רבות במתמטיקה קשורות בצורה מהותית למספרים טבעיים. נביא מספר דוגמאות שמדגימות עובדה זו:

א. לכל מספר טבעי n , $7^n - 4^n$ מתחלק ב-3.

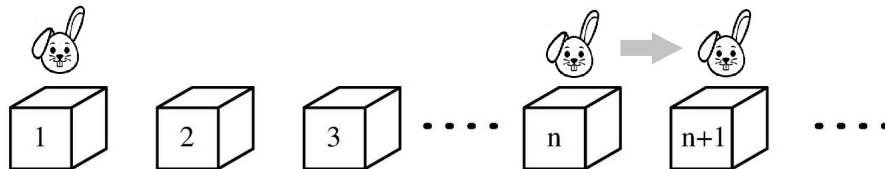
ב. לכל מספר טבעי n , $4n + 1 < 3^{2n}$.

ג. לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

כל אחת מן הטענות הללו שקולה למעשה לרשימה אינסופית של טענות פשוטות יותר. נסתכל למשל על טענה ג'. בטענה זו כלולים למעשה אינסוף טענות פשוטות יותר

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x, \quad (1+x)^2 \geq 1 + 2x, \quad (1+x)^3 \geq 1 + 3x, \quad \dots$$

נוכל לנסות להוכיח כל אחת מהן בנפרד, אבל כמובן לא נוכל לסיים להוכיח את כולן בדרך זו, מאחר ומספרן הוא אינסופי. לכן דרושה שיטת הוכחה שתאפשר את הוכחת את כל הטענות הללו בבת אחת. שיטת הוכחה כזו אומנם קיימת ומבוססת על עקרון האינדוקציה המתמטית. לפני שנביא ניסוח מדויק של עקרון האינדוקציה המתמטית, ננסה להמחיש אותו באמצעות דוגמא ציורית פשוטה. נניח שמונחת לפנינו סדרה אינסופית של קופסאות כאשר כל קופסא עשויה להכיל בתוכה ארנבת או להיות ריקה.



איור 8: סדרה אינסופית של קופסאות. כל קופסא עשויה להכיל או לא להכיל ארנבת.

נניח שידועים לנו בודאות גמורה שני הנתונים הבאים:

1. אם קופסא n מכילה בתוכה ארנבת אז גם קופסא $n + 1$ מכילה בתוכה ארנבת.

2. קופסא 1 מכילה בתוכה ארנבת.

אזי נוכל להסיק בודאות מלאה שכל קופסא בסדרה מכילה בתוכה ארנבת, מבלי שנצטרך לפתוח אף קופסא בכדי להוכיח בכך. זוהי בעצם התמצית של עקרון האינדוקציה המתמטית. סדרת הקופסאות בדוגמא זו מייצגת את סדרת המספרים הטבעיים, והמצאותה או אי המצאותה של ארנבת בתוך קופסא מייצגת את קיומה או אי-קיומה של תכונה נתונה ע"י המספר הטבעי המתאים. נביא ניסוח מדויק של עקרון האינדוקציה המתמטית:

8.1 עקרון האינדוקציה המתמטית

תהי T_n טענה מתמטית אודות המספר הטבעי n , ונניח כי מתקיימים שני התנאים הבאים:
א. הטענה T_1 נכונה.

ב. לכל מספר טבעי k , נכונותה של הטענה T_k גוררת את נכונות הטענה T_{k+1} .

אזי משני נתונים אלה נובע כי הטענה T_n נכונה עבור כל מספר טבעי n .

דוגמא 1: הוכח כי לכל מספר טבעי n מתקיים השוויון הבא

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

הוכחה: לכל n נסמן טענה זו ע"י T_n ונוכיח את שני התנאים הדרושים בעקרון האינדוקציה המתמטית

א. הטענה T_1 היא $1 = 1$, ולכן היא נכונה באופן ברור.

ב. נניח שהטענה T_k נכונה עבור k טבעי כלשהו. נוכיח שעובדה זו גוררת את נכונותה של הטענה T_{k+1} . נרשום את הטענה T_k :

$$T_k : 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

נוסיף $2k + 1$ לשני האגפים ונקבל

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

השוויון האחרון הוא למעשה הטענה T_{k+1} , ולכן היא נכונה. מכאן על פי עקרון האינדוקציה נקבל שהטענה T_n נכונה עבור כל מספר טבעי n . ■

דוגמא 2: הוכח את אי-השוויון של ברנולי: לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $x \geq -1$ מתקיים

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

הוכחה: עבור $n = 1$ נקבל את הטענה $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ שהיא נכונה באופן ברור. נניח כי הטענה נכונה עבור $n = k$ כלשהו:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx$$

נוכיח את נכונותה עבור $n = k + 1$. לשם כך נכפיל את שני אגפי אי-השוויון האחרון בביטוי $x + 1$. על פי הנתון, $x \geq -1$, כלומר $x + 1 \geq 0$, ולכן סימן אי-השוויון נשאר

במקומו

$$(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

קבלנו לכן ש- $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, כלומר הטענה נכונה גם עבור $n = k+1$.
לכן, על פי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה עבור כל מספר טבעי n . ■

דוגמא 3: נתונות שתי הסדרות הבאות

$$a_n = 1 + 2^n \quad \text{א.}$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = 2b_n - 1 \quad \text{ב. (נוסחת נסיגה).}$$

הוכח כי לכל מספר טבעי n מתקיים $a_n = b_n$.

הוכחה: עבור $n = 1$ חישוב ישיר של a_1 נתון $a_1 = 3$. נתון ש- $b_1 = 3$. לכן הטענה $a_1 = b_1$ נכונה באופן ברור. נניח כי הטענה נכונה עבור $n = k$ כלשהו: $a_k = b_k$. נוכיח כי היא נכונה גם עבור $n = k+1$:

$$b_{k+1} = 2b_k - 1 = 2a_k - 1 = 2(1 + 2^k) - 1 = 2 + 2^{k+1} - 1 = 1 + 2^{k+1} = a_{k+1}$$

ולכן $a_{k+1} = b_{k+1}$. מעקרון האינדוקציה המתמטית נובע כי $a_n = b_n$ לכל n טבעי. ■

דוגמא 4: נגדיר את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

הוכח כי:

א. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה ע"י $M = 2$.

ב. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש.

הוכחה:

א. עלינו להראות שלכל n , $a_n < 2$. עבור $n = 1$ נתון ש- $a_1 = \sqrt{2}$ ולכן ברור כי $a_1 < 2$. נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר $a_k < 2$. נוכיח מכאן נובע ש- $a_{k+1} < 2$:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

ואם כך קבלנו $a_{k+1} < 2$, ולכן מעקרון האינדוקציה יוצא שלכל n , $a_n < 2$.

ב. כאן עלינו להראות שלכל n , $a_n < a_{n+1}$. עבור $n = 1$ זה ברור כי $a_1 = \sqrt{2}$ ו- $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, וברור ש- $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. עכשיו נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ כלשהו, כלומר: $a_k < a_{k+1}$. נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $n = k+1$, כלומר

$$a_{k+1} < a_{k+2}$$

$$a_{k+2} = \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{2 + a_k} = a_{k+1}$$

לכן קבלנו ש- $a_{k+1} < a_{k+2}$, ומעקרון האינדוקציה נובע אם כך ש- $a_n < a_{n+1}$ לכל n , ולכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש. ■

תרגילים

1. רשום את שלשת האיברים הראשונים של הסדרה $a_n = \frac{1}{n^2}$. הוכח כי הסדרה מונוטונית יורדת ממש וחסומה מלמטה ע"י 0.

2. נגדיר את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = 6$.
 א. חשב את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי הסדרה אינה חסומה מלמעלה.
 ג. הוכח כי כל איבר בסדרה מתחלק ב-3.

3. נגדיר את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + 2n$, $a_1 = 4$, ונגדיר את הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י $b_n = n^2 - n + 4$. הוכח כי לכל n מתקיים $a_n = b_n$.

4. סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{4n-1}$$

מצא את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

5. באמצעות עקרון האינדוקציה המתמטית הוכח שלכל n טבעי:

א. $n^3 - n$ מתחלק ב-3.

ב. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ג. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

ד. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

ה. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

9. שימוש בסימנים לוגיים

סימנים לוגיים מאפשרים במקרים רבים לנסח טענות מתמטיות בצורה קצרה, ברורה, ונוחה לטיפול. בתורת ההגיון (לוגיקה) מבחינים בין שני סוגי טענות: טענות אמת וטענות שקר. נביא מספר דוגמאות של טענות:

א. " $5 < 3$ ".

ב. "למשוואה $\sin x + \cos x = 7$ אין שום פתרון".

ג. "אם יש עננים אז יורד גשם".

ד. "אם $x > 2$ אז $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ".

מובן מאליו כי הטענות ב' ו-ד' הן טענות אמת, ואילו הטענות א' ו-ג' הן טענות שקריות. עכשיו נעבור לתאור של הסימנים הלוגיים המשמשים לבניית טענות מתמטיות.

9.1 סימן הגרירה הלוגית " $\Rightarrow$ " וסימן השקילות הלוגית " $\Leftrightarrow$ "

הסימן הלוגי השכיח ביותר הוא סימן הגרירה הלוגית " $\Rightarrow$ ". אם T_1 ו- T_2 הן שתי טענות נתונות אז באמצעות סימן הגרירה הלוגית נוכל לבנות טענה שלישית ע"י

$$T_1 \Rightarrow T_2$$

שמשמעותה היא: אם הטענה T_1 נכונה אז גם הטענה T_2 נכונה. טענה זו עשויה להיות אמיתית או שקרית באופן שתלוי בטענות T_1 ו- T_2 .

דוגמא 1: הטענה $x > 2$ גוררת את הטענה $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ולכן נוכל לרשום בצורה יותר קצרה

$$x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$

ברור כי טענה זו אמיתית. הגרירה בכוון ההפוך, לעומת זאת, אינה אמיתית

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow x > 2$$

משום שאם, למשל, נבחר $x = -1$ אז הטענה $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ אמיתית, אבל הטענה $x > 2$ היא שקרית. לכן במקרה מסוג זה מקובל לרשום:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \not\Rightarrow x > 2$$

אם $T_1 \Rightarrow T_2$ ו- $T_2 \Rightarrow T_1$ הן שתי טענות אמת, אז נרשום את שניהן יחדיו בקצרה

ע"י טענה אחת:

$$T_1 \iff T_2$$

ונאמר שהטענה T_1 שקולה לטענה T_2 . הסימן " $\iff$ " הוא סימן השקילות הלוגית. בשפת הדיבור הרגילה, טענות מתמטיות מסוג זה נרשמות לרוב במשפטים כגון:

$$x - y = 0 \quad \text{אם ורק אם} \quad x = y$$

כאשר הביטוי "אם ורק אם" זהה למעשה עם סימן השקילות " $\iff$ ".

9.2 סימן השלילה הלוגית " $\neg$ "

אם T היא טענה מתמטית אז $\neg T$ היא הטענה המתמטית השוללת את T .

דוגמא 2:

- א. אם T מסמן את טענת האמת $2 + 2 = 4$ אז $\neg T$ מסמן את טענת השקר $2 + 2 \neq 4$.
 ב. אם T מסמן את טענת השקר $1 + x^2 \leq 0$ אז $\neg T$ מסמן את טענת האמת $1 + x^2 > 0$.
 טענות רבות במתמטיקה הן טענות שלילה גם אם זה לא נראה כך. למשל הטענה $x \neq 3$ אינה אלא קיצור של הטענה $\neg(x = 3)$.

9.3 הסימנים: און, וגם ($\wedge, \vee$)

מלבד שלשת הקשרים הלוגיים $\implies$, $\iff$, ו- $\neg$ ישנם עוד שני קשרים נפוצים: $\wedge$, $\vee$. אם T_1 ו- T_2 הן שתי טענות, אז משמעות הטענה $T_1 \wedge T_2$ היא " T_1 וגם T_2 ". במילים אחרות: הטענה $T_1 \wedge T_2$ היא טענת אמת אם ורק אם T_1 טענת אמת וגם T_2 טענת אמת. משמעות הטענה $T_1 \vee T_2$ לעומת זאת היא: " T_1 או T_2 ". במילים אחרות: הטענה $T_1 \vee T_2$ היא טענת אמת אם ורק אם T_1 טענת אמת או T_2 טענת אמת. נציין שהאפשרות ששתי הטענות T_1 ו- T_2 יהיו טענות אמת אינה נפסלת. כלומר הטענה $T_1 \vee T_2$ היא טענת אמת במידה ולפחות אחת מן הטענות T_1, T_2 היא טענת אמת.

דוגמא 3:

- א. הטענה $x \leq 5$ אינה אלא קיצור של הטענה $x < 5 \vee x = 5$. באופן פורמלי, נוכל לרשום:

$$x \leq 5 \iff (x < 5 \vee x = 5)$$

ובאותו אופן, הטענה $a \geq b$ היא קיצור של הטענה $a > b \vee a = b$.

- ב. הטענה המתמטית $3 < x < 8$ היא קיצור של הטענה $3 < x \wedge x < 8$. כלומר, הטענה $3 < x < 8$ היא טענת אמת אך ורק אם שתי הטענות $3 < x$ וגם $x < 8$ הן

טענות אמת. פורמלית, נרשום:

$$3 < x < 8 \iff (3 < x \wedge x < 8)$$

ג. באופן דומה, הטענה $a = b = c$ אינה אלא קיצור של הטענה $a = b \wedge b = c$.

ד. הטענה $x < 5 \vee x = 5 \vee x > 5$ היא טענת אמת לכל ערך של x .

ה. $|x| = 3 \iff (x = -3 \vee x = 3)$

ו. $|x| \neq 3 \iff (x \neq -3 \wedge x \neq 3)$

9.4 כללים לוגיים

בכדי לגזור טענות חדשות מטענות ישנות אנו זקוקים לכללים המאפשרים לנו לעשות זאת. כל ענף מתמטי מתחיל במספר קטן של הנחות יסוד (למשל הגאומטריה האוקלידית מתחילה עם מספר קטן של אקסיומות), ומתקדם ע"י תהליך של גזירת טענות יותר ויותר מורכבות מהנחות היסוד באמצעות כללים לוגיים. את מרבית הכללים האלה אנו מכירים באופן אינטואיטיבי, ואף משתמשים בהם רבות מבלי להיות מודעים לכך. לא נוכל במסגרתו של ספר זה להביא רשימה מלאה, אך נביא מספר קטן של כללים לוגיים טיפוסיים העשויים לסייע לקורא בהבנת הוכחות מתמטיות רבות המשתמשות בהן:

1. אם $T_1 \implies T_2$ וגם T_1 היא טענת אמת, אזי T_2 היא טענת אמת.

2. אם $T_1 \implies T_2$ היא טענת אמת ו- T_2 היא טענת שקר אזי T_1 היא טענת שקר. בצורה יותר קצרה, נוכל לרשום זאת כך

$$[(T_1 \implies T_2) \wedge \neg T_2] \implies \neg T_1$$

3. אם $T_1 \implies T_2$ ו- $T_2 \implies T_3$ הן טענות אמת אז $T_1 \implies T_3$ היא טענת אמת.

4. הטענה $T_1 \implies T_2$ שקולה לטענה $\neg T_2 \implies \neg T_1$.

נשאיר לקורא להתבונן בכללים אלה ולהשתכנע באמיתותם, אך נביא מספר דוגמאות לשימוש בהן.

דוגמא 4:

א. הטענה $x^2 > 9 \implies x > 3$ היא טענת אמת ולכן על פי כלל 4 גם הטענה

$\neg(x^2 > 9) \implies \neg(x > 3)$ היא טענת אמת. ברור שאת הטענה האחרונה אפשר

לרשום גם כך: $x^2 \leq 9 \implies x \leq 3$.

ב. הטענה "יש עננים" $\Rightarrow$ "יורד גשם" היא טענת אמת ולכן מכלל 4 נובע שהטענה

"לא יורד גשם" $\Rightarrow$ "אין עננים"

גם היא טענת אמת.

ג. הטענות $x^4 > 81 \Rightarrow x > 3$ ו- $x^4 > 81 \Rightarrow x^4 - 1 > 80$ הן טענות אמת, ולכן מכלל 3 יוצא שגם הטענה $x > 3 \Rightarrow x^4 - 1 > 80$ היא טענת אמת.

חשיבות רבה יש לכלל 4 מאחר וכל ההוכחות המתמטיות על דרך השלילה מבוססות עליו. למשפטים מתמטיים רבים יש את הצורה הבאה: "אם T_1 אז T_2 ". בכדי להוכיח משפטים מסוג זה, משתמשים לעתים בשיטת ההוכחה על דרך השלילה: מניחים שהטענה T_2 אינה נכונה ומוכיחים שהנחה זו גוררת שגם הטענה T_1 אינה נכונה. כלומר, מוכיחים למעשה שהטענה $\neg T_1 \Rightarrow \neg T_2$ נכונה. לכן מכלל 4 נובע שגם הטענה $T_1 \Rightarrow T_2$ נכונה.

דוגמא 5: הוכח על דרך השלילה את הטענה

$$x > 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}$$

הוכחה: יהי $x > 1$, ונניח בשלילה שהטענה $\frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}$ אינה נכונה, כלומר, נניח שהטענה $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}$ נכונה. נכפיל את שני האגפים בביטוי החיובי $2(1+x^2)$ ונקבל $2x \geq 1+x^2$, ולכן $0 \geq 1-2x+x^2$. ע"י ההצבה $a = 1$ ו- $b = x$ בנוסחה

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

נקבל $0 \geq (1-x)^2$. מאחר ותמיד נכון ש- $0 \leq (1-x)^2$, נקבל שבהכרח $0 = (1-x)^2$. לכן $1-x=0$ בהכרח, ולכן $x=1$, בסתירה להנחה ש- $x > 1$. מכאן נובע שהטענה $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}$ אינה נכונה. כלומר הטענה $\frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}$ נכונה כנדרש. ■

ניתן להבין את מה שעשינו בהוכחה הקודמת גם באופן הבא: נסמן את הטענה $x > 1$ ע"י T_1 , ואת הטענה $\frac{x}{1+x^2} < \frac{1}{2}$ ע"י T_2 . יצאנו מן ההנחה $\neg T_2$ והגענו לתוצאה $\neg T_1$. כלומר הוכחנו את הטענה $\neg T_1 \Rightarrow \neg T_2$. מאחר ועל פי כלל 4 טענה זו שקולה לטענה $T_1 \Rightarrow T_2$, לכן גם הטענה האחרונה נכונה, ולכן הוכחנו את מה שנדרש.

9.5 כמתים לוגיים

בפסוקים מתמטיים רבים מופיעים הביטויים: "לכל x ...", או "קיים x כך ש...".

דוגמא 6:

- א. "לכל מספר טבעי n , $n^3 - n$ מתחלק ב-3",
 או באופן שקול: לכל מספר טבעי n קיים מספר טבעי k כך ש- $n^3 - n = 3k$.
 ב. "קיים x כך ש- $x^2 = x + 1$ ".
 ג. "קיימת פונקציה $f(x)$ כך שלכל x , $f'(x) = f(x)$ ".
 ד. לכל מספר ממשי x : $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$.
 הביטויים "לכל" ו- "קיים" נקראים **כמתים לוגיים**. את הכמת "לכל" נסמן ע"י $\forall$, ואת הכמת "קיים" נסמן ע"י $\exists$. הם מאפשרים לנו לרשום טענות מתמטיות בצורה קצרה יותר ונוחה לטיפול. למשל את הטענות שבדוגמא 6 נוכל לרשום גם באופן הבא:

$$\text{א. } \forall n \exists k : n^3 - n = 3k$$

$$\text{ב. } \exists x : x^2 = x + 1$$

$$\text{ג. } \exists f(x) \forall x : f'(x) = f(x)$$

$$\text{ד. } \forall x : \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

דוגמא 7: רשום בצורה פורמלית את הטענה: "לכל x קיים y כך ש- $x + y = 0$ ".

פתרון: $\forall x \exists y : x + y = 0$

הערה: לסדר שבו מופיעים הכמתים יש חשיבות! למשל הטענה המתמטית

$$\forall x \exists y : x + y = 0$$

שונה לגמרי מן הטענה

$$\exists y \forall x : x + y = 0$$

הטענה הראשונה נכונה באופן ברור, ואילו הטענה השנייה שקרית באופן ברור.

תרגילים

1. לפניך טענות מהצורה $T_1 \Rightarrow T_2$. נסח אותן במילים, ורשום אותן גם בצורה השקולה $\neg T_2 \Rightarrow \neg T_1$.
 א. $x^2 + y^6 = 0 \Rightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$
 ב. n^3 מתחלק ב-8 $\Rightarrow n$ מספר טבעי זוגי
 ג. $a < b \Rightarrow a < b + 1$

2. נסח כל אחת מן הטענות הבאות במילים ובדוק אם הן נכונות או שקריות.
 א. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{z}$
 ב. $\forall x > 2 \exists y < 0 : x + y < -100$

$$\text{ג. } \forall x \exists y : xy^2 < 10 \quad \text{ד. } \forall y \exists x : xy^2 < 10$$

3. רשום כל אחת מן הטענות הבאות באמצעות סימנים לוגיים.

- א. הפתרון של $x^2 - 5x + 4 = 0$ הוא $x = 1, 4$.
 ב. אי-השוויון $x^2 + 1 > 0$ מתקיים עבור כל מספר ממשי x .
 ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^2 + n$ מתחלק ב-2.
 ד. עבור כל מספר ממשי x , $|x - 2| < 5$ אם ורק אם $-3 < x < 7$.

4. תרגם את הטענה הבאה למילים: $\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists x : |x - x_0| < \varepsilon$.

תשובות סופיות

1. א. $x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^6 \neq 0$
 ב. n אי-זוגי $\Rightarrow n^3$ לא מתחלק ב-8
 ג. $a \geq b + 1 \Rightarrow a \geq b$
 2. א. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{z}$. הטענה שקרית.
 ב. לכל $x > 2$ קיים $y < 0$ כך ש- $x + y < -100$. הטענה נכונה.
 ג. לכל x קיים y כך ש- $xy^2 < 10$. הטענה נכונה.
 ד. לכל y קיים x כך ש- $xy^2 < 10$. הטענה נכונה.
 3. א. $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 4)$
 ב. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ ג. $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : n^2 + n = 2k$
 ד. $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 5 \iff -3 < x < 7$
 4. לכל x_0 ולכל $\varepsilon > 0$ קיים x כך ש- $|x - x_0| < \varepsilon$

10. מושגים יסודיים בתורת הקבוצות

בפרקים הקודמים פגשנו דוגמאות רבות של קבוצות, בעקר קבוצות של מספרים ממשיים. בפרק זה נלמד כיצד להגדיר קבוצות באופן כללי, וכיצד לבנות קבוצות חדשות מקבוצות קודמות באמצעות פעולות האיחוד, החיתוך, והחיסור. נלמד גם אודות יחסים שונים שמתקיימים בין קבוצות.

תורת הקבוצות היא ענף מתמטי חדש יחסית אשר פותח בסוף המאה ה-19, ובעקבותיו התבצע ביסוס ועריכה מחודשת של ענפים מתמטיים ותיקים יותר, ופיתוח של ענפים מתמטיים חדשים ברמת דיוק גבוהה לאין ערוך ממה שהיה מקובל קודם לכן.

תורת הקבוצת הכללית מטפלת בכל סוגי הקבוצות האפשריות. ניתן לדבר על קבוצת ילדים, קבוצת שולחנות, קבוצת מדינות, קבוצת מאורעות וכו'. קבוצות מקובל לסמן ע"י אותיות גדולות כגון A, B, C . אוסף העצמים מהם הקבוצה מורכבת נקראים **האיברים**

של הקבוצה, והם מסומנים בדרך כלל ע"י אותיות קטנות: $a, b, c, \dots$ אם a הוא עצם השייך לקבוצה A אז נאמר כי a הוא **איבר של** A ונרשום $a \in A$. אם b אינו איבר של A אז נרשום $b \notin A$.

מאחר ורוב הענפים המתמטיים הבסיסיים עוסקים במספרים, אנו נדון רק בדוגמאות של קבוצות של מספרים ממשיים. נעבור לסקירת מספר דרכים מקובלות לתאור קבוצות. את הקבוצה A אשר איבריה הם המספרים 1, 3, 5, 7 נתאר כך:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

את קבוצת כל המספרים האי-זוגיים החל מ-1 ועד ל- $n = 99$ נתאר כך:

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$$

או בצורה הבאה:

$$B = \{2k - 1 \mid k = 1, 2, 3, \dots, 50\}$$

ניתן לתאר את איברי הקבוצה גם בצורה מילולית, למשל - אם C היא קבוצת השורשים של המשוואה הריבועית $x^2 - 9 = 0$, אז נוכל לרשום

$$C = \{x \mid x^2 - 9 = 0\}$$

במקרה זה ניתן להמנע מתאור מילולי ע"י שנרשום $C = \{x \mid x^2 - 9 = 0\}$. מאחר ושורשי המשוואה הם $x = \pm 3$, נוכל לרשום פשוט $C = \{-3, 3\}$. את קבוצת כל המספרים הראשוניים P נוכל לתאר בצורה מילולית באופן הבא:

$$P = \{n \mid n \text{ מספר טבעי ראשוני}\}$$

נוכל להגדיר גם את הקבוצה הבאה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$$

ברור כי לא קיים שום מספר ממשי המקיים את התנאי $x^2 < 0$, ולכן לא קיים שום איבר השייך ל- A . במקרה זה, הקבוצה A נקראת **הקבוצה הריקה**, והיא מסומנת על ידי $\emptyset$.

נעבור לסקירה תמציתית של היחסים היסודיים שבין קבוצות.

10.1 יחס ההכלה

יהיו A ו- B שתי קבוצות כלשהן. אם כל איבר השייך לקבוצה A שייך גם לקבוצה B אז נאמר כי A היא **תת-קבוצה** של B או A היא **קבוצה חלקית** של B ונרשום $A \subseteq B$. אם $A \subseteq B$ אך A אינה זהה ל- B אז נרשום $A \subset B$ ונאמר כי A **מוכלת ממש** ב- B .

דוגמא 1:

- א. כל מספר טבעי הוא גם מספר שלם ולכן קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ היא תת-קבוצה של קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$. ברור כי שתי הקבוצות אינן שוות, ולכן נוכל לרשום בקצרה: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- ב. כל מספר שלם הוא גם מספר רציונלי ולכן קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ היא תת-קבוצה של קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$. ברור כי $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$ ולכן $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- ג. כל מספר רציונלי הוא מספר ממשי ולכן $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. מן העובדה שקיימים מספרים אי-רציונליים נובע כי $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, ולכן $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

10.2 שוויון קבוצות

שתי קבוצות A ו- B הן שוות אם יש להם בדיוק אותם האיברים, כלומר: כל איבר x השייך לקבוצה A שייך גם לקבוצה B , ולהפך: כל איבר x השייך לקבוצה B שייך גם לקבוצה A . עובדה זו ניתן לבטא גם על ידי כך שנאמר כי $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

דוגמא 2: תהי $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$ ו- $B = \{-3, 3\}$. אזי $A = B$.

10.3 איחוד וחיתוך

לכל שתי קבוצות A ו- B נגדיר קבוצה $A \cup B$ שנקראת **האיחוד של A עם B** :

$$A \cup B = \{x \mid x \in B \text{ או } x \in A\}$$

הקבוצה $A \cup B$ מכילה את כל האיברים x הנמצאים בקבוצה A או בקבוצה B . באופן דומה נגדיר את **החיתוך של A עם B** :

$$A \cap B = \{x \mid x \in B \text{ וגם } x \in A\}$$

דוגמא 3:

א. יהיו $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ו- $B = \{1, 4, 7, 10, 13\}$. אזי

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 13\}$$

$$A \cap B = \{4, 10\}$$

ב. אם $A = (-6, 5)$ ו- $B = (2, 9]$ הן קטעים, אזי

$$A \cup B = \{x \mid -6 < x \leq 9\}$$

$$A \cap B = \{x \mid 2 < x < 5\}$$

ג. אם $A = (-\infty, 5)$ ו- $B = (2, \infty)$ הן קטעים אינסופיים, אזי

$$A \cup B = \mathbb{R}$$

$$A \cap B = \{x \mid 2 < x < 5\}$$

ד. אם $A = \{1, 3, 5\}$ ו- $B = \{2, 4, 6\}$ אזי $A \cap B = \emptyset$. שתי קבוצות שהחיתוך ביניהן הוא הקבוצה הריקה נקראות **זרות**.

להלן רשימת התכונות היסודיות של קבוצות ופעולות:

א. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (חוק החילוף).

ב. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (חוק הקיבוץ).

ג. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (חוק הקיבוץ).

ד. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (חוק הפילוג).

ה. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (חוק הפילוג).

10.4 הפרש והשלמה

לכל שתי קבוצות A ו- B נגדיר קבוצה $A - B$ שנקראת **הפרש בין** A ו- B :

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

הקבוצה $A - B$ מכילה את כל האיברים x השייכים לקבוצה A אך לא לקבוצה B .

דוגמא 4:

א. אם $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ו- $B = \{1, 4, 7, 10, 13\}$, אזי

$$A - B = \{2, 6, 8\}$$

ב. אם $A = (-7, 5)$ ו- $B = (2, \infty)$ אזי $A - B = (-7, 2]$.

תהי U קבוצה כלשהיא ותהי A תת-קבוצה של U . **המשלים** של A ביחס לקבוצה U היא קבוצת כל האיברים של U אשר אינם שייכים לקבוצה A . נסמן קבוצה זו ע"י A^c או באופן ברור יותר על ידי $U - A$:

$$A^c = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

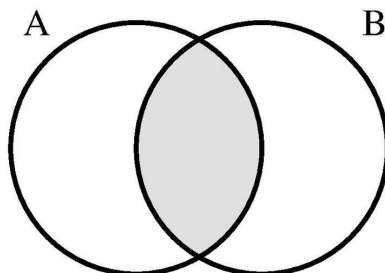
דוגמא 5:

א. אם $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$ ו- $A = \{x \mid 7 \leq x \leq 10\}$ אזי $A^c = \{x \mid 0 \leq x < 7\}$.

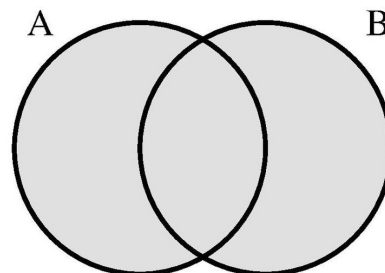
ב. אם $U = \mathbb{R}$ ו- $A = \{x \mid 5 \leq |x|\}$ אזי $A^c = \{x \mid 5 > |x|\}$.

ג. לכל קבוצה U ולכל תת-קבוצה A של U מתקיים $U - A^c = A$, או בניסוח אחר: $(A^c)^c = A$. ניתן לנמק טענה זו על ידי שימוש בדיאגרמות ואן.

מקובל להשתמש ב**דיאגרמות ואן** בכדי להמחיש באופן ציורי פעולות ויחסים בין קבוצות. להלן מספר דוגמאות פשוטות של דיאגרמות ואן עבור שלשת הפעולות הבסיסיות שהגדרנו:

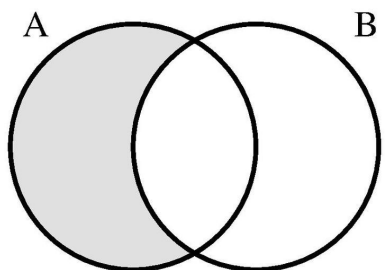


$A \cap B$

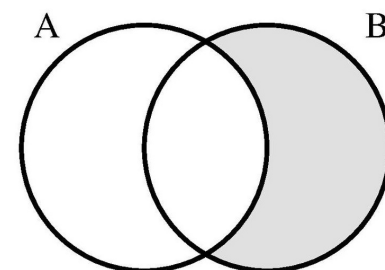


$A \cup B$

איור 9: איחוד של שתי קבוצות $A \cup B$, וחיתוך של שתי קבוצות $A \cap B$



$A - B$



$B - A$

איור 10: חיסור של שתי קבוצות

תרגילים

1. יהיו $U = \{x \mid 0 \leq x < 20\}$ ו- $B = \{x \mid 3 < x < 12\}$, $A = \{x \mid 7 \leq x \leq 20\}$. חשב את כל אחת מן הקבוצות הבאות:

א. $A \cup B$	ב. $A \cap B$	ג. A^c	ד. B^c
ה. $(A \cup B)^c$	ו. $A^c \cap B^c$	ז. $(A \cap B)^c$	ח. $A^c \cup B^c$

2. הוכח את הטענות הבאות אודות קבוצות על ידי שימוש בדיאגרמות ואן.

- א. אם $A \subseteq B$ אזי $A \cap B = A$.
- ב. אם $A \subseteq B$ אזי $A \cup B = B$.
- ג. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- ד. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- ה. אם $A \subseteq B$ אזי $A \cup B = B$.
- ו. אם $A \cap B = A$ אזי $A \subseteq B$.
- ז. אם $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq C$ אזי $A \subseteq C$.

3. נגדיר את שתי הקבוצות הבאות:

$$A = \left\{x \mid \frac{4}{1+x} > 1\right\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 3x \leq 10\}$$

מבין כל הטענות הבאות, בדוק אילו נכונות, ואילו שקריות:

א. $A \subseteq B$	ב. $B \subseteq A$	ג. $A \cap B \neq \emptyset$
ד. $A \cap B = (3, 5]$	ה. $A \cup B = [-2, 5]$	ו. $A \cup B = [-2, \infty)$
ז. $A - B = (5, \infty)$	ח. $B - A = [-2, 3]$	

תשובות סופיות

1. א. $A \cup B = \{x \mid 3 < x \leq 20\}$
 - ב. $A \cap B = \{x \mid 7 \leq x < 12\}$
 - ג. $A^c = \{x \mid 0 \leq x < 7\}$
 - ד. $B^c = \{x \mid 0 \leq x \leq 3; 12 \leq x < 20\}$
 - ה. $(A \cup B)^c = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$
 - ו. $A^c \cap B^c = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$
 - ז. $(A \cap B)^c = \{x \mid 0 \leq x < 7; 12 \leq x < 20\}$
 - ח. $A^c \cup B^c = \{x \mid 0 \leq x < 7; 12 \leq x < 20\}$
3. א. נכון ב. לא נכון ג. נכון ד. לא נכון ה. נכון ו. לא נכון ז. לא נכון ח. לא נכון

11. מושג הפונקציה

מושג הפונקציה התפתח והגיע לגיבושו המלא במשך קרוב לשלוש מאות שנה תוך קשר הדוק לשימושו הרבים בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי ובאנליזה המתמטית. היה זה אחד המושגים המתמטיים השנויים ביותר במחלוקת במאה ה-19 ולאחר גיבושו ניתן לאמר כי מושג זה הוא אחד מן המאפיינים העקריים המאפשרים לנו להבדיל בין המתמטיקה "הקלאסית" והמתמטיקה "המודרנית".

11.1 הגדרת מושג הפונקציה

תהינה A ו- B שתי קבוצות נתונות של מספרים ממשיים. יחס בין איבר משתנה x של הקבוצה A ואיבר משתנה y של הקבוצה B נקרא **יחס פונקציונלי** אם לכל x בקבוצה A קיים y יחיד בקבוצה B הנמצא ביחס הנתון עם x . השם **פונקציה** ניתן לפעולה f אשר קושרת לכל איבר x של A את האיבר היחיד y של B . את פעולת הקישור בין המשתנה x למשתנה y נסמן על ידי $y = f(x)$, ואת כל האמור לעיל נציין בקצרה על ידי הביטוי $f : A \rightarrow B$. המשתנה x נקרא **המשתנה הבלתי תלוי** של הפונקציה, והמשתנה y נקרא **המשתנה התלוי** של הפונקציה. הקבוצה A נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה, והקבוצה B נקראת **הטווח** של הפונקציה. על הפונקציה אומרים שהיא נקבעת על ידי היחס הפונקציונלי הנתון (במידה והוא מוגדר היטב). הכלל שבאמצעותו נעשה הקשר בין x ל- y נקרא לפעמים גם **חוק ההתאמה** שמגדיר את הפונקציה. שני יחסים פונקציונליים שקולים קובעים את אותה הפונקציה.

דוגמא 1: תהי $A = \{x \mid -5 \leq x \leq 8\}$, ו- $B = \{y \mid -3 \leq y \leq 10\}$. נגדיר פונקציה $f : A \rightarrow B$ על ידי חוק ההתאמה $y = |x|$. ננסה להבין אם אכן $f(x)$ מציית לכל הדרישות שמנינו לעיל:

א. לכל x בקבוצה A מתאים בדיוק איבר יחיד y בקבוצה B המקיים את היחס הפונקציונלי $y = |x|$. אם x שייך לקבוצה A אזי $-5 \leq x \leq 8$, ולכן $|x| \leq 8$, ולכן $0 \leq y = |x|$ (כי $y = |x|$), ולכן y שייך לקבוצה B . מכאן שהביטוי $y = |x|$ מגדיר יחס פונקציונלי בין הקבוצה A לקבוצה B .

ב. נציין כאן כי בהגדרת מושג הפונקציה, לא קיימת דרישה שלכל איבר y בקבוצה B יהיה קיים איבר x בקבוצה A כך ש- $y = f(x)$. אם, בדוגמא הנוכחית, נקח למשל את $y = 9$, אזי y נמצא בקבוצה B אך לא קיים שום איבר x בקבוצה A המקיים $|x| = 9$ (זה קורה רק אם $x = \pm 9$ אך $\pm 9 \notin A$).

ג. בהגדרת מושג הפונקציה קיימת הדרישה שלכל x בקבוצה A קיים בדיוק איבר יחיד y בקבוצה B כך ש- $y = f(x)$ (כמובן בדוגמא שלנו דרישה זו מתמלאת). לעומת

זאת, בהרבה מקרים ייתכן שלאיבר y בקבוצה B קיים יותר מאיבר אחד x כך ש-
 $y = f(x)$. למשל אם נקח $y = 4$ בדוגמא שלנו, אז קיים $x = 4$ וגם $x = -4$
 המקיימים $y = f(x)$. עובדה זו אינה נוגדת את הגדרת מושג הפונקציה.

ד. במקרים רבים, התחום של הפונקציה A וגם הטווח נקבעים מראש באופן שרירותי.
 למשל בדוגמא הנ"ל, יכולנו לבחור $A = B = (-\infty, \infty)$ מבלי לשנות את היחס
 הפונקציונלי $y = |x|$ (קל לראות שכל תנאי הפונקציה תקפים גם למקרה זה). אך
 מסיבות שונות, שיתבררו בהמשך, נהוג להגביל את תחום הפונקציה או את הטווח
 שלה לקבוצות יותר קטנות.

נביא עתה רשימת דוגמאות טיפוסיות של פונקציות שונות.

דוגמא 2:

א. הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = 5$, לכל x , נקראת **פונקציה קבועה**.
 נאמר שהפונקציה **שווה באופן זהותי** ל-5. באופן דומה, הפונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 המוגדרת על ידי $g(x) = 0$, לכל x , נקראת **פונקציית האפס**.

ב. הפונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(n) = \frac{n-1}{n+2}$ מגדירה למעשה סדרה
 $a_n = \frac{n-1}{n+2}$. מדוגמא זו ניתן ללמוד שמושג הסדרה שקול למעשה למושג הפונקציה
 אשר תחום ההגדרה שלה הוא קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$.

ג. הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x$ נקראת **פונקציית הזהות**, מאחר
 והיא מתאימה לכל x ממשי את עצמו.

ד. הנוסחה $f(x) = \sqrt{x}$ אינה מגדירה פונקציה $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ משום שלא לכל x רציונלי
 $\sqrt{x}$ רציונלי. אם נקח למשל $x = 2$ אז $2 \in \mathbb{Q}$ אך $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. בעייה יותר חריפה
 תתעורר אם נבחר למשל $x = -1$. אך אם נגדיר $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ אז במקרה זה
 היחס הפונקציונלי $y = \sqrt{x}$ מגדיר פונקציה.

11.2 דרכים להגדרת פונקציה

בכדי להגדיר פונקציה בצורה שלמה ומדויקת יש לציין תמיד את שלושת הדברים הבאים:

א. את תחום ההגדרה A של הפונקציה;

ב. את הטווח B של הפונקציה;

ג. את היחס הפונקציונלי $y = f(x)$ ("חוק ההתאמה").

מלבד שלושת הדברים הללו, יש כמובן לוודא כי חוק ההתאמה מוגדר היטב עבור כל איבר
 x של התחום A , ושהוא מתאים לאיבר x איבר יחיד y בטווח B .

בדרך כלל הקבוצות A ו- B הם קטעים סופיים או אינסופיים המוגדרים באופן רגיל, כפי
 שלמדנו בפרקים הקודמים. את חוק ההתאמה, לעומת זאת, ניתן להגדיר בדרכים רבות
 ומגוונות. נסקור כמה מן הדרכים המקובלות לעשות זאת:

11.3 הגדרה על ידי נוסחה מפורשת

הדרך הכי שכיחה להגדיר את היחס הפונקציונלי $y = f(x)$ היא על ידי נוסחה מתמטית כמו $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ או $f(x) = (1+|x|)(5-3|x|)$. נציין כי הנוסחה המגדירה את היחס הפונקציונלי עשויה להיות פשוטה או מורכבת מאוד. למשל, ניתן להשתמש בפעולות אלגבריות יותר מסובכות מן הפעולות החשבוניות הרגילות, אם הן הוגדרו מראש בצורה מדויקת.

11.4 הגדרה לפי מקרים

לפעמים מגדירים פונקציה על ידי שימוש ביותר מנוסחה אחת באופן שקשור למשתנה x . למשל נוכל להגדיר $f(x) = 1 + x^2$ במקרה ש- $x < 0$ ו- $f(x) = 3x + 1$ במקרה ש- $x \geq 0$, ובכך נקבל פונקציה אחת $y = f(x)$ המוגדרת לכל x ממשי. בצורה קצרה, נוהגים לרשום הגדרה זאת כך:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 0 \\ 3x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

לפעמים משתמשים בשלושה נוסחאות ומעלה בכדי להגדיר פונקציה בשיטה זו.

11.5 הגדרה על ידי אלגוריתם

סוג זה של הגדרת יחס פונקציונלי שכיח מאוד במדעי המחשב, והקורא אשר ימשיך את לימודיו במסגרת זו בודאי יפגוש בכמה הגדרות שונות ומפורטות לסוג זה של הגדרת פונקציה. באופן כללי, אלגוריתם עבור פונקציה מורכב ממספר סופי של הוראות פעולה ברורות אשר באמצעותן ניתן לחשב בזמן סופי (למשל על ידי מחשב) לכל ערך x בתחום ההגדרה A את הערך y . למשל, נגדיר את הפונקציה $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

1. אם $0 \leq x < 1$ אז $f(x) = x^2$ וסיים.

2. אם $x = 1$ אז $f(x) = 1$ וסיים.

3. אם $1 < x \leq 2$ אז החלף את הערך של x ב- $\frac{4x}{5}$ ועבור לכלל 1.

קל לראות שעבור כל ערך $0 \leq x \leq 2$ מתקבל הערך $f(x)$ לאחר סדרה סופית של שימוש בהוראות הנ"ל, ולכן האלגוריתם מגדיר את הפונקציה $f(x)$ היטב. למשל, אם נקח $x = 1.8$ אז נעבור להוראה 3 ונקבל $x = 1.44$, נעבור שוב להוראה 3 ונקבל $x = 1.152$, נעבור שוב להוראה 3 ונקבל $x = 0.9216$, ואז עלינו לעבור להוראה 1 ונקבל $f(1.8) = 0.8493$, וסיימנו. לכן, בסיכומו של דבר קבלנו כי $f(1.8) = 0.8493$.

11.6 הגדרה על ידי טבלת ערכים

x	y
-2	19
-1	7
0	12
1	-6
2	7
3	1

איור 11: טבלת ערכים

במסגרת של ניסויים מדעיים פשוטים, או במסגרת של עבודה שוטפת של איסוף נתונים של מדידות שונות או נתונים סטטיסטיים, מקובל לתאר יחס פונקציונלי באמצעות טבלת ערכים כמו זו שרואים בציור 11. בטבלה כזו מופיעים בדרך כלל קבוצה סופית של ערכי המשתנה x , כשלכל ערך x מותאם הערך y של הפונקציה לצידו (x יכול להיות למשל זמן, ו- y טמפרטורה). אך יש לציין שטבלאות מכילות תמיד כמות סופית של אינפורמציה (בניגוד לנוסחה מתמטית למשל), ולכן טבלה איננה, בדרך כלל, דרך טובה לתאר פונקציה מסובכת.

11.7 תחום הגדרה טבעי

מן הדוגמאות שראינו עד כה, ברור כי אין קשר הכרחי בין היחס הפונקציונלי $y = f(x)$ ובין התחום A של הפונקציה. למשל, נוכל להגדיר פונקציה אחת $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = \sqrt{x+10}$, ופונקציה שנייה $g : [-6, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $g(x) = \sqrt{x+10}$. בשני המקרים היחס הפונקציונלי זהה: $y = \sqrt{x+10}$, וההבדל הוא רק בתחום ההגדרה A . התחום A הגדול ביותר אשר עבורו יחס פונקציונלי נתון $y = f(x)$ מוגדר נקרא **תחום ההגדרה הטבעי** של $f(x)$. למשל $A = [-10, \infty)$ הוא תחום ההגדרה הטבעי של היחס הפונקציונלי $y = \sqrt{x+10}$.

לעיתים קרובות מאוד (בספר זה או בספרי לימוד אחרים), נוהגים לציין את היחס הפונקציונלי מבלי לציין את התחום או הטווח של הפונקציה. במקרים כאלה הכוונה היא לרוב לתחום ההגדרה הטבעי, והטווח הטבעי הוא $\mathbb{R}$. מכאן ואילך, בכל פעם שלא נציין במפורש את תחום ההגדרה או את הטווח של פונקציה נתונה, תמיד נתכוון לתחום ההגדרה הטבעי ולטווח הטבעי.

דוגמא 3: מצא את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

פתרון: $f(x)$ מוגדרת עבור $x \neq \pm 1$ ולכן תחום ההגדרה הטבעי של $f(x)$ הוא

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, \quad x \neq -1\}$$

כמובן, הטווח הטבעי של הפונקציה הוא $B = \mathbb{R}$.

דוגמא 4: מצא את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה $f(x) = \log_{10} x + \log_{10}(5-x)$.
פתרון: הביטוי $\log_{10} x$ מוגדר רק עבור $x > 0$, והביטוי $\log_{10}(5-x)$ מוגדר רק כאשר $5-x > 0$, ולכן $f(x)$ מוגדרת רק אם $0 < x < 5$. מכאן שתחום ההגדרה הטבעי של $f(x)$ הוא הקטע הפתוח $A = (0, 5)$.

11.8 תמונה של פונקציה

בדוגמא 1.ב' ראינו שלא לכל y בטווח של הפונקציה קיים בהכרח x כך ש- $y = f(x)$. במובן זה, במקרים רבים הטווח של הפונקציה מכיל מספרים "מיותרים". אם נצמצם את הטווח רק לערכים y עבורם קיים x כך ש- $y = f(x)$, נקבל קבוצה חדשה שנקרא **התמונה** של $f(x)$. בצורה פורמלית: תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה נתונה. הקבוצה

$$\text{image}(f) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

היא התמונה של $f(x)$, והיא מסומנת לפעמים גם ע"י $f[A]$. הסימון $\text{image}(f)$ מקורו במילה image (שפירושה "תמונה" באנגלית). אין לבלבל בין הטווח של הפונקציה ובין התמונה של הפונקציה. ברוב המקרים הטווח של הפונקציה הוא "גדול בהרבה" מן התמונה. למשל אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר $f(x) = \sin x$ אזי הטווח של f הוא $B = \mathbb{R}$ אך התמונה של $f(x)$ היא $[-1, 1]$.

דוגמא 5: מצא את התמונה של הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

פתרון: אומנם הטווח של $f(x)$ הוא $\mathbb{R}$, אך ברור כי לכל x ממשי, $f(x) \geq 1$. לא קשה לראות כי לכל $y \geq 1$ קיים x כך ש- $y = f(x)$ ($y^2 = 1 + x^2$), ולכן נוכל לקחת למשל את $x = \sqrt{y^2 - 1}$. מכאן שהתמונה של $f(x)$ היא $\text{image}(f) = [1, \infty)$.

דוגמא 6: מצא את התמונה של הפונקציה $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$, כאשר $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

פתרון: לכל $x \geq 2$ בתחום, $0 < \frac{1}{x} \leq 0.5$, ולכן $3 < f(x) \leq 3.5$. לכן התמונה של $f(x)$ כלולה בקטע $(3, 3.5]$. נוכיח שלמעשה $\text{image}(f) = (3, 3.5]$. יהי $y \in (3, 3.5]$. צריך למצוא $x \geq 2$ כך ש- $y = 3 + \frac{1}{x}$. נפתור משוואה זו ונקבל $x = \frac{1}{y-3}$. מאחר ש- $0 < y - 3 \leq 0.5$, השבר $\frac{1}{y-3}$ מוגדר ומתקיים $x = \frac{1}{y-3} \geq 2$.

דוגמא 7: הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}$.

מצא את התמונה של $f(x)$.

פתרון: על סמך אי-שוויון הממוצעים (ראה דוגמא 6), $\frac{1+x^4}{2} \geq \sqrt{1 \cdot x^4} = x^2$, ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{2x^2}{1+x^4} \leq 1$, כאשר השוויון מתקבל בנקודות $x = \pm 1$. כמו כן, ברור שלכל x ממשי מתקיים $\frac{2x^2}{1+x^4} \geq 0$, ומכאן נובע ש- $\text{image}(f) = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

תרגילים

1. מצא את תחום ההגדרה הטבעי של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

א. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ב. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$

ג. $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$ ד. $f(x) = \sqrt[4]{16 - 2^x}$

ה. $f(x) = \ln(9x - x^3)$ ו. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5 + 4x - x^2}$

2. מצא את התמונה של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

א. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$ ב. $f(x) = 3^x$ ג. $f(x) = 1 + |x - 1|$

תשובות סופיות

1. א. $-2 < x < 2$ ב. $x \neq 1, x \neq 0$ ג. $x \neq 2$ ד. $x \leq 4$ ה. $0 < x < 3$ או

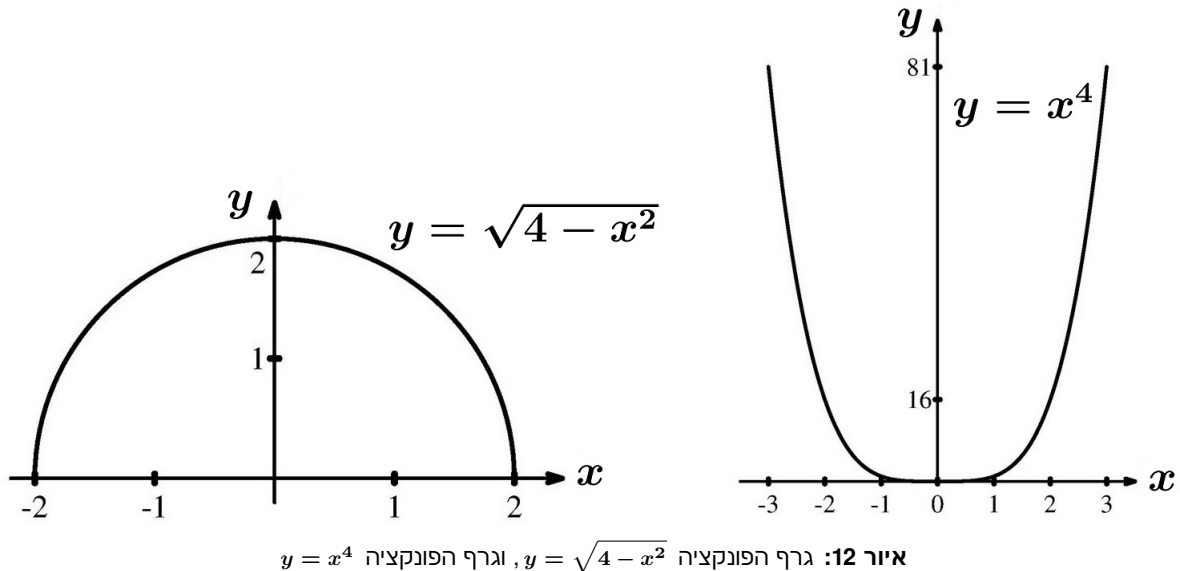
$x < -3$ ו. $-1 \leq x \leq 3$

2. א. $y \geq 0$ ב. $y > 0$ ג. $y \geq 1$

12. גרף של פונקציה

לכל פונקציה $f : A \rightarrow B$ ניתן להתאים צורה גאומטרית במישור שנקראת **גרף** שממחישה לנו בצורה ויזואלית את הפונקציה ואת תכונותיה השונות. הגרף של הפונקציה מורכב מכל הנקודות (x, y) במישור המקיימות את התנאי $y = f(x)$. בכדי לשרטט את הגרף של הפונקציה דרושה לנו מערכת צירים המכילה זוג ישרים ניצבים אחד לשני. ציר ראשון מונח בצורה אופקית, נקרא בדרך כלל ציר ה- x (או בקיצור ציר- x), והציר השני המאונך לציר ה- x , נקרא ציר ה- y . לכל נקודה שעל כל אחד מן הצירים הללו מותאם מספר ממשי בדומה להתאמה הקיימת על ציר המספרים הממשיים שראינו בפרק 1. נקודת המפגש שבין הצירים נקרא **ראשית הצירים** והמספר הממשי המותאם לה הוא אפס בכל אחד מן הצירים. לכל נקודה P במישור נתאים זוג מספרים ממשיים (x, y) באופן הבא: המספר x מתקבל על ידי הטלת הנקודה P על ציר ה- x , והמספר y מתקבל על ידי הטלת הנקודה P על ציר ה- y . המספרים x ו- y נקראים **הקואורדינטות** של הנקודה P (או **שיעורי הנקודה** P). שרטוט גרף של פונקציה נתונה כרוך במציאת כל הנקודות $P(x, y)$ במישור המקיימות $y = f(x)$. למרות זאת, ברוב המקרים מספיק לשרטט קבוצה קטנה של נקודות כאלה בכדי לקבל שרטוט מקורב מספיק טוב של הגרף.

דוגמא 1: הפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2}$ מוגדרת לכל $-2 \leq x \leq 2$. אם נשרטט את הגרף של פונקציה זו נקבל חצי מעגל עליון אשר מרכזו הוא בראשית הצירים ורדיוסו הוא $R = 2$, כפי שרואים בציור 12.



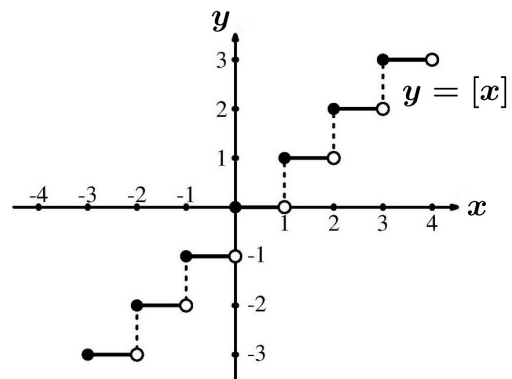
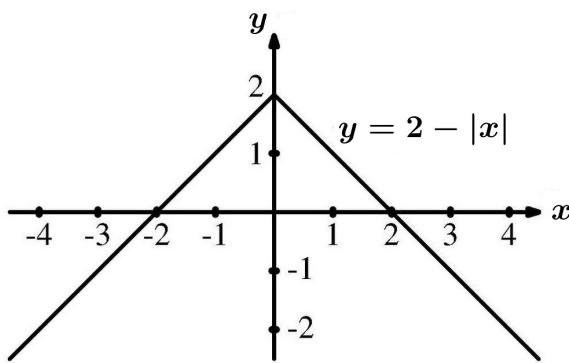
דוגמא 2: הפונקציה $y = x^4$, לעומת זאת, מוגדרת לכל ערך של x , ולכן הגרף שלה הוא אינסופי. בציור 12 אנו רואים רק חלק סופי של הגרף, המשתרע מן הנקודה $x = -3$ עד לנקודה $x = 3$.

דוגמא 3: לכל מספר ממשי x , הערך השלם של x הוא המספר השלם k הגדול ביותר אשר אינו עולה על x . מספר שלם זה מסומן על ידי $[x]$. למשל $[2.5] = 2$, $[0.3] = 0$, $[9] = 9$, ו- $[-1.3] = -2$. לכל $0 \leq x < 1$, $[x] = 0$, לכל $1 \leq x < 2$, $[x] = 1$, ובאופן דומה, לכל מספר שלם k ולכל $k \leq x < k + 1$, $[x] = k$. על סמך עובדות אלה ניתן לשרטט את הגרף של הפונקציה $y = [x]$ שנתון בציור 13. בגרף זה, עיגול מלא מציין נקודה השייכת לגרף, ועיגול ריק מציין נקודה אשר אינה חלק מן הגרף. הגרף של הפונקציה נראה כמו מדרגות, ולכן פונקציה זו נקראת לפעמים גם **פונקציית מדרגות**. ראה ציור 13

דוגמא 4: הגרף של הפונקציה $y = 2 - |x|$ מוגדרת עבור כל מספר ממשי x . כאשר $x \geq 0$, $|x| = x$ ולכן $y = 2 - x$, ולכן על ציר ה- x החיובי הגרף של הפונקציה הוא ישר היוצא מן הנקודה $(0, 2)$ בזווית של -45° כלפי מטה. כאשר $x < 0$, $|x| = -x$, ולכן $y = 2 + x$, ולכן על ציר ה- x השלילי, הגרף של הפונקציה הוא ישר בזווית של 45° הבא ממניס אינסוף ומסתיים בנקודה $(0, 2)$. הגרף המלא נתון בציור 13.

12.1 פונקציות חסומות

נאמר שהפונקציה $y = f(x)$ **חסומה** מעל התחום D אם קיים מספר ממשי M כך ש-
 $|f(x)| \leq M$, לכל $x \in D$. הטענה $|f(x)| \leq M$ שקולה לטענה $-M \leq f(x) \leq M$,



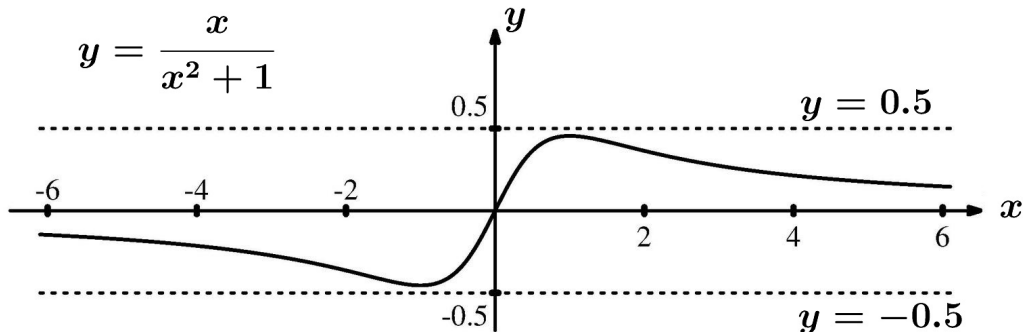
איור 13: גרף הפונקציה $y = 2 - |x|$, וגרף הפונקציה $y = [x]$

ולכן הפונקציה $y = f(x)$ חסומה מעל התחום D אם היא חסומה שם מלמעלה ומלמטה.

דוגמא 5: הפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ חסומה מעל $\mathbb{R}$, שכן על סמך אי-שוויון הממוצעים (ראה פרק 2 דוגמא 6)

$$\frac{1 + |x|^2}{2} \leq \sqrt{1 \cdot |x|^2} = |x|$$

ולכן $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|^2} \leq \frac{1}{2}$, לכל מספר ממשי x . קבלנו לכן כי הפונקציה $f(x)$ חסומה ע"י $\frac{1}{2}$ על כל הישר הממשי. עובדה זו מומחשת היטב על ידי הגרף של הפונקציה שנתון בציור 14.



איור 14: הפונקציה $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ חסומה מלמעלה על ידי $\frac{1}{2}$ ומלמטה על ידי $-\frac{1}{2}$

הפירוש הגיאומטרי של היות הפונקציה $y = f(x)$ חסומה מעל תחום D הוא שהגרף של $f(x)$ נמצא בשלמותו בין הישרים $y = M$ ו- $y = -M$. למשל, בדוגמא 5, רואים בציור 14 כי הגרף של הפונקציה כלול בשלמותו בין הישרים $y = \frac{1}{2}$ ו- $y = -\frac{1}{2}$.

דוגמא 6: הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ חסומה על כל קטע $[a, \infty)$ כאשר $a > 0$. אם נקח למשל $M = \frac{1}{a}$ אז ברור כי $|f(x)| \leq M$ לכל x בקטע $[a, \infty)$. אבל אינה חסומה בקטע $(0, \infty)$ כי לכל $M > 0$ נתון, אם נקח למשל את $x = \frac{1}{M+1}$, אזי x שייך לקטע $(0, \infty)$ אך $|f(x)| = M + 1 > M$.

מן הדוגמא האחרונה אנו למדים שאותה הפונקציה $f(x)$ עשויה להיות חסומה מעל תחום ראשון D_1 ובלתי חסומה מעל תחום שני D_2 . לכן הטענה " $f(x)$ חסומה" היא חסרת משמעות אם איננו מציינים את התחום אשר מעליו הפונקציה חסומה.

דוגמא 7: הפונקציה $f(x) = 3 - 2 \cos x$ חסומה על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$, משום שלכל מספר ממשי x מתקיים $|\cos x| \leq 1$, ולכן

$$|f(x)| = |3 - 2 \cos x| \leq 3 + 2|\cos x| \leq 5$$

כלומר, לכל x ממשי, מתקיים $|f(x)| \leq 5$, ולכן $f(x)$ חסומה על ידי $M = 5$ בכל תחום הגדרתה $\mathbb{R}$.

תרגילים

1. שרטט את הגרפים לפונקציות הבאות:

ב. $f(x) = x + \left[\frac{x}{2}\right]$

א. $f(x) = 1 + x + |x|$

ג. $f(x) = [x] + |x|$

2. הוכח כי כל אחת מן הפונקציות הבאות חסומות בתחום הנתון.

א. $-40 \leq x \leq 9, f(x) = \sqrt{9-x}$ ב. $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{3 - \cos x}$

ג. $0 < x < 5, f(x) = \frac{3x-15}{x^2-25}$

3. בדוק שהפונקציות הבאות אינן חסומות בתחום הנתון.

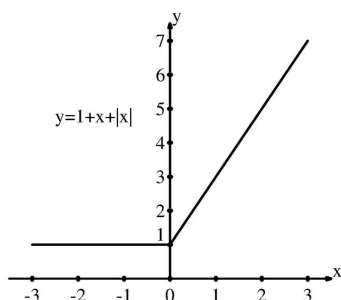
א. $-5 < x < 0, f(x) = \frac{3x-15}{x^2-25}$ ב. $0 < x < 1, f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$

ג. $0 < x < \frac{\pi}{2}, f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

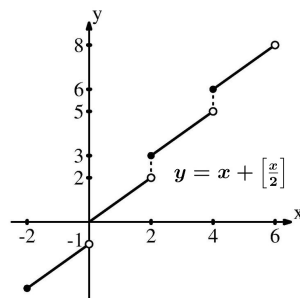
תשובות סופיות

1. א. ראה ציור 15 ב. ציור 16 ג. ציור 17

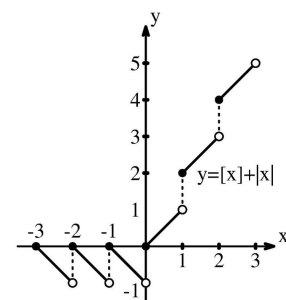
2. א. $0 \leq f(x) \leq 7$ ב. $\frac{5}{4} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ ג. $\frac{3}{10} < f(x) < \frac{3}{5}$



איור 15: גרף הפונקציה $y = 1 + x + |x|$

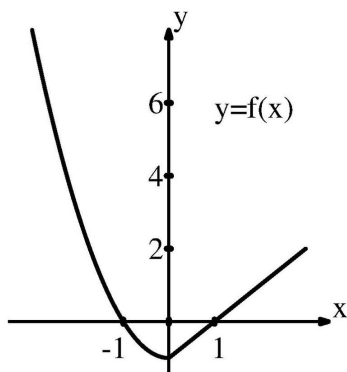


איור 16: גרף הפונקציה $y = x + \left[\frac{x}{2}\right]$



איור 17: גרף הפונקציה $y = [x] + |x|$

13. פעולות על פונקציות ועל גרפים



איור 18: גרף הפונקציה $y = f(x)$

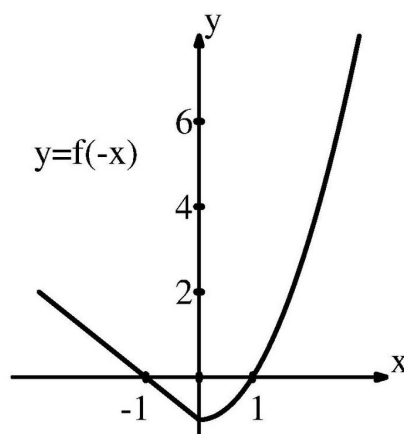
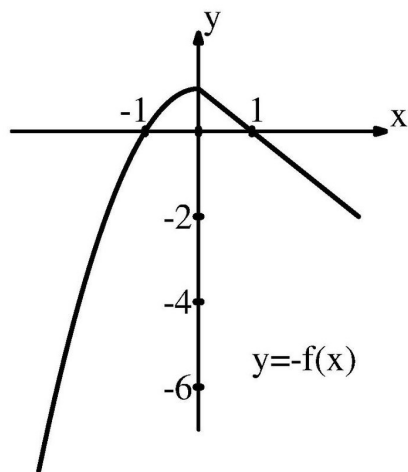
דוגמא 1: לפניך שרטוט הגרף של הפונקציה $y = f(x)$. בהסתמך על שרטוט זה, צייר את הגרפים של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

- | | |
|-------------------|------------------------------------|
| א. $y = -f(x)$ | ב. $y = f(-x)$ |
| ג. $y = f(x) $ | ד. $y = 1 + f(x)$ |
| ה. $y = f(x + 1)$ | ו. $y = 2 \cdot f(x)$ |
| ז. $y = f(2x)$ | ח. $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$ |

פתרון:

א. הגרף של $-f(x)$ הוא ה**שיקוף** של הגרף של $f(x)$ **ביחס לציר ה- x** . בלשון ציורית, אם נתייחס אל ציר- x כאל מראה, הרי שהגרף של $y = -f(x)$ הוא ההשתקפות של הגרף של $y = f(x)$ (ראה ציור 19).

ב. הגרף של $y = f(-x)$ הוא ה**שיקוף** של הגרף של $f(x)$ **ביחס לציר ה- y** . אם נתייחס אל ציר- y כאל ראי, הרי שהגרף של הפונקציה $y = f(-x)$ הוא ההשתקפות של הגרף של $y = f(x)$ (ראה ציור 19).

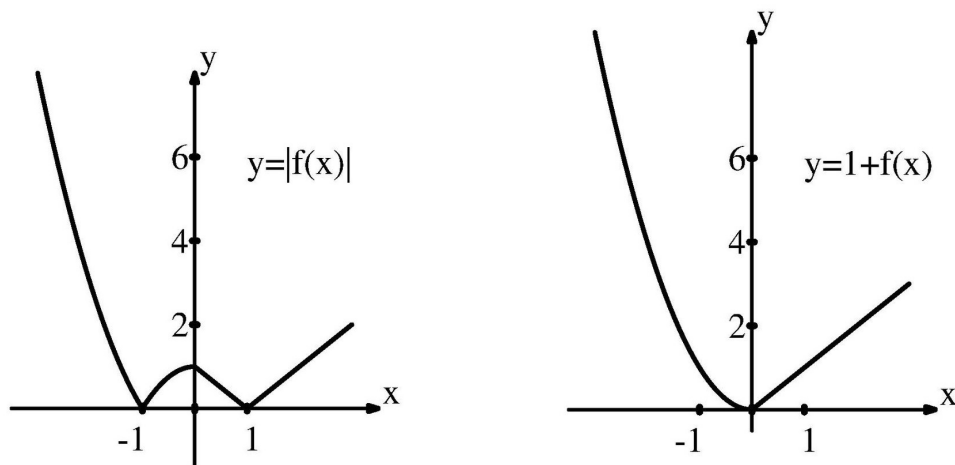


איור 19: הגרף של הפונקציה $y = f(-x)$ וגרף הפונקציה $y = -f(x)$

ג. הגרף של $y = |f(x)|$ יהיה זהה לזה של $y = f(x)$ בכל מקום בו $f(x) \geq 0$. באזורים בהם $f(x) < 0$, הגרף יתהפך מן האזור השלילי של המישור לחלק החיובי. ראה ציור 20.

ד. מבחינה גאומטרית, הגרף של $y = 1 + f(x)$ הוא הזזה ביחידה אחת כלפי מעלה של הגרף של $y = f(x)$, כפי שרואים בציור 20.

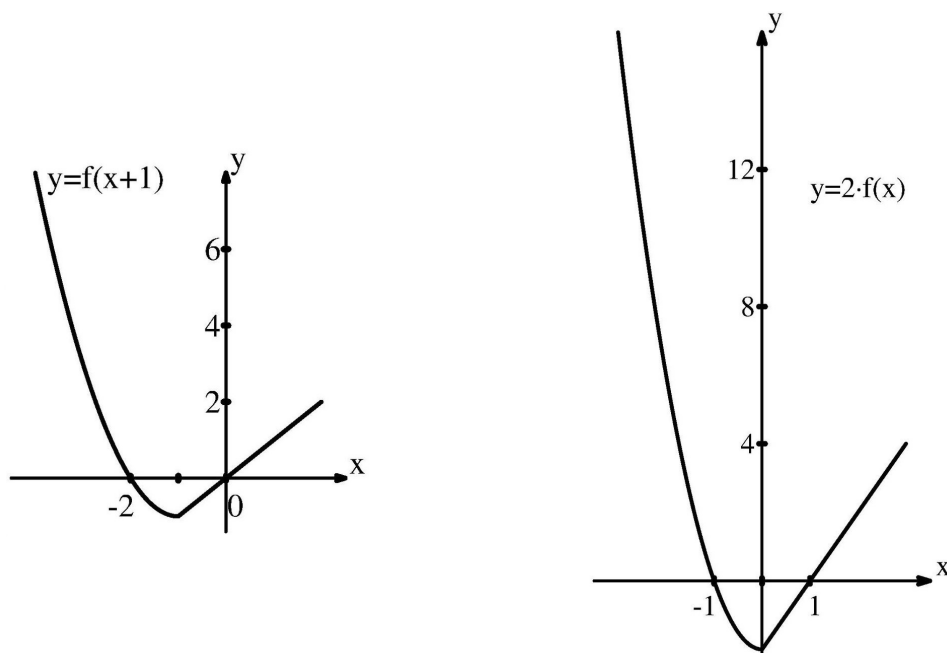
ה. בפונקציה $y = f(x + 1)$, במקום הערך הרגיל של x מופיע $x + 1$, ולכן אם קודם לכן y התקבל ע"י הצבת x בפונקציה, הרי שעכשיו אותו y יתקבל ע"י הצבת $x + 1$



איור 20: הגרף של הפונקציה $y = 1 + f(x)$ וגרף הפונקציה $y = |f(x)|$

בפונקציה. לכן הגרף של $y = f(x + 1)$ מתקבל ע"י הזזת הגרף של $y = f(x)$ יחידה אחת לכוון שמאל, כפי שרואים בציור 21.

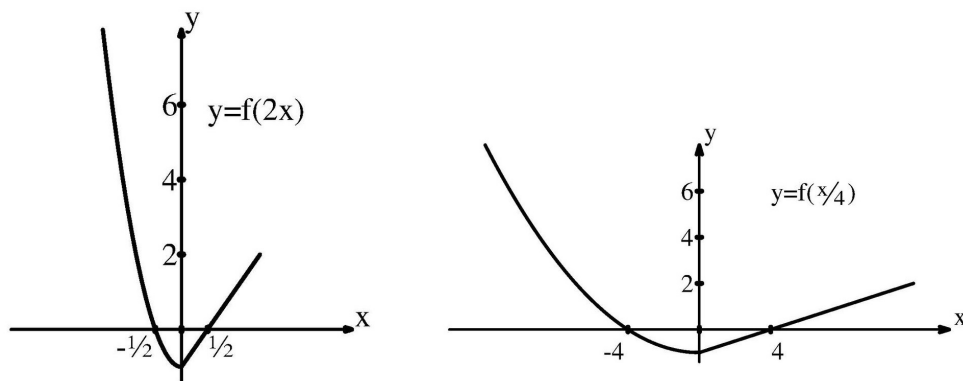
1. הגרף של $y = 2 \cdot f(x)$ הוא מתיחה אנכית של הגרף של $y = f(x)$ בסדר גודל 2. שהרי לכל x אשר קודם לכן הותאם לו הערך y , יותאם עכשיו הערך $2y$. ראה ציור 21.



איור 21: הגרף של הפונקציה $y = 2f(x)$ וגרף הפונקציה $y = f(x + 1)$

1. בפונקציה $y = f(2x)$, הביטוי $2x$ החליף את x , ולכן כל ערך של y אשר קודם לכן התקבל ע"י $x = a$ יתקבל עכשיו ע"י $x = \frac{a}{2}$. מכאן שהגרף של הפונקציה $y = f(2x)$ הוא "כווץ" אופקי של הגרף של $y = f(x)$, כפי שרואים בציור 22.

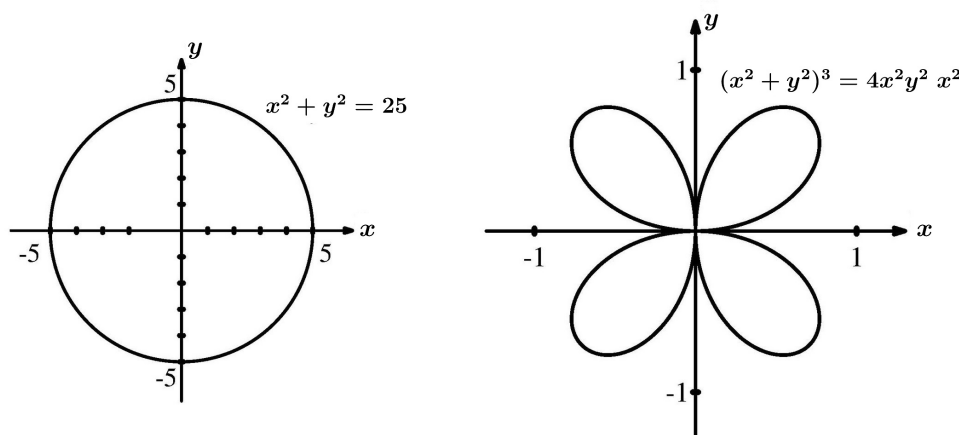
ח. הגרף של $y = f(\frac{x}{4})$ הוא מתיחה אופקית פי 4 של הגרף של $y = f(x)$. ראה ציור 22.



איור 22: הגרף של הפונקציה $y = f(x/4)$ וגרף הפונקציה $y = f(2x)$

13.1 גרף של משוואה

עד עכשיו דברנו על גרפים של פונקציות, אשר היו נתונות לנו ע"י משוואות מן הצורה $y = f(x)$. משוואה מן הצורה $y = f(x)$ היא רק דרך אחת להציג קשר מתמטי בין הגדלים x ו- y . ניתן להציג קשר מתמטי בין הגדלים x ו- y גם ע"י משוואות אחרות כמו $x^2 + y^2 = 25$ או $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$. כמובן שבמקרים כאלה הקשר בין x ל- y הוא פחות ברור, אך למרות זאת אפשר להגדיר את הגרף של כל משוואה מסוג זה באופן הבא: אוסף כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות את המשוואה הנתונה. למשל הגרפים של שתי המשוואות הנ"ל נתונים בציור 23. באופן דומה, המשוואה $x^2 + y^2 = 25$ מתארת מעגל בעל רדיוס 5 אשר מרכזו בראשית הצירים. המשוואה $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ לעומת זאת מתארת עקום גאומטרי יותר מורכב, אשר שרטוטו באופן ידני מאוד קשה, ובמקרה זה הוא נעשה ע"י תוכנת מחשב גרפית. נדגיש כי בשני המקרים, הגרפים הללו אינם גרפים של פונקציות, אלא גרפים של משוואות. במקרה של המעגל, לכל ערך $-5 < x < 5$ מתאימים שני ערכים שונים של y , ובמקרה השני, לערכים רבים של x מתאימים ארבעה ערכים שונים של y , וזה כמובן בניגוד להגדרת מושג הפונקציה. לכן מושג הגרף של משוואה הוא הרבה יותר כללי מזה של גרף של פונקציה.



איור 23: הגרף של המשוואה $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ וגרף המשוואה $x^2 + y^2 = 25$

תרגילים

1. שרטט את הגרף של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = |x|$ ב. $f(x) = 2 + |x|$ ג. $f(x) = |x - 1|$

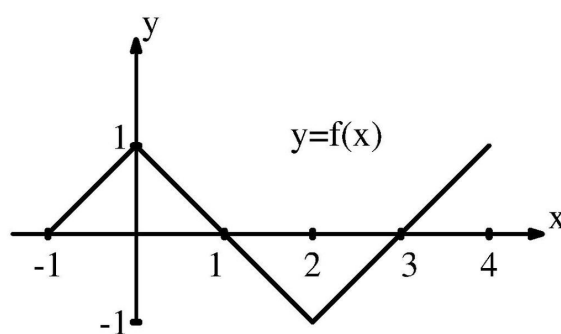
ד. $f(x) = 2 + |x - 1|$ ה. $f(x) = 2 - |x - 1|$ ו. $f(x) = 3(2 + |x - 1|)$

2. לפי הגרף של הפונקציה $y = f(x)$ צייר את הגרפים של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $y = -f(x)$ ב. $y = f(-x)$ ג. $y = |f(x)|$

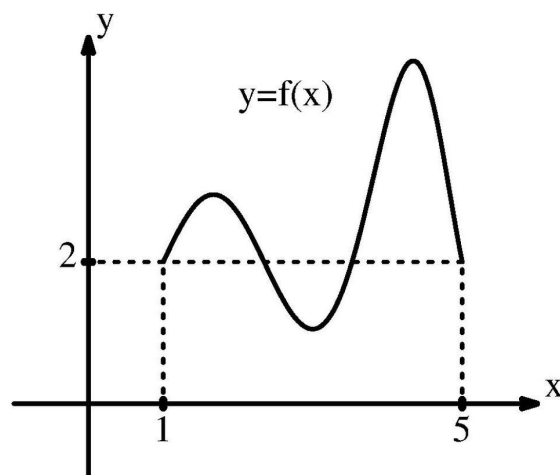
ד. $y = f(x - 1)$ ה. $y = f(3x)$ ו. $y = f(\frac{x}{3})$

ז. $y = 1 + f(x)$



איור 24: גרף הפונקציה $y = f(x)$

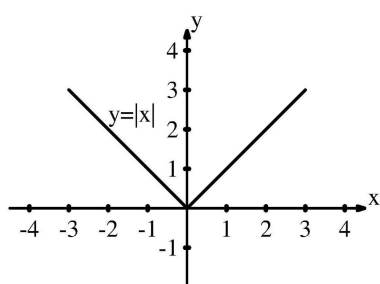
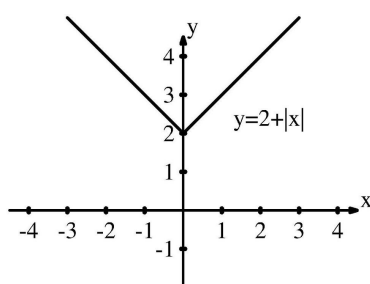
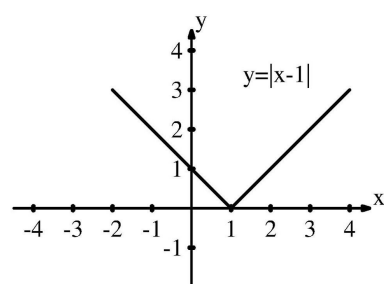
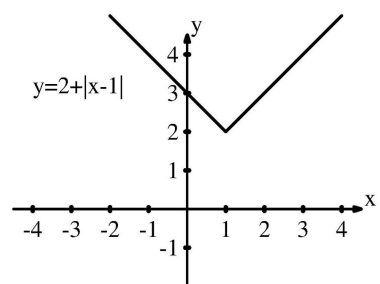
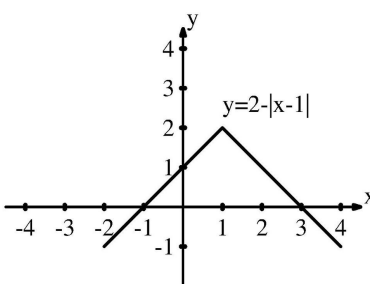
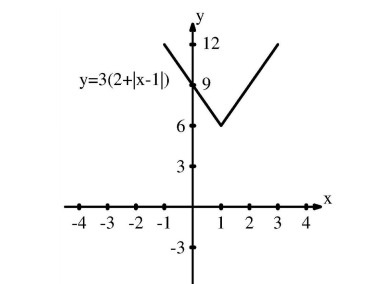
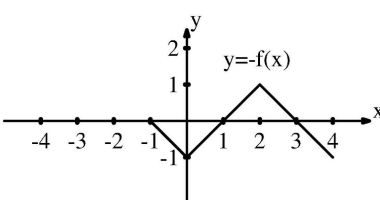
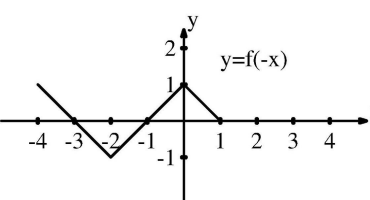
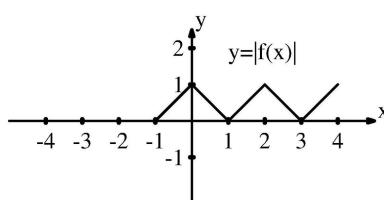
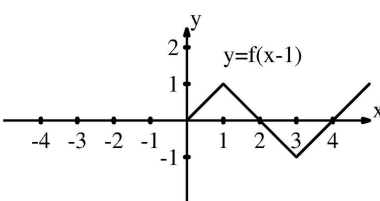
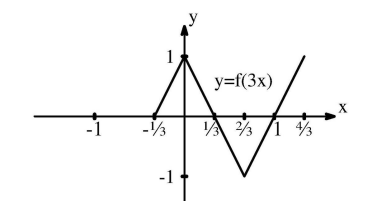
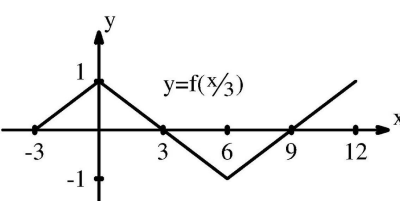
3. לפי הגרף של הפונקציה $y = f(x)$ צייר את הגרף של המשוואה $x = f(y)$.

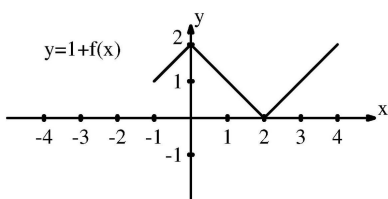
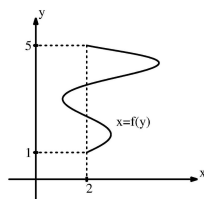


איור 25: גרף הפונקציה $y = f(x)$

תשובות סופיות

1. א. ראה ציור 26 ב. ציור 27 ג. ציור 28
 ד. ציור 29 ה. ציור 30 ו. ציור 31
2. א. ציור 32 ב. ציור 33 ג. ציור 34 ד. ציור 35 ה. ציור 36 ו. ציור 37
 ז. ציור 38
3. ראה ציור 39

איור 26: גרף הפונקציה $y = |x|$ איור 27: גרף הפונקציה $y = 2 + |x|$ איור 28: גרף הפונקציה $y = |x - 1|$ איור 29: גרף הפונקציה $y = |x|$ איור 30: גרף הפונקציה $y = 2 + |x|$ איור 31: גרף הפונקציה $y = |x - 1|$ איור 32: גרף הפונקציה $y = f(x)$ איור 33: גרף הפונקציה $y = f(-x)$ איור 34: גרף הפונקציה $y = |f(x)|$ איור 35: גרף הפונקציה $y = f(x)$ איור 36: גרף הפונקציה $y = f(-x)$ איור 37: גרף הפונקציה $y = |f(x)|$

איור 38: גרף הפונקציה $y = 1 + f(x)$ איור 39: גרף המשוואה $x = f(y)$

14. פונקציות מונוטוניות ופונקציות הפוכות

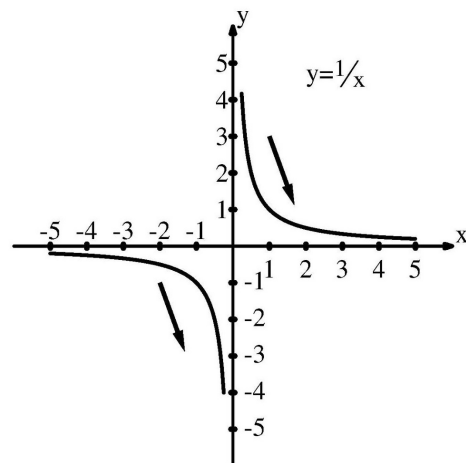
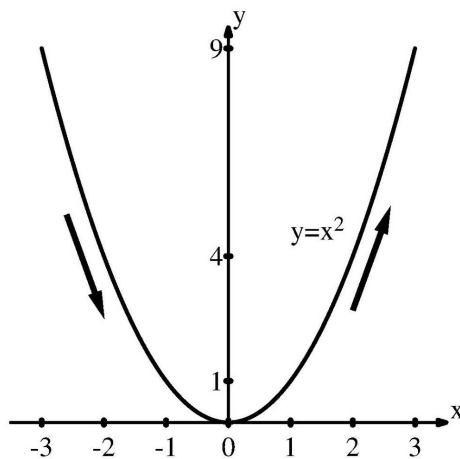
תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה נתונה, ותהי $A_0 \subseteq A$ תת-תחום של התחום A . נאמר ש- $f(x)$ **מונוטונית עולה** בתחום A_0 , אם לכל שני ערכים $x_1 \leq x_2$ בקבוצה A_0 מתקיים גם $f(x_1) \leq f(x_2)$. נאמר ש- $f(x)$ **מונוטונית יורדת** בתחום A_0 , אם לכל שני ערכים $x_1 \leq x_2$ בקבוצה A_0 מתקיים גם $f(x_1) \geq f(x_2)$. נאמר ש- $f(x)$ **מונוטונית עולה ממש** בתחום A_0 אם $x_1 < x_2$ גורר כי $f(x_1) < f(x_2)$, לכל זוג ערכים x_1 ו- x_2 בתחום A_0 . נאמר ש- $f(x)$ **מונוטונית יורדת ממש** בתחום A_0 אם $x_1 < x_2$ גורר כי $f(x_1) > f(x_2)$, לכל זוג ערכים x_1 ו- x_2 בתחום A_0 . נאמר כי $f(x)$ **מונוטונית**, אם היא מקיימת את אחד מן התנאים הקודמים.

דוגמא 1: הראה שהפונקציה $f(x) = x^2$ מונוטונית עולה ממש בתחום $(0, \infty)$ ומונוטונית יורדת ממש בתחום $(-\infty, 0)$

פתרון: ברור שאם $0 < x_1 < x_2$ אז $x_1^2 < x_2^2$, כלומר $f(x_1) < f(x_2)$. לכן בתחום $(0, \infty)$ הפונקציה עולה ממש. אם $x_1 < x_2 < 0$ שני מספרים שליליים, אז $x_1^2 > x_2^2$, כלומר $f(x_1) > f(x_2)$, ולכן $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום $(-\infty, 0)$. מבחינה גאומטרית, העניין מתבטא בכך שהגרף של $f(x)$ נמצא תמיד במצב עליה מעל החלק החיובי של ציר- x , ובמצב מתמיד של ירידה מעל החלק השלילי של ציר- x . ראה ציור 40.

דוגמא 2: מצא באיזה תחומים הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ היא מונוטונית עולה? מונוטונית יורדת?

פתרון: קל לראות שאם $0 < x_1 < x_2$ אז $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, ולכן בתחום $(-\infty, 0)$ הפונקציה $f(x)$ מונוטונית יורדת. כמו כן, אם $0 < x_1 < x_2$ אז $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, ולכן גם בתחום $(0, \infty)$ הפונקציה יורדת. ראה ציור 40. חשוב לציין כי משתי עובדות אלה לא נובע כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה $(-\infty) \cup (0, \infty)$! כי אם נקח למשל $x_1 = -3$ ו- $x_2 = 3$ אז $\frac{1}{-3} < \frac{1}{3}$. למעשה, הגרף של הפונקציה מפוצל לשני חלקים נפרדים, כאשר כל חלק בנפרד נמצא במצב מתמיד של ירידה, אך לא קיים שום קשר בין שני החלקים.



איור 40: הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ מונוטונית יורדת בכל תחום ההגדרה שלה. הפונקציה $y = x^2$ מונוטונית יורדת בקטע $(-\infty, 0)$, ומונוטונית עולה בקטע $(0, \infty)$.

דוגמא 3: הוכח כי הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 1}$ מונוטונית עולה ממש מעל כל $\mathbb{R}$.

פתרון: נניח ש- $x_1 < x_2$. צריך להראות ש- $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies x_1^5 < x_2^5 \\ &\implies x_1^5 + 1 < x_2^5 + 1 \\ &\implies \sqrt[3]{x_1^5 + 1} < \sqrt[3]{x_2^5 + 1} \\ &\implies f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

14.1 פונקציות חד-חד ערכיות

תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה נתונה. כפי שמושג הפונקציה הוגדר, לכל x בתחום ההגדרה A קיים y יחיד בטווח B כך ש- $y = f(x)$. הדרישה ההפוכה, שלכל y בטווח קיים x יחיד בתחום כך ש- $y = f(x)$ אינה מתקיימת בהרבה מקרים. למשל, אם

$$f(x) = x^2(x-1)^4(x-5)^6$$

אזי עבור $y = 0$ קיימים שלשה ערכים שונים $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ו- $x_3 = 5$ המקיימים כולם $f(x) = 0$. יתכן גם מצב בו עבור $y \in B$ לא קיים אפילו מקור אחד x המקיים $y = f(x)$. אם למשל בדוגמא הקודמת נקח $y = -1$ אז לא קיים שום x כך ש- $f(x) = -1$, משום שהביטוי $f(x) = x^2(x-1)^4(x-5)^6$ לעולם אינו לכול להיות שלילי.

נאמר שהפונקציה $f: A \rightarrow B$ היא **חד-חד ערכית** (ח.ח.ע.) מן הקבוצה A לקבוצה B , אם לכל $y \in B$ קיים לכל היותר אחד x ב- A כך ש- $y = f(x)$. באופן שקול התנאי ניתן לניסוח ע"י התנאי: אם $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1 = x_2$, או על ידי התנאי השקול גם

הוא: אם $x_1 \neq x_2$ אז $f(x_1) \neq f(x_2)$. את העובדה הזו מקובל לסמן בקצרה על ידי הביטוי: $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

דוגמא 4: תהי $A = \{x \mid x > 1\}$, ונגדיר פונקציה $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x + \frac{1}{x}$. הוכח כי f חד-חד-ערכית בתחום A .

פתרון: יהיו $x_1, x_2 \in A$ כלשהם, ונניח כי $f(x_1) = f(x_2)$. עלינו להראות שבהכרח $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} &\implies x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &\implies x_1 x_2 (x_1 - x_2) = x_1 - x_2 \\ &\implies (x_1 x_2 - 1)(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}$$

השוויון האחרון יתכן אם $x_1 x_2 - 1 = 0$ או $x_1 - x_2 = 0$. ידוע כי $x_1, x_2 > 1$, ולכן $x_1 x_2 - 1 > 0$, ולכן בהכרח $x_1 - x_2 = 0$, וקבלנו ש- $x_1 = x_2$. מכאן שהפונקציה היא חד-חד-ערכית.

דוגמא 5: תהי $A = \{x \mid x > 0\}$, ותהי $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ אותה הפונקציה שבדוגמא הקודמת, $f(x) = x + \frac{1}{x}$. הוכח כי במקרה זה $f(x)$ אינה חד-חד-ערכית בתחום A .

פתרון: בכדי להוכיח כי $f(x)$ אינה חד-חד-ערכית בתחום A , מספיק למצוא $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $x_1 \neq x_2$ ו- $f(x_1) = f(x_2)$. נקח למשל את $x_1 = \frac{1}{2}$ ו- $x_2 = 2$. ברור ש- $f(x_1) = f(x_2) = 4$, ולכן $f(x)$ אינה חד-חד-ערכית.

משתי הדוגמאות האחרונות אנו למדים כי אותה הפונקציה $f(x)$ עשויה להיות חד-חד-ערכית בתחום אחד אך לא חד-חד-ערכית בתחום שני. לכן תכונת החד-חד-ערכיות תלויה גם בתחום אשר מעליו הפונקציה מוגדרת.

דוגמא 6: הוכח שאם $f : A \rightarrow B$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש, אזי $f(x)$ חד-חד-ערכית בתחום A . **הוכחה:** נניח למשל שהפונקציה מונוטונית עולה ממש, ונניח כי $x_1 \neq x_2$. עלינו להוכיח כי $f(x_1) \neq f(x_2)$. אם $x_1 < x_2$ אז $f(x_1) < f(x_2)$, ואם $x_2 < x_1$ אז $f(x_2) < f(x_1)$, ולכן בכל מקרה נקבל $f(x_1) \neq f(x_2)$, ולכן $f(x)$ חד-חד-ערכית. באופן דומה נוכיח שאם $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום A אז היא חד-חד-ערכית. ■

14.2 פונקציות על

תהי $f : A \rightarrow B$. נאמר כי $f(x)$ היא פונקציה מ- A על B , אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $y = f(x)$.

דוגמא 7: למשל אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, אזי $f(x)$ היא פונקציה מ- $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$, כי לכל $y \in \mathbb{R}$, קיים $x = \sqrt[3]{y}$ כך ש- $f(x) = y$. לעומת זאת, הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה על $\mathbb{R}$, כי אם נקח למשל $y = -1$ אז לא קיים x כך ש- $f(x) = -1$.

אם $f(x)$ היא פונקציה מ- A על B אז נסמן זאת ע"י $f : A \xrightarrow{f} B$. אם בנוסף לכך $f(x)$ היא חד-חד-ערכית אז נסמן זאת ע"י $f : A \xrightarrow{f^{-1}} B$.

14.3 פונקציות הפוכות

במקרה המיוחד שבו הפונקציה $f : A \xrightarrow{f^{-1}} B$ היא חד-חד-ערכית ועל B אפשר להגדיר פונקציה חדשה $g : B \rightarrow A$ ע"י $g(y) = x$ אם ורק אם $f(x) = y$. כלומר, הפונקציה g פועלת באופן הפוך לפעולה של f : אם x מועתק ל- y על ידי f , אז y מועתק ל- x על ידי g . לפונקציה $g(y)$ קוראים **הפונקציה ההפוכה** של f והיא ומסומנת ע"י f^{-1} . יש לציין שוב שהפונקציה ההפוכה של f קיימת רק כאשר f היא פונקציה חד-חד-ערכית מ- A על B . גם התפקידים של A ו- B מתחלפים: התחום של f^{-1} יהיה B והטווח יהיה A , ולכן נרשום $f^{-1} : B \rightarrow A$. מן ההגדרה של f^{-1} נובע:

$$\text{לכל } x \in A : f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{לכל } y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$$

דוגמא 8: הוכח כי הפונקציה $f(x) = 2 + x^5$ היא חד-חד-ערכית מ- $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}$ ומצא את הפונקציה ההפוכה שלה.

פתרון: ברור כי $f(x)$ מוגדרת לכל מספר ממשי x . נוכיח ראשית כל כי $f(x)$ חד-חד-ערכית. נניח ש- $f(x_1) = f(x_2)$, כלומר $2 + x_1^5 = 2 + x_2^5$, ולכן $x_1^5 = x_2^5$. מאחר ולכל מספר ממשי קיים רק שורש חמישי אחד, יוצא ש- $x_1 = x_2$. לכן $f(x)$ חד-חד-ערכית. בכדי להראות שהפונקציה היא על $\mathbb{R}$, נוכיח שלכל $y \in \mathbb{R}$ קיים x כך ש- $f(x) = y$. לשם כך צריך לפתור את המשוואה $2 + x^5 = y$. ממנה נובע מייד כי $x^5 = y - 2$, ולכן $x = \sqrt[5]{y - 2}$. מאחר שלכל y ממשי קיים השורש $\sqrt[5]{y - 2}$, הרי ש- x קיים, ולכן הפונקציה $f(x)$ היא על $\mathbb{R}$. לכן משתי עובדות אלה יוצא שקיימת פונקציה הפוכה עבור f , והיא $f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - 2}$.

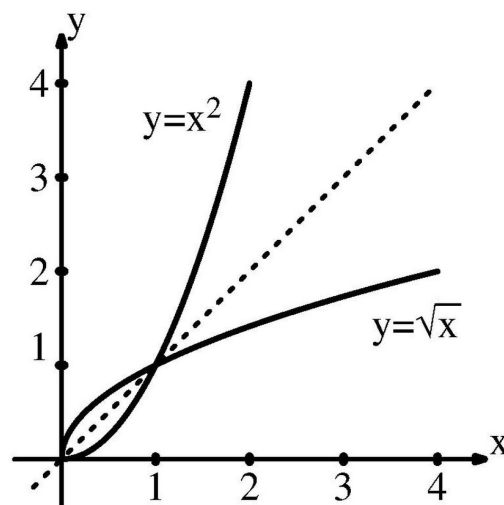
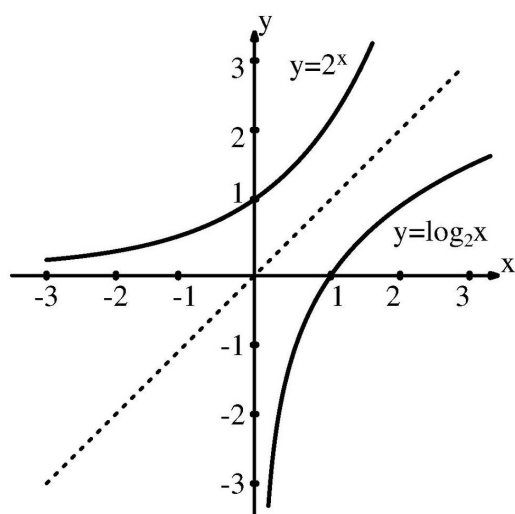
למעשה, השמוש במשתנה y בפונקציה ההפוכה הוא לא הכרחי. בדוגמא האחרונה אפשר לרשום את הפונקציה ההפוכה גם ע"י $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x - 2}$, ואז נוכל לצייר גם את הגרף שלה על אותה מערכת צירים כמו $f(x)$. הגרף של $f^{-1}(x)$ יהיה כמובן שונה מזה של $f(x)$.

14.4 גרפים של פונקציות הפוכות

תהי $f(x)$ פונקציה חד-חד-ערכית מן התחום A על הטווח B , ותהי $g = f^{-1}$ הפונקציה ההפוכה של f . אם הנקודה (a, b) נמצאת על הגרף של הפונקציה $y = f(x)$ אזי $b = f(a)$. מצד שני $y = f(x)$ אם ורק אם $x = g(y)$, ולכן $a = g(b)$. מכאן נובעת

המסקנה שהגרפים של $y = f(x)$ ושל $x = g(y)$ זהים. למשל הנקודה $(2, 8)$ נמצאת על הגרף של $y = x^3$, ולכן הנקודה $(8, 2)$ נמצאת גם על הגרף של הפונקציה ההפוכה $x = \sqrt[3]{y}$.

אם נחליף את התפקידים של המשתנים x ו- y במשוואה $x = g(y)$, נקבל $y = g(x)$. למשוואה זו מתאים כמובן גרף שונה מזה של המשוואה $x = g(y)$. לא קשה לראות כי הנקודות (a, b) ו- (b, a) הן סימטריות ביחס לישר $y = x$, ולכן הגרף של $y = f(x)$ סימטרי לגרף של $x = g(y)$ ביחס לישר $y = x$. לסיכום, קבלנו כי הגרף של $y = g(x)$ סימטרי לגרף של $y = f(x)$ ביחס לישר $y = x$.



איור 41: הפונקציה ההפוכה של $y = x^2$ היא $y = \sqrt{x}$, והפונקציה ההפוכה של $y = 2^x$ היא $y = \log_2 x$

דוגמא 9: מתכונות החזקה ברור כי לכל $x_1 < x_2$ מתקיים $2^{x_1} < 2^{x_2}$ ולכן הפונקציה $y = 2^x$ היא פונקציה מונוטונית עולה ממש בכל הישר $\mathbb{R}$, ולכן על פי דוגמא 6 היא הפיכה מעל $\mathbb{R}$. הפונקציה ההפוכה שלה היא $y = \log_2 x$, והיא מוגדרת לכל $x > 0$ בלבד (מדוע?). הגרפים המתאימים לשתי הפונקציות האלה מדגימות את יחס השיקוף הקיים בין פונקציה הפיכה לפונקציה ההפוכה לה (ציור 41).

דוגמא 10: אם $0 \leq x_1 < x_2$ אז $x_1^2 < x_2^2$, ולכן הפונקציה $y = x^2$ היא פונקציה מונוטונית עולה מעל ציר ה- x החיובי $[0, \infty)$. לכן $y = x^2$ הפיכה בקטע זה, והפונקציה ההפוכה שלה היא $y = \sqrt{x}$. גם במקרה זה רואים כיצד הגרף של $y = \sqrt{x}$ הוא שיקוף של הגרף של $y = x^2$ ביחס לישר $y = x$ (ראה ציור 41).

נציין כי בדוגמא האחרונה, $f(x) = x^2$ מוגדרת על כל הישר הממשי, אך היא אינה מונוטונית מעל כולו. שכן, אם נקח למשל $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, ו- $x_3 = 3$ אז קל לראות כי

$$f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$$

היות ו- $f(-3) = f(3)$ ברור כי $f(x)$ אינה חד-חד-ערכית מעל הישר כולו.

תרגילים

1. נגדיר את הפונקציה $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. הוכח כי $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $(1, \infty)$.
2. הראה שהפונקציה $f(x) = 9x^2 - 6x - 8$ עולה ממש בתחום $(\frac{1}{3}, \infty)$ ויורדת ממש בתחום $(-\infty, \frac{1}{3})$.
3. הוכח: סכום של פונקציות מונוטוניות עולות (יורדות) הוא פונקציה עולה (יורדת).
4. הוכח: אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) אזי הפונקציה $-f(x)$ מונוטונית יורדת (עולה).
5. הוכח: אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) בתחום A , ואם $f(x) \neq 0$ לכל $x \in A$ אזי הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מונוטונית יורדת (עולה) בתחום A .
6. תן דוגמא לשתי פונקציות מונוטוניות עולות אשר מכפלתן אינה מונוטונית.
7. בדוק אם הפונקציות הבאות הן חד-חד-ערכיות בתחום הגדרתן.

א. $y = 2^x + 1$
ב. $y = \ln(6x + 1)$
ג. $y = 3x + |x|$
8. צייר את הגרפים של הפונקציות ההפוכות לשתי הפונקציות הראשונות בשאלה הקודמת.
9. הראה שאם $f : A \rightarrow B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ־ A על B , ואם g היא הפונקציה ההפוכה של f , אזי g היא פונקציה חד-חד-ערכית מ־ B על A .
10. תן דוגמא לפונקציה חד-חד-ערכית $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$.
11. הראה שכל אחת מן הפונקציות הבאות היא חד-חד-ערכית מן התחום A על התחום B , ומצא את הפונקציה ההפוכה שלה $f^{-1}(x)$.

א. $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$, $A = (1, \infty)$, $B = (-\infty, -2)$

ב. $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = [7, 100]$, $B = [0.01, \frac{1}{7}]$

ג. $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$, $A = (0, \infty)$, $B = (1, \infty)$

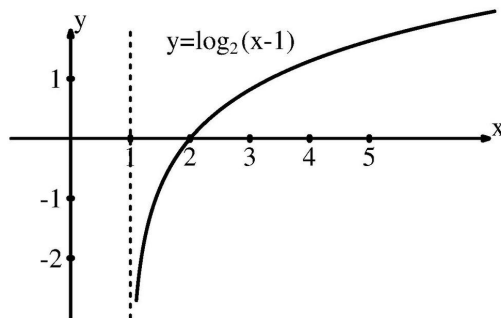
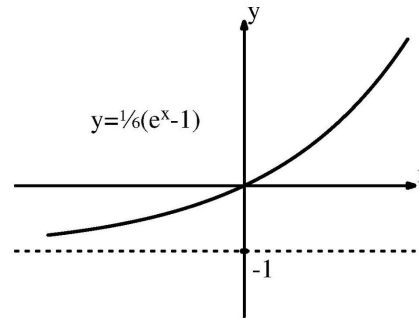
ד. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

תשובות סופיות

6. למשל $f(x) = x$ ו־ $g(x) = 2x$

7. א. כן ב. כן ג. לא

8. א. ראה ציור 42 ב. ציור 43

11. א. $y = \frac{x-1}{x+2}$ ב. $y = \frac{1}{x}$ ג. $y = \frac{1}{\log_3 x}$ ד. $y = \sqrt[3]{1-x^7}$ איור 42: גרף הפונקציה $y = \log_2(x-1)$ איור 43: גרף הפונקציה $y = \frac{1}{6}(e^x - 1)$

15. פונקציות מחזוריות, זוגיות, ואי-זוגיות

פונקציה $f(x)$ המוגדרת מעל תחום D נקראת **מחזורית** אם קיים מספר **חיובי** T כך שלכל $x \in D$, $x \pm T \in D$ ו- $f(x \pm T) = f(x)$. כל מספר T בעל תכונה זו נקרא **מחזור** של $f(x)$. המחזור הקטן ביותר (אם הוא קיים) נקרא **המחזור היסודי** של $f(x)$.

דוגמא 1:

א. ידוע כי לכל x , $\sin(x+2\pi) = \sin x$, ולכן $\sin x$ היא פונקציה מחזורית אשר מחזור היסודי הוא $T = 2\pi$. טענה דומה נכונה גם עבור הפונקציה $\cos x$.

ב. לגבי $\tan x$, ידוע כי לכל x מתקיימת הזהות $\tan(x+\pi) = \tan x$, ולכן $\tan x$ היא פונקציה מחזורית אשר המחזור היסודי שלה הוא $T = \pi$. אותו דבר נכון גם עבור הפונקציה $\cot x$.

ג. לכל מספר קבוע C , הפונקציה $f(x) = C$ היא מחזורית, אך אין לה מחזור יסודי כי לכל $T > 0$, $f(x+T) = f(x) = C$, אך לא קיים T מינימלי.

דוגמא 2: תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית בעלת מחזור T , ויהי n מספר טבעי. הוכח כי גם nT מחזור של $f(x)$.

הוכחה: עלינו להראות שלכל x בתחום ההגדרה של $f(x)$ מתקיים $f(x \pm nT) = f(x)$. את המספר nT אפשר לרשום גם כך:

$$nT = \underbrace{T + T + \dots + T}_{n \text{ פעמים}}$$

ולכן על סמך העובדה ש- T הוא מחזור של $f(x)$ נקבל

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+T) \\ &= f(x+T+T) \\ &= f(x+T+T+T) \\ &\vdots \\ &= f(x+\underbrace{T+T+\dots+T}_{n \text{ פעמים}}) \\ &= f(x+nT) \end{aligned}$$

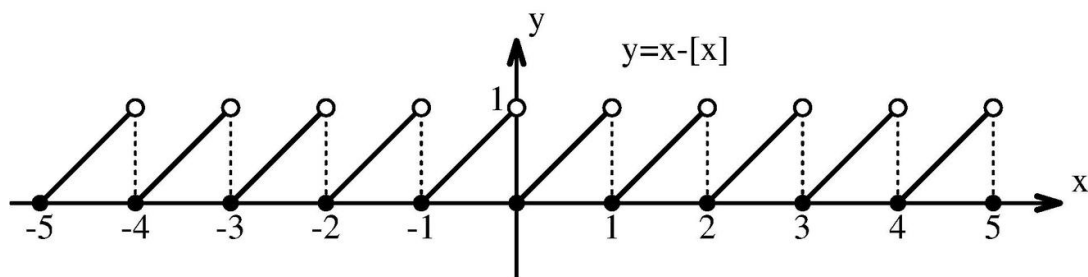
באותו אופן נוכיח ש- $f(x-nT) = f(x)$, ולכן גם המספר nT הוא מחזור של $f(x)$. ■

דוגמא 3: שרטט את הגרף של פונקציית "המשור" $f(x) = x - [x]$. הוכח כי $f(x)$ מחזורית, ומצא את המחזור היסודי של $f(x)$.

פתרון: כזכור מדוגמא 3 (ראה גם ציור 13), הביטוי $[x]$ מציין את הערך השלם של x . יהי k המספר השלם היחיד שמקיים את התנאי $k \leq x < k+1$. אזי ברור ש- $[x] = k$ ו- $[x+1] = k+1$. למשל אם $x = 2.7$ אז $k = 2$, כי $2 \leq x < 3$. נחזור לפונקציה $f(x) = x - k$, נוכיח ש- $T = 1$ הוא מחזור של $f(x)$.

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - (k+1) = x-k = x-[x] = f(x)$$

קבלנו ש- $f(x+1) = f(x)$ לכל x ממשי, ולכן $T = 1$ הוא מחזור של הפונקציה. הגרף של הפונקציה נתון בציור 44.

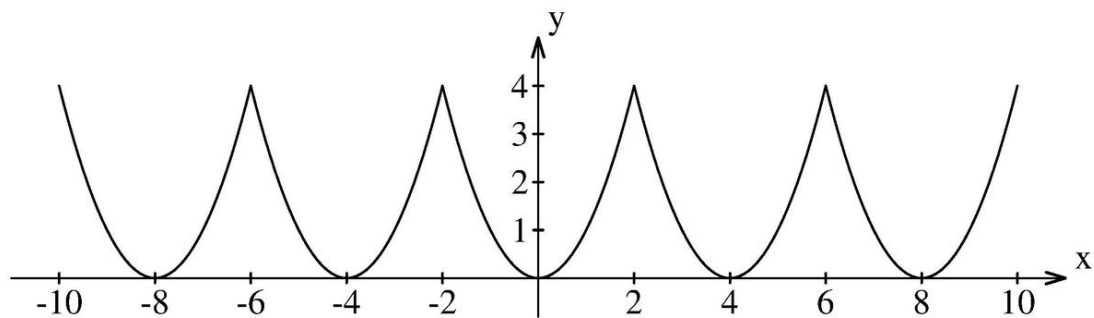


איור 44: הגרף של הפונקציה $y = x - [x]$

דוגמא 4: תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית אשר מחזוריה היסודי הוא $T = 4$. ידוע כי

$$f(x) = x^2, \text{ לכל } -2 \leq x \leq 2. \text{ שרטט את הגרף של } f(x) \text{ שמעל התחום } [-10, 10].$$

פתרון: בתחום $[-2, 2]$ הפונקציה $f(x)$ היא הפרבולה $y = x^2$. מאחר שהאורך של הקטע $[-2, 2]$ הוא מחזור אחד של הפונקציה, הרי שיש לשכפל את הגרף שבקטע זה פעמיים לצד ימין ופעמיים לצד שמאל, כפי שרואים בציור 45.



איור 45: פונקציה מחזורית אשר מחזורה הוא הפרבולה $y = x^2$ בקטע $[-2, 2]$

15.1 פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות

תהי A קבוצת מספרים ממשיים. נקרא ל- A **תחום סימטרי** אם לכל $x \in A$ גם $-x \in A$. למשל הקטע הפתוח $(-7, 7)$ הוא תחום סימטרי, וגם הקטע הסגור $[-4, 4]$ הוא תחום סימטרי, אך הקטע $(-5, 3)$ אינו תחום סימטרי, וגם הקטע החצי-פתוח $[-5, 5]$ אינו תחום סימטרי.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת מעל תחום סימטרי A . נאמר ש- $f(x)$ היא **פונקציה זוגית מעל התחום** A אם לכל $x \in A$ מתקיים התנאי: $f(-x) = f(x)$. אנו דורשים שתחום ההגדרה A יהיה סימטרי בכדי ששני הערכים x ו- $-x$ יהיו שייכים יחדיו לתחום A . נאמר ש- $f(x)$ היא **פונקציה אי-זוגית מעל התחום** A אם לכל x בתחום A מתקיים התנאי: $f(-x) = -f(x)$. כלומר, הערך של הפונקציה בנקודה $-x$ שווה למינוס הערך של הפונקציה בנקודה x .

דוגמה 5:

א. הפונקציה $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$ הן פונקציות זוגיות מעל כל $\mathbb{R}$. כי

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = \sqrt[3]{1+(-x)^4} = \sqrt[3]{1+x^4} = g(x)$$

ולכן, בשני המקרים קבלנו כי $f(-x) = f(x)$ ו- $g(-x) = g(x)$.
 ב. הפונקציות $y = x^3$ ו- $g(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ הן פונקציות אי-זוגיות בתחום הגדרתן. הפונקציה $f(x) = x^3$ מוגדרת מעל כל $\mathbb{R}$, ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

ולכן $f(-x) = -f(x)$ לכל x , ולכן $f(x) = x^3$ היא פונקציה אי-זוגית. קל לראות כי תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא הקטע $(-1, 1)$, שהוא תחום סימטרי.

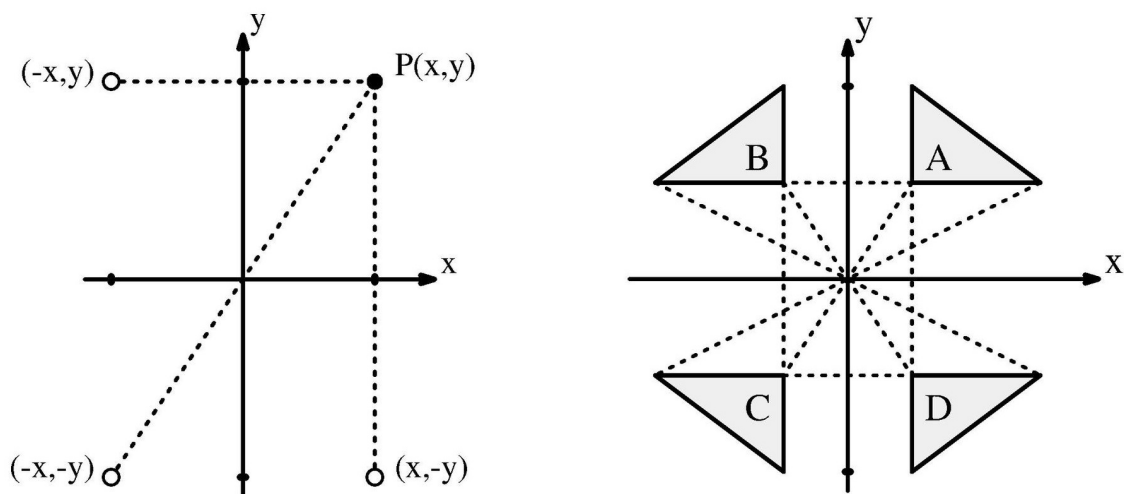
$$g(-x) = \log_2 \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \log_2 \frac{1-x}{1+x} = \log_2 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\log_2 \frac{1-x}{1+x} = -g(x)$$

קבלנו $g(-x) = -g(x)$, ולכן $g(x)$ אי-זוגית בקטע $(-1, 1)$.

נתאר עכשיו את הפירוש הגאומטרי של זוגיות או אי-זוגיות של פונקציה. תהי $P(x, y)$ נקודה כלשהיא במישור. הנקודה $(-x, y)$ נקראת הנקודה הסימטרית ל- P ביחס לציר- y . הנקודה $(x, -y)$ נקראת הנקודה הסימטרית ל- P ביחס לציר- x , והנקודה $(-x, -y)$ נקראת הנקודה הסימטרית ל- P ביחס לראשית הצירים (ראה ציור 46).

יהי G תחום מסוים המורכב מקבוצת נקודות (x, y) במישור. התחום G נקרא סימטרי ביחס לציר- y אם התנאי $(x, y) \in G$ גורר בהכרח שגם $(-x, y) \in G$. באופן דומה, התחום G נקרא סימטרי ביחס לציר- x אם התנאי $(x, y) \in G$ גורר בהכרח שגם $(x, -y) \in G$.

דוגמא 6: בציור 46 התחומים A ו- B סימטריים ביחס לציר ה- y , התחומים A ו- D סימטריים ביחס לציר ה- x , והתחומים A ו- C סימטריים ביחס לראשית הצירים. בנוסף לכך, התחומים B ו- C סימטריים ביחס לציר ה- x , התחומים C ו- D סימטריים ביחס לציר ה- y , והתחומים B ו- D סימטריים ביחס לראשית הצירים.



איור 46: סימטריה ביחס לציר- x , ציר- y , וראשית הצירים

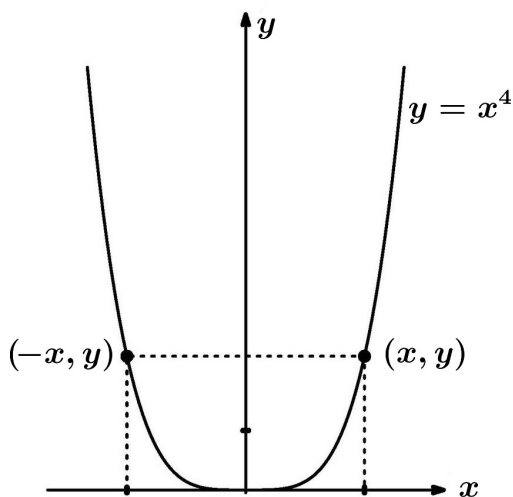
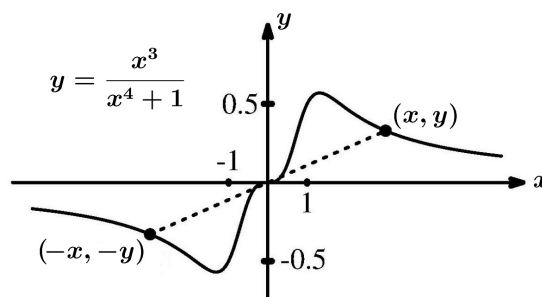
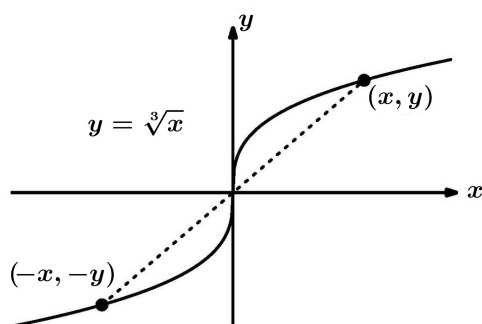
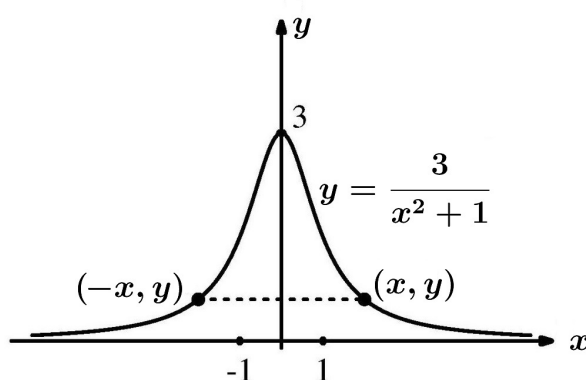
משפט: הגרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר- y . הגרף של פונקציה אי-זוגית סימטרי ביחס לראשית הצירים. **הוכחה:** תהי $f(x)$ פונקציה זוגית מעל תחום סימטרי D , ותהי (x_0, y_0) נקודה מסוימת על הגרף של f . אזי $x_0 \in D$, ולכן $-x_0 \in D$. מן הזוגיות של $f(x)$ נובע כי

$$f(-x_0) = f(x_0) = y_0$$

ולכן גם הנקודה $(-x_0, y_0)$ נמצאת על הגרף של $f(x)$. לכן הגרף של $f(x)$ סימטרי ביחס לציר- y . אם $f(x)$ אי-זוגית ואם (x, y) היא נקודה על הגרף של $f(x)$, כלומר $y = f(x)$, אזי גם $-y = f(-x)$, ולכן גם הנקודה $(-x, -y)$ נמצאת על הגרף של $f(x)$. לכן הגרף של $f(x)$ סימטרי ביחס לראשית הצירים. ■

דוגמא 7:

- א. הפונקציות $y = x^4$ ו- $y = \frac{3}{1+x^2}$ הן פונקציות זוגיות. בצויר 47 רואים כיצד הגרפים של פונקציות אלה סימטריים ביחס לציר ה- y .
- ב. הפונקציות $y = \sqrt[3]{x}$ ו- $y = \frac{x^3}{1+x^4}$ הן אי-זוגיות. בצויר 48 רואים כיצד הגרפים שלהן סימטריים ביחס לראשית הצירים.

איור 47: סמטריה ביחס לציר- y 

איור 48: סמטריה ביחס לראשית הצירים

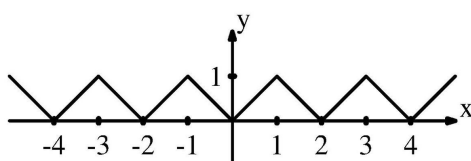
תרגילים

1. תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית שמחזורת היסודי הוא T . הוכח כי הפונקציה $g(x) = f(2x)$ מחזורית, ומחזורת היסודי הוא $\frac{1}{2}T$.
2. תהי $f(x)$ פונקציה זוגית ומחזורית, אשר מחזורת היסודי הוא $T = 2$. ידוע כי לכל x בקטע $[0, 1]$ מתקיים $f(x) = x$. שרטט את הגרף של $f(x)$.
3. הוכח כי הפונקציה $f(x) = x + \sin x$ אינה מחזורית.

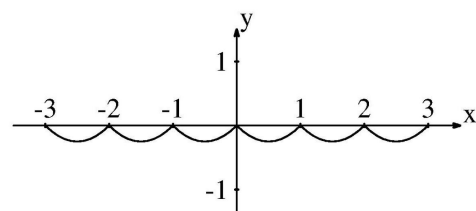
4. תן דוגמא לשתי פונקציות מחזוריות אשר סכומן אינו מחזורי.
5. שרטט את הגרף של הפונקציה $f(x) = x - 2 \cdot [x]$. האם פונקציה זו מחזורית?
6. שרטט את הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$, אשר מחזורה היסודי הוא $T = 1$, והמקיימת $f(x) = x^2 - x$ לכל $0 \leq x \leq 1$.
7. הוכח את כל אחת מן הטענות הבאות.
- סכום של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
 - סכום של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.
 - מכפלה או מנה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
 - מכפלה או מנה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
 - מכפלה או מנה של פונקציה זוגית עם פונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
8. בדוק את הזוגיות של הפונקציות הבאות
- $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 - $y = 5^x - 5^{-x}$
 - $y = x^2 + 3x$
 - $y = \sqrt[4]{1 + x^2 - x^4}$
 - $y = \frac{x - x^3}{\sqrt{x^6 + 1}}$
 - $y = \sin(x - \sin x^3)$
9. תהי $y = f(x)$ פונקציה כלשהיא המוגדרת בקטע הסימטרי $(-a, a)$. הוכח כי הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ זוגית והפונקציה $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ אי-זוגית בקטע $(-a, a)$. כמו כן, הראה כי $f(x) = g(x) + h(x)$, והסק מכך שכל פונקציה ניתן להציג כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.
10. הראה כי $f(x) = 3^x + x^2 + 2x + 1$ אינה זוגית וגם אינה אי-זוגית בכל קטע סימטרי $(-a, a)$. בהסתמך על התרגיל הקודם, מצא פונקציה זוגית $g(x)$ ופונקציה אי-זוגית $h(x)$ כך ש- $f(x) = g(x) + h(x)$.

תשובות סופיות

2. ציור 49. 4. למשל $y = x - [x]$ ו- $y = \sin x$. 5. הפונקציה אינה מחזורית. 6. ציור 50.
8. א. זוגית ב. אי-זוגית ג. לא זוגית ולא אי-זוגית ד. זוגית ה. אי-זוגית
- י. אי-זוגית



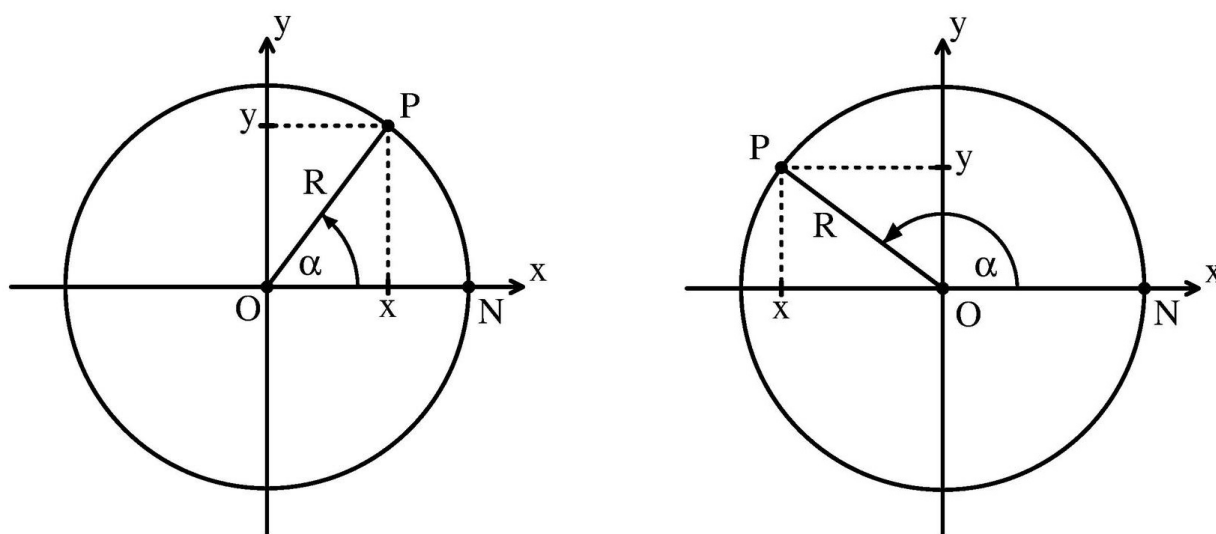
איור 49: גרף הפונקציה בשאלה 2



איור 50: גרף הפונקציה בשאלה 6

16. פונקציות טריגונומטריות

לפני שנגש להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות היסודיות, נציג הגדרה מדויקת של מושג הזווית, ואת הדרכים השונות למדידת זוויות. בחשבון הדיפרנציאלי ובענפים אחרים של מתמטיקה גבוהה, משתמשים במושגים יותר כלליים של זווית מכפי שזה מקובל במתמטיקה תיכונית או יסודית.



איור 51: "צוג זוויות על המעגל הטריגונומטרי"

נתבונן במעגל אשר מרכזו נמצא בנקודה $O = (0, 0)$ במערכת הצירים הרגילה, ואשר רדיוסו הוא R . תהי P נקודה כלשהיא על היקפו, ותהי N הנקודה $(R, 0)$ שעל ציר ה- x . אם הרדיוס ON ינוע **בניגוד לכוון השעון** עד שיתלכד עם הרדיוס OP נקבל **זווית חיובית** α , כפי שרואים בארבעה מצבים טיפוסיים בציורים 51 ו-52. אם כוון התנועה של הרדיוס ON הוא **בכוון השעון** אז נקבל **זווית שלילית**. הקשת $\widehat{NP}$, עליה נשענת הזווית α , משמשת למדידת הזווית α בשתי דרכים עקריות:

א. מדידה במעלות:

נחלק את כל המעגל ל-360 קשתות שוות. זווית הנשענת על קשת כזאת נקראת **מעלה** (1°). אורך כל המעגל הוא כמובן $2\pi R$, ולכן אורכה של כל קשת כזו יהיה $\frac{2\pi R}{360}$. גודלה של זווית כלשהיא α במעלות יהיה שווה למספר המעלות הדרושות בכדי לקבל את הזווית α . במילים אחרות, בכדי למדוד את גודלה של זווית α במעלות, עלינו לחלק את אורך הקשת $\widehat{NP}$ ב- $\frac{2\pi R}{360}$. הנוסחה המדויקת שנקבל היא לכן

$$\alpha \text{ במעלות} = \frac{\widehat{NP}}{2\pi R} \cdot 360$$

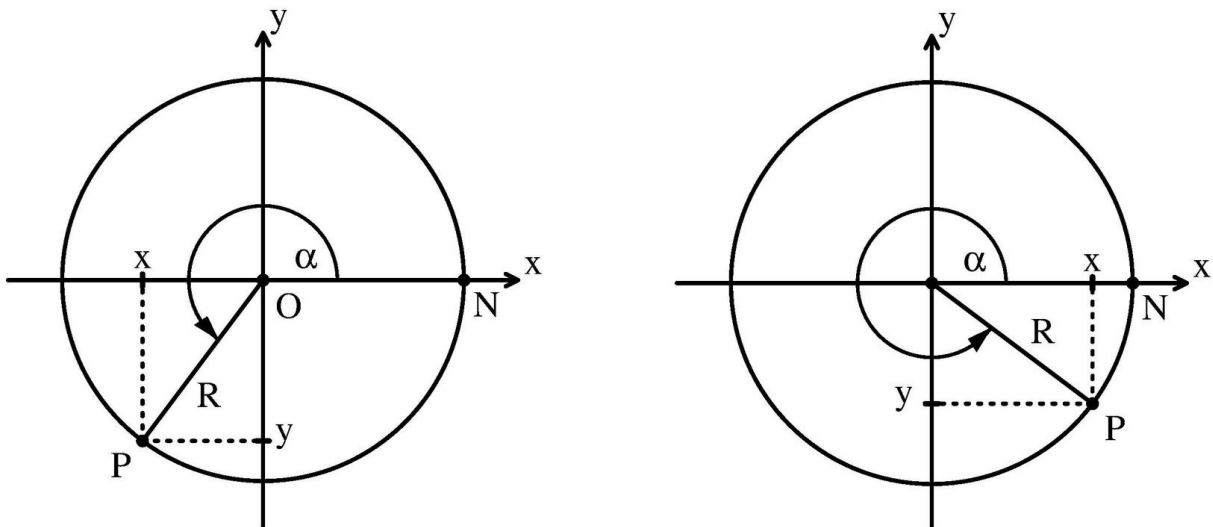
מנוסחה זו נקבל גם את הנוסחה $\widehat{NP} = \frac{2\pi R \cdot \alpha}{360}$, המשמשת למציאת אורך הקשת $\widehat{NP}$ כאשר ידועה לנו הזווית α .

ב. מדידה ברדיאנים:

בחשבון הדיפרנציאלי, ובענפים מתקדמים אחרים של המתמטיקה, מקובל למדוד זוויות ע"י **רדיאנים**. גודלה של הזווית α ברדיאנים הוא היחס שבין הקשת $\widehat{NP}$ והרדיוס:

$$\alpha \text{ ברדיאנים} = \frac{\widehat{NP}}{R}$$

זווית בת רדיאן אחד היא זווית אשר עברה $\widehat{NP} = R$, כלומר זווית הנשענת על קשת שאורכה שווה לרדיוס R . אורכו של כל המעגל הוא $2\pi R$, ולכן זווית בת 360° שווה לזווית בת 2π רדיאנים.



איור 52: "צוג זוויות על המעגל הטריגונומטרי"

נוסחת המעבר ממעלות לרדיאנים היא

$$\alpha \text{ ברדיאנים} = \frac{(\alpha \text{ במעלות}) \cdot \pi}{180}$$

ונוסחת המעבר מרדיאנים למעלות היא

$$\alpha \text{ במעלות} = \frac{(\alpha \text{ ברדיאנים}) \cdot 180}{\pi}$$

ע"י נוסחאות אלה קל לבנות טבלאות ערכים עבור זוויות המופיעות באופן תדיר בספרות המתמטית:

ערכים של זווית מיוחדות ברדיאנים ומעלות

מעלות	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
רדיאנים	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

נתבונן שוב בציורים 51 ו-52. כאמור, לכל זווית α מתאימה נקודה P על המעגל. אם נטיל את הנקודה P על שני הצירים, נקבל את הקואורדינטות שלה (x, y) . המספרים x ו- y הם המפתח להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

קיימים קשרים רבים בין פונקציות אלה. קשרים כאלה מבוטאים לרוב ע"י מה שקרוי **זהויות טריגונומטריות**. קיים מספר גדול מאוד של זהויות טריגונומטריות, אך רובם ככולם נובעים ממספר מצומצם של זהויות יסודיות. בזהויות היסודיות עצמן נעשה שימוש רב בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי ובתחומים מתקדמים יותר אשר אינם דווקא קשורים לטריגונומטריה. לכן נציג כאן רשימה של הזהויות היסודיות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\pi - \alpha) & \tan \alpha &= -\tan(\pi - \alpha) \\ \cos \alpha &= -\cos(\pi - \alpha) & \cot \alpha &= -\cot(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & \tan \alpha &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \cos \alpha &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) & \cot \alpha &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

נוסחאות עבור סכום והפרש של שתי זוויות

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

נוסחאות עבור זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

נוסחאות מעבר ממכפלה לסכום

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

נוסחאות מעבר מסכום למכפלה

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

טבלת ערכים עבור זוויות מיוחדות

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

16.1 המחזוריות והזוגיות של הפונקציות הטריגונומטריות

דוגמא 1: הוכח כי לכל זווית α מתקיימים כל הזהויות הבאות:

$$\text{א. } \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \quad \text{ב. } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \quad \text{ד. } \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\text{ה. } \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha \quad \text{ו. } \cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

$$\text{ז. } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{ח. } \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\text{ט. } \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad \text{י. } \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

הוכחה: נתבונן בציורים 51 ו-52. לכל זווית α מותאמת נקודה $P(x, y)$ על המעגל. הזווית $\alpha + 2\pi$ מתקבלת ע"י הזווית α בתוספת סיבוב שלם אחד נוסף (נגד כוון השעון כמובן), ולכן אנו חוזרים לאותה הנקודה $P(x, y)$. כלומר, גם לזווית $\alpha + 2\pi$ מותאמת אותה הנקודה $P(x, y)$, ולכן לכל α

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \frac{y}{R} = \sin \alpha$$

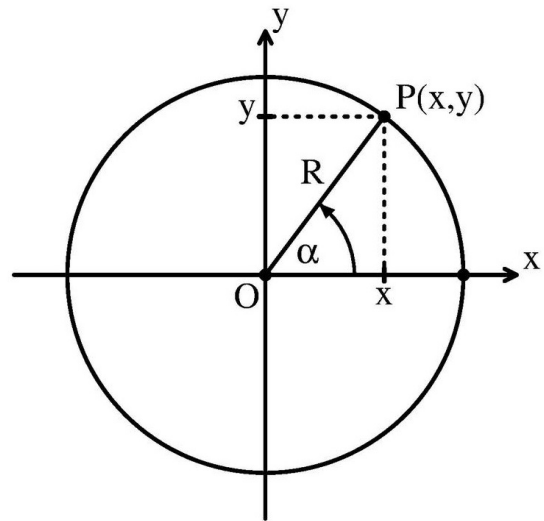
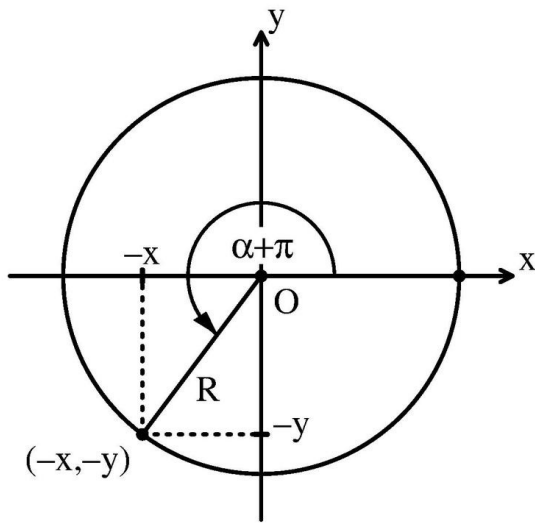
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \frac{x}{R} = \cos \alpha$$

באופן דומה, נניח כי לזווית α מתאימה הנקודה $P(x, y)$ על המעגל. זווית $\alpha + \pi$ מתקבלת ע"י סיבוב הרדיוס OP ב- 180° נגד כוון השעון. לכן לזווית $\alpha + \pi$ תתאים הנקודה $P(-x, -y)$ כפי שרואים בציור 53.

לכן מן ההגדרה של $\sin \alpha$ ו- $\cos \alpha$ נובע שוב

$$\sin(\alpha + \pi) = \frac{-y}{R} = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = \frac{-x}{R} = -\cos \alpha$$



איור 53: "ציג זוויות על המעגל הטריגונומטרי"

$$\tan(\alpha + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot \alpha$$

לזווית $-\alpha$, כפי שרואים בציור 54 מותאמת הנקודה $(x, -y)$ ולכן

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\sin \alpha$$

לעומת זאת $\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos \alpha$. באופן דומה נוכיח כי:

$$\tan(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha + \pi) = \frac{-x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot \alpha$$



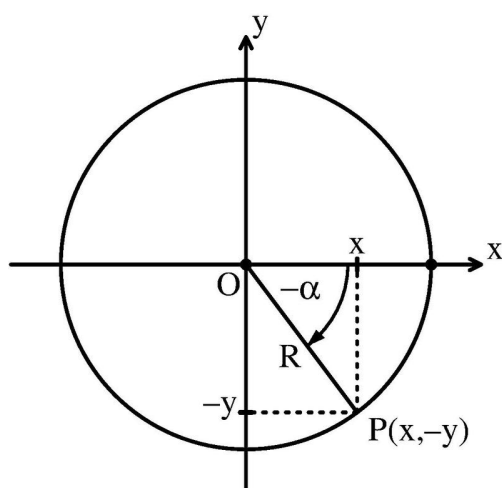
ובכך השלמנו את הוכחת כל הזהויות שרשמנו לעיל.

נעבור עכשיו למסקנות הנובעות מן התרגיל הקודם.

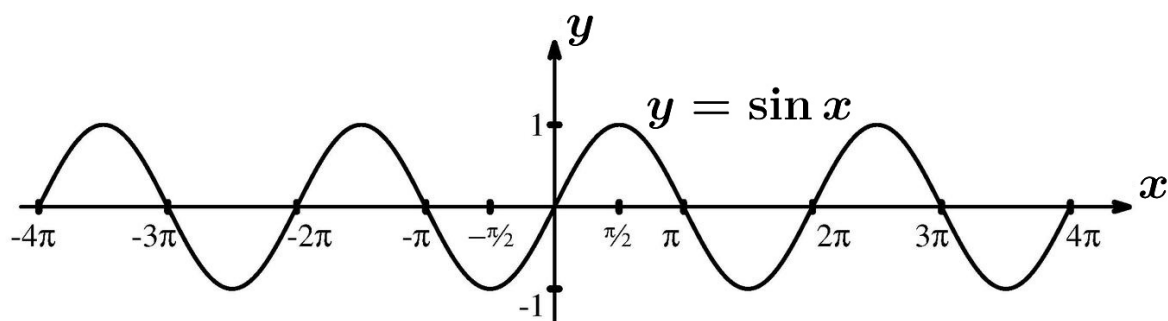
1. הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ הן פונקציות מחזוריות. לשתיהן אותו מחזור יסודי $T = 2\pi$. עובדה זו נובעת משתי הזהויות הראשונות של דוגמאות 1. נשאר לקרוא לבדוק מדוע $T = 2\pi$ הוא המחזור הקטן ביותר של שתי הפונקציות. הגרפים של $\sin x$ ו- $\cos x$ נתונים בציורים 55 ו-56.

2. הפונקציות $\tan x$ ו- $\cot x$ הן פונקציות מחזוריות. לשתיהן אותו מחזור יסודי $T = \pi$. עובדה זו נובעת מהזהויות החמישית והשישית מדוגמא 1. עובדה זאת מתבטאת בגרפים של שתי פונקציות אלה שנתונים בציורים 57 ו-58.

3. הפונקציה $\sin x$ היא אי-זוגית. זה יוצא מייד מן הזהות השביעית של דוגמאות 1.



איור 54: ייצוג זוויות שליליות על המעגל הטריגונומטרי

איור 55: הגרף של הפונקציה $y = \sin x$

4. הפונקציה $\cos x$ היא זוגית. זה יוצא מייד מן הזהות השמינית של דוגמאות 1.

5. הפונקציות $\tan x$ ו- $\cot x$ שתיהן אי-זוגיות. זה יוצא מייד מן הזהות התשיעית והעשירית של דוגמאות 1.

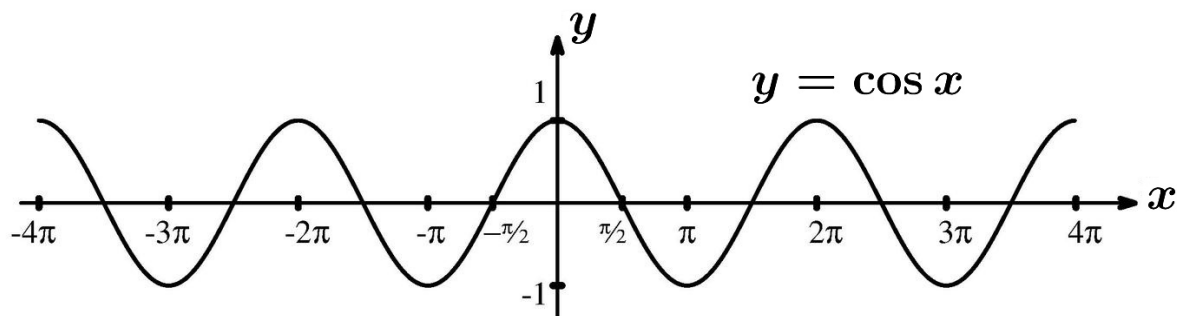
באמצעות תכונות יסודיות אלה ניתן להוכיח עובדות רבות אחרות אודות פונקציות טריגונומטריות יותר מורכבות. גם הגרפים שראינו עשויים לסייע לנו לשרטט גרפים של פונקציות טריגונומטריות אחרות ולהבין את התנהגותן.

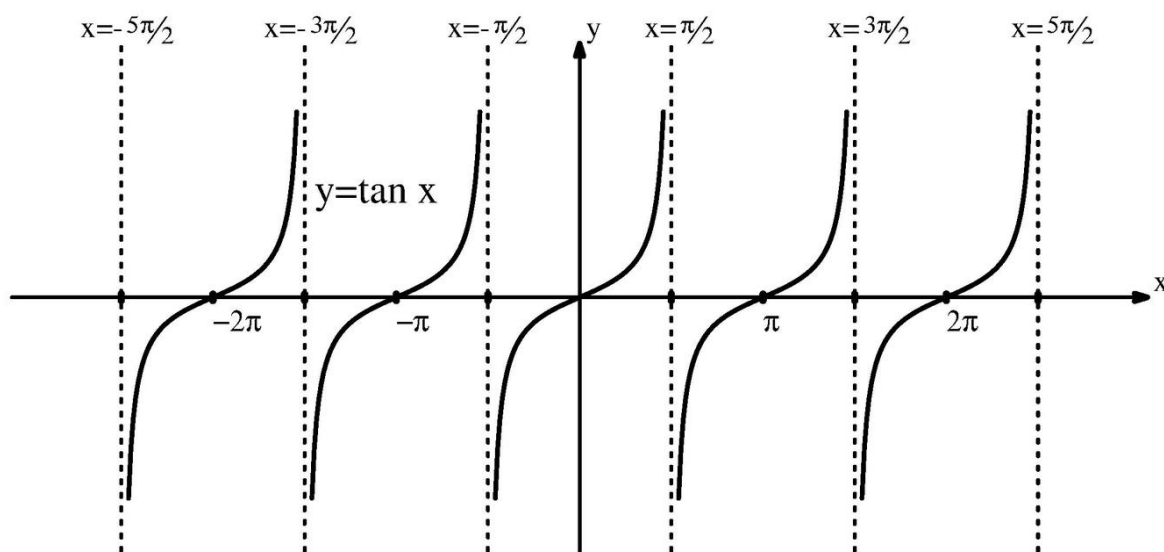
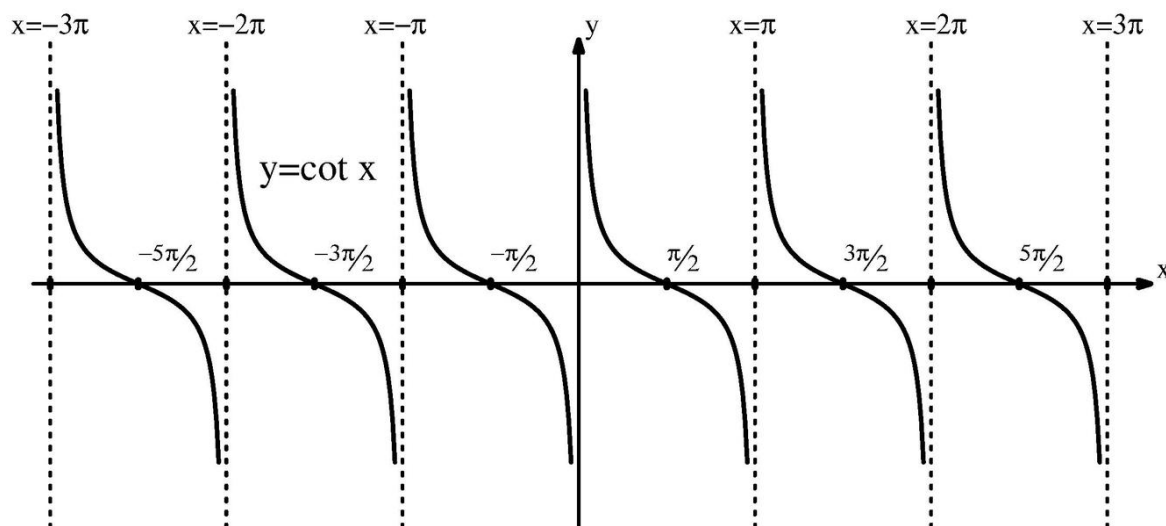
דוגמא 2: שרטט את הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות הבאות

א. $f(x) = |\sin x|$

ב. $f(x) = 1 + 3 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

בדוק אם הן מחזוריות, זוגיות, או אי-זוגיות.

איור 56: הגרף של הפונקציה $y = \cos x$

איור 57: הגרף של הפונקציה $y = \tan x$ איור 58: הגרף של הפונקציה $y = \cot x$ **פתרון:**

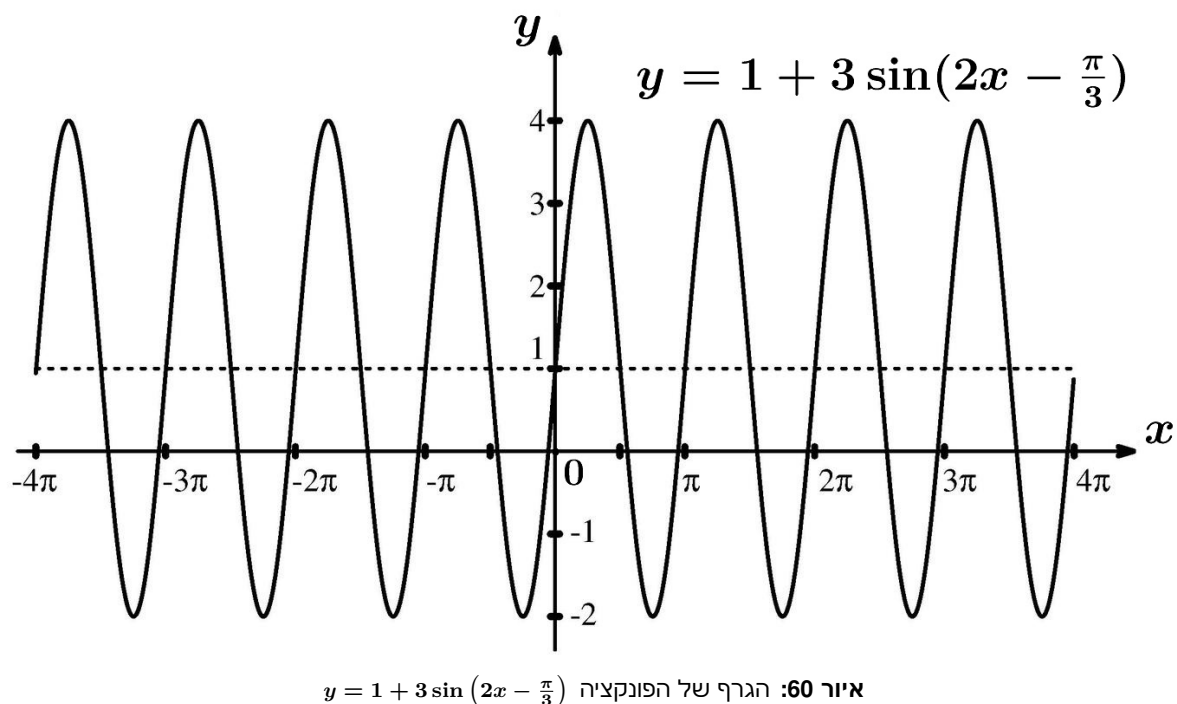
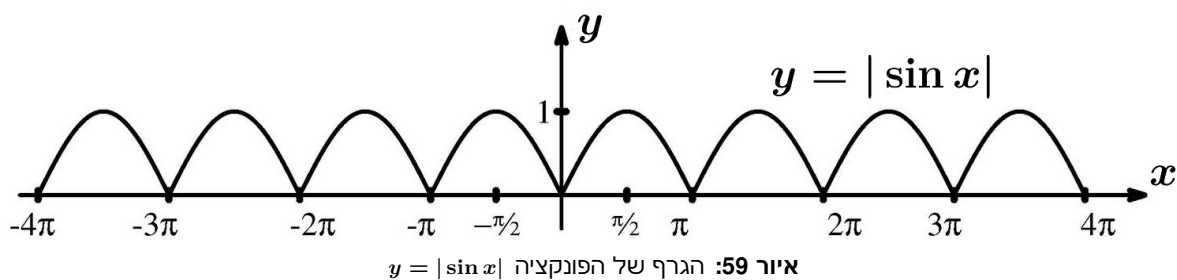
א. נסתמך על הגרף של $\sin x$ הנתון בציור 55. ברור שכל החלקים של הגרף הנמצאים מעל לציר ה- x ישארו במקומם, בעוד ששאר בחלקים יתהפכו. לכן הגרף של $|\sin x|$ יראה כך

הפונקציה $f(x) = |\sin x|$ היא זוגית כי לכל x ,

$$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

כמו כן, $f(x)$ מחזורית והמחזור היסודי שלה הוא $T = \pi$. בכדי להוכיח זאת נסתמך על הזהות השלישית של דוגמאות 1

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$



קבלנו, לכן, שלכל x מתקיים $f(x + \pi) = f(x)$.

ב. על סמך עובדה 1 לעיל, הפונקציה $\sin x$ מחזורית ומחזור היסודי הוא 2π . על סמך עובדה זו נקבל

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= 1 + 3 \sin\left(2(x + \pi) - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \\ &= 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

לכן לכל x , $f(x + \pi) = f(x)$, ולכן π הוא המחזור היסודי של $f(x)$. הפונקציה אינה זוגית כי אם נקח למשל את $x = \frac{\pi}{3}$ אז $f(\frac{\pi}{3}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ו- $f(-\frac{\pi}{3}) = 1$, ולכן $f(-x) \neq f(x)$. כמו כן $f(-x) \neq -f(x)$, אינה אי-זוגית גם כן. על סמך היכרות מוקדמת עם דוגמאות 1, נוכל לתאר את הגרף של $f(x)$ כמתקבל מן הגרף של $\sin x$ באמצעות סדרת הפעולות הבאות:

1. כוץ אופקי פי 2.
2. הזזה אופקית ב- $\frac{\pi}{3}$ יחידות לכוון החיובי.

3. מתיחה אנכית פי 3.
 4. הזזה אנכית ביחידה אחת כלפי מעלה.
 אחרי סדרת כל הפעולות הללו מתקבל הגרף של $f(x)$: שנתון בציור 60.

תרגילים

1. הוכח את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{א.}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{ג.}$$

2. שרטט את הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות הבאות:

$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{א.} \quad f(x) = |\cos x| \sin x \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \sin x + |\sin x| \quad \text{ג.} \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad \text{ד.}$$

3. הוכח כי הפונקציות הבאות מחזוריות ומצא את מחזורן היסודי

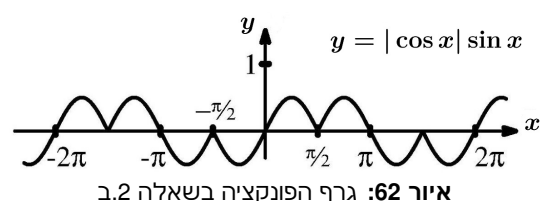
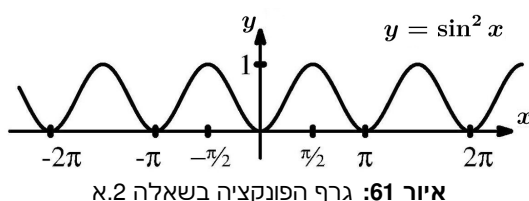
$$f(x) = \cos^3(3x) \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin 2x \cdot \sin 6x \quad \text{ג.}$$

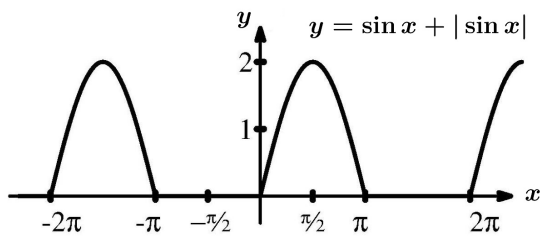
4. לגבי כל אחת מן הפונקציות שבתרגילים 2 ו-3, קבע אם זוגית, אי-זוגית, או אף אחד מן השניים.

5. האם הפונקציה $y = x + \sin x$ מחזורית?

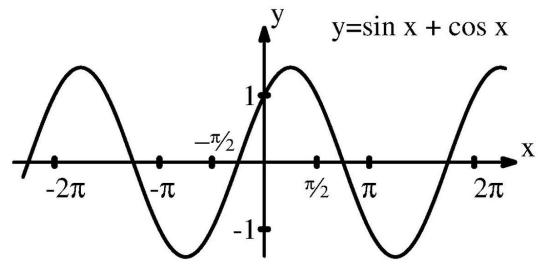
תשובות סופיות

2. א. ראה ציור 61 ב. ציור 62 ג. ציור 63 ד. ציור 64
 4. הפונקציות הזוגיות הן: $\sin^2 x$, $\sin 2x \sin 6x$, $\cos^3(3x)$. הפונקציות האי-זוגיות הן: $|\cos x| \sin x$, $\frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x}$. כל שאר הפונקציות אינן זוגיות ואינן אי-זוגיות.
 5. הפונקציה אינה מחזורית.





איור 63: גרף הפונקציה בשאלה 2.ג

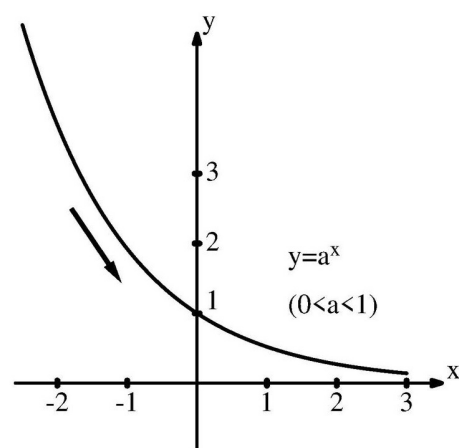
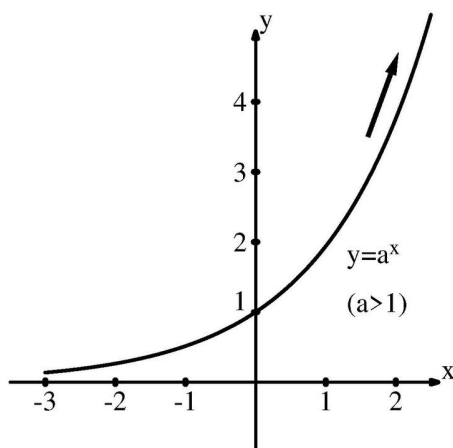


איור 64: גרף הפונקציה בשאלה 2.ד

17. פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות

נתחיל בתאור של הפונקציות המעריכיות. יהי a מספר ממשי חיובי שונה מ-1. הפונקציה $f(x) = a^x$ נקראת **פונקציה מעריכית** (או אקספוננציאלית). המספר a הוא **בסיס החזקה** והמספר x הוא **המעריך**. להלן רשימת התכונות העקריות של פונקציות אלה:

1. תחום ההגדרה של a^x הוא $\mathbb{R}$. כלומר הפונקציה a^x מוגדרת לכל מספר ממשי x .
2. לכל מספר ממשי x , $a^x > 0$, ולהיפך, לכל מספר ממשי $y > 0$ קיים x כך ש- $y = a^x$.
3. אם $a > 1$ אזי הפונקציה a^x מונוטונית עולה ממש. כלומר, אם $x_1 < x_2$ אז $a^{x_1} < a^{x_2}$.
4. אם $0 < a < 1$ אזי הפונקציה a^x מונוטונית יורדת ממש. כלומר, אם $x_1 < x_2$ אז $a^{x_1} > a^{x_2}$.

איור 65: הפונקציה $y = a^x$ מונוטונית עולה ממש כאשר $a > 1$, ומונוטונית יורדת ממש כאשר $0 < a < 1$

5. לכל x_1 ו- x_2 , $a^{x_1} = a^{x_2}$ אם ורק אם $x_1 = x_2$. כלומר, $f(x) = a^x$ חד-חד-ערכית.
6. מתכונות 1 ו-2 יוצא שהפונקציה $f(x) = a^x$ היא פונקציה מ- $\mathbb{R}$ על קבוצת המספרים הממשיים החיוביים $\mathbb{R}^+ = \{y \mid y > 0\}$.

7. נסיים ברשימת הכללים היסודיים של הפעולות המתמטיות:

$$\begin{aligned} a^x \cdot b^x &= (ab)^x \\ a^{x_1 \cdot x_2} &= (a^{x_1})^{x_2} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ a^{x_1-x_2} &= \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} \end{aligned}$$

כאשר x_1, x_2 ו- x הם מספרים ממשיים כלשהם, m ו- n מספרים טבעיים.

דוגמא 1: פתור את אי-השוויונים הבאים

א. $(3.2)^x > (3.2)^5$ ב. $(0.3)^x > (0.3)^5$

פתרון:

א. $3.2 > 1$ ולכן על פי תכונה 3 הפונקציה $f(x) = 3.2^x$ היא מונוטונית עולה ממש. לכן אי-השוויון $3.2^x > 3.2^5$ מתקיים אם ורק אם $x > 5$.
 ב. $0 < 0.3 < 1$ ולכן על פי תכונה 4 הפונקציה $f(x) = 0.3^x$ היא מונוטונית יורדת ממש. לכן אי-השוויון $0.3^x > 0.3^5$ מתקיים אם ורק אם $x < 5$.

דוגמא 2: נתונות הפונקציות $f(x) = 9^x$ ו- $g(x) = 4 \cdot 3^x - 3$.

א. קבע עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$?
 ב. באיזה נקודות במישור נפגשים הגרפים של שתי הפונקציות?

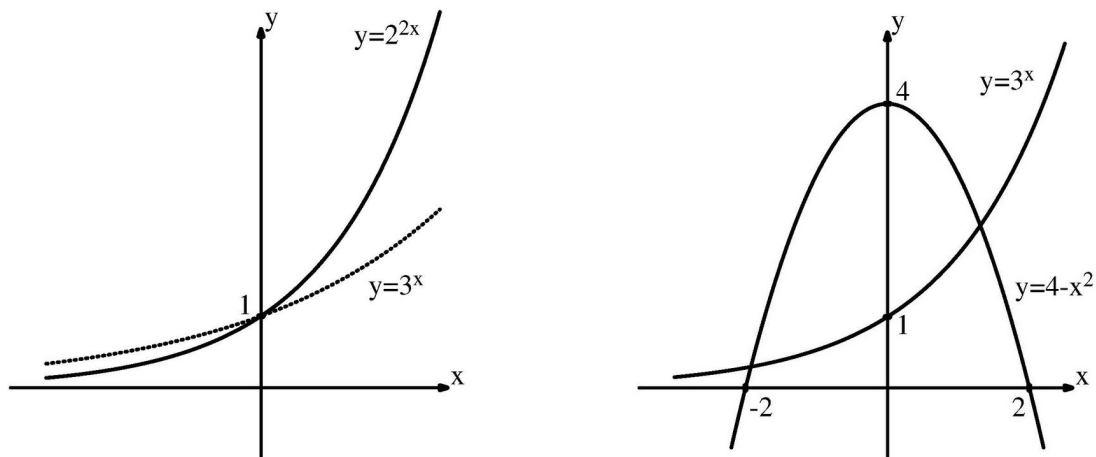
פתרון:

א. צריך לפתור את המשוואה $9^x = 4 \cdot 3^x - 3$ השקולה למשוואה $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. נציב $u = 3^x$ ונקבל משוואה ריבועית $u^2 - 4u + 3 = 0$ אשר שורשיה הם $u_1 = 3$ ו- $u_2 = 1$. לשורש הראשון יתאים הפתרון $x_1 = 1$ ולשורש השני $x_2 = 0$. מכאן שהשוויון $f(x) = g(x)$ מתקיים עבור $x_1 = 1$ ו- $x_2 = 0$.
 ב. נקודה (x, y) במישור היא נקודת מפגש של שני הגרפים אם ורק אם $y = f(x) = g(x)$. על סמך הסעיף הקודם, השוויון $f(x) = g(x)$ מתקיים עבור $x_1 = 1$ ו- $x_2 = 0$. לנקודה $x_1 = 1$ מתאים הערך $y = f(1) = g(1) = 9$, ולנקודה $x_2 = 0$ מתאים הערך $y_2 = f(0) = g(0) = 1$. מכאן ששני הגרפים נחתכים בנקודות $(1, 9)$ ו- $(0, 1)$.

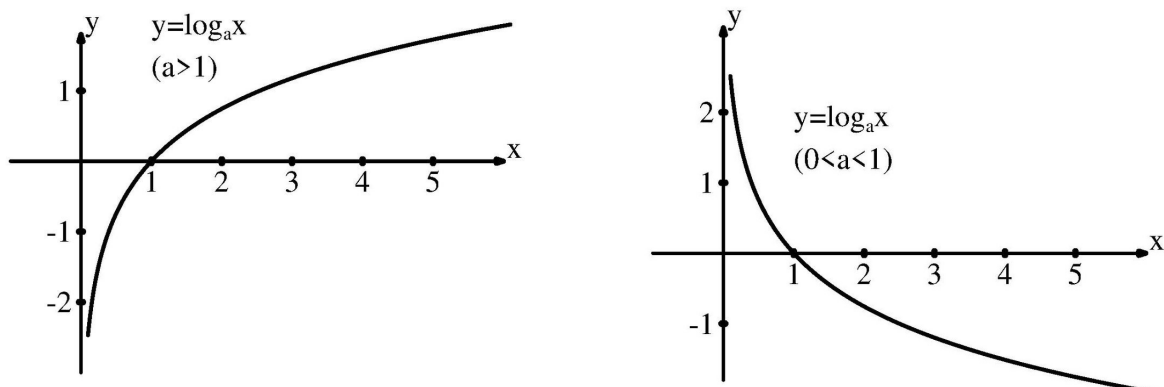
דוגמא 3: עבור אילו ערכים של x הגרף של הפונקציה $y = 3^x$ נמצא מעל לגרף של הפונקציה $y = 2^{2x}$?

פתרון: עלינו לפתור את אי-השוויון $3^x > 2^{2x}$, השקול לאי-השוויון $3^x > 4^x$, השקול ל- $(\frac{3}{4})^x > 1$. על סמך תכונה 4 לעיל, הפונקציה $f(x) = (\frac{3}{4})^x$ היא מונוטונית יורדת ממש. מאחר ו- $f(0) = 1$, הרי שלכל $x < 0$ יתקיים $f(x) > 1$. לכן הגרף של $y = 3^x$ נמצא מעל לגרף של $y = 2^{2x}$ בנקודות $x < 0$ (ראה ציור 66).

דוגמא 4: קבע בדרך גרפית כמה פתרונות שונים יש למשוואה $3^x = 4 - x^2$.
פתרון: נסמן $f(x) = 4 - x^2$ (פונקציה ריבועית), ו- $g(x) = 3^x$ (פונקציה מעריכית).
 ברור שלמשוואה $3^x = 4 - x^2$ קיימים פתרונות אם ורק אם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נפגשים, ומספר הפתרונות שווה למספר נקודות המפגש שבין הגרפים. לכן מציור 66 ברור כי למשוואה הנ"ל בדיוק שני פתרונות.



איור 66: פיתרון משוואה על ידי חיתוך שני גרפים



איור 67: הפונקציה $y = \log_a x$ מונוטונית עולה ממש כאשר $a > 1$, ומונוטונית יורדת ממש כאשר $0 < a < 1$

17.1 הפונקציות הלוגריתמיות

תהי $y = f(x) = a^x$ פונקציה מעריכית נתונה. על פי תכונה 5 של הפונקציות המעריכיות, $f(x)$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ- $\mathbb{R}$ על $\mathbb{R}^+$. לכן קיימת ל- $y = f(x)$ פונקציה הפוכה $x = f^{-1}(y)$ אותה מקובל לסמן ע"י $\log_a$. במילים אחרות, אם $y = a^x$ אז $x = \log_a y$, ולהיפך: המשמעות של הטענה $x = \log_a y$ היא $y = a^x$. מעובדה זו ניתן לגזור את כל התכונות העקריות של הפונקציות הלוגריתמיות.

1. הפונקציה $y = \log_a x$ מוגדרת רק עבור $x > 0$, כי $x = a^y$, והרי $a^y > 0$, לכל y ממשי.

2. הפונקציה $f(x) = \log_a x$ היא על $\mathbb{R}$. כלומר, לכל מספר ממשי y (חיובי או שלילי), קיים $x > 0$ כך ש- $y = \log_a x$.

3. אם $a > 1$ אז הפונקציה $f(x) = \log_a x$ היא מונוטונית עולה ממש בתחום $(0, \infty)$. כלומר, לכל שני מספרים ממשיים חיוביים x_1 ו- x_2 ,

$$x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2 \quad (a > 1)$$

4. אם $0 < a < 1$ אז הפונקציה $f(x) = \log_a x$ היא מונוטונית יורדת ממש בתחום $(0, \infty)$. כלומר, לכל שני מספרים ממשיים חיוביים x_1 ו- x_2 ,

$$x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2 \quad (0 < a < 1)$$

ראה ציור 67 עבור המחשה גרפית של שתי התכונות האחרונות.

5. על סמך רשימת חוקי החזקה (סעיף 7 של תכונות הפונקציות המעריכיות) לא קשה להוכיח את כל אחד מן הנוסחאות הבאות

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^\beta = \beta$$

$$-\log_a x = \log_a \frac{1}{x}$$

$$\log_a y + \log_a z = \log_a yz$$

$$\log_a y - \log_a z = \log_a \frac{y}{z}$$

$$\beta \cdot \log_a y = \log_a y^\beta$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

בנוסחאות אלה יש להניח כמובן ש- $x, y, z > 0$, $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$. המספר β שבנוסחה הרביעית יכול להיות כל מספר ממשי (מדוע?).

דוגמא 5: הוכח כי לכל $a, b > 0$ השונים מ-1 מתקיים $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. **הוכחה:** נשתמש בנוסחה החמישית של סעיף 5. אם נקח $c = b$ אזי

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

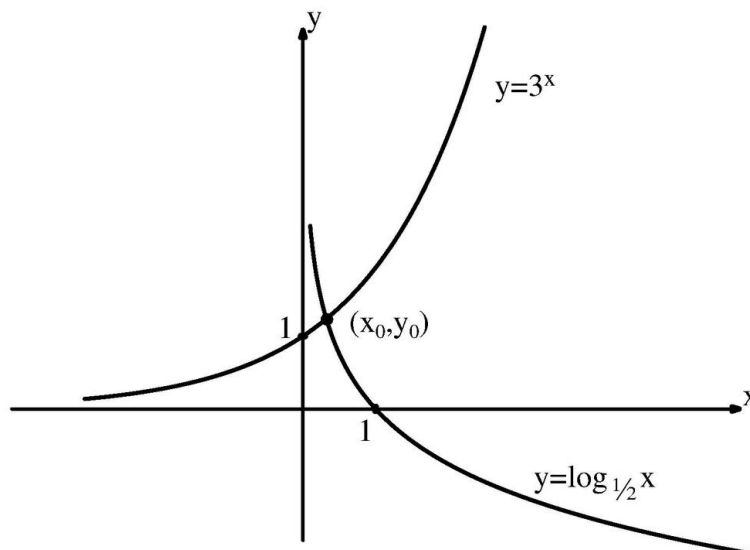
דוגמא 6: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = 3 + \log_2(x+1)$ ואת הנקודות אשר בהן הגרף שלה חותך את הצירים.

פתרון: כאמור, פונקציית הלוגריתם מוגדרת רק עבור מספרים ממשיים, ולכן $f(x)$ מוגדרת רק עבור ערכי x המקיימים $x+1 > 0$. לכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא

$x > -1$. הערך של הפונקציה בנקודה $x = 0$ הוא $f(0) = 3 + \log_2 1 = 3$, ולכן הגרף של $f(x)$ פוגש את ציר- y בנקודה $(0, 3)$. בכדי למצוא את נקודות המפגש עם ציר- x , יש למצוא את ערכי x המקיימים $f(x) = 0$. נקבל משוואה $3 + \log_2(x + 1) = 0$, ולכן $\log_2(x + 1) = -3$, ולכן $x + 1 = 2^{-3}$, ולכן $x = -\frac{7}{8}$. לכן הגרף של $f(x)$ פוגש את ציר- x בנקודה $(-\frac{7}{8}, 0)$.

דוגמא 7: הוכח בדרך גרפית כי למשוואה $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x$ יש בדיוק פתרון אחד x_0 , ופתרון זה מקיים $0 < x_0 < 1$.

הוכחה: כפי שכבר ראינו בדוגמא 4, למשוואה יש פתרון רק כאשר הגרף של $\log_{\frac{1}{2}} x$ פוגש את הגרף של 3^x . מאחר והפונקציה $\log_{\frac{1}{2}} x$ מונוטונית יורדת ממש (ראה תכונה 4 של פונקציית הלוגריתם), ומאחר והפונקציה 3^x מונוטונית עולה ממש, הרי שקיימת לכל היותר נקודת מפגש אחת בין שני הגרפים. מכאן נובע שלא ייתכן יותר מפתרון אחד למשוואה. נותר רק להוכיח את קיומה של נקודת מפגש אחת. עובדה זו נראית ע"י שרטוט מקורב של שני הגרפים כפי שרואים בציר 68. בשרטוט רואים גם שנקודת המפגש (x_0, y_0) מקיימת $0 < x_0 < 1$.



איור 68: הוכחה גרפית לפיתרון יחיד של השוויון $\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x$ בתוך הקטע $(0, 1)$

תרגילים

1. מצא את התחום שבו הגרף של $y = 4^x$ נמצא מעל לגרף של $y = (\frac{1}{2})^{x-1}$.
2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}$.
3. קבע בדרך גרפית כמה פתרונות יש למשוואה $(\frac{1}{2})^x = 2x - x^2$.

4. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \log_2(x^2 - 2x)$.

5. נתונה הפונקציה $y = 1 + \log_2(x + 2)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. עבור אילו ערכים של x הגרף של הפונקציה נמצא מעל לציר ה- x ?

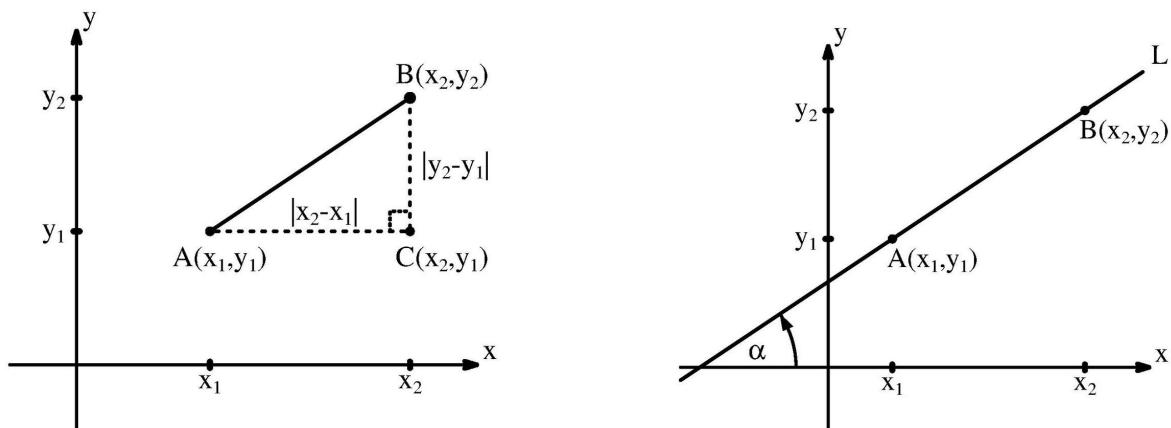
6. נמק מדוע לכל $x > 0$ ולכל a מתקיימת הזהות $x^a = 10^{a \log_{10} x}$?

תשובות סופיות

1. $x > \frac{1}{3}$ 2. $x > 1$ או $x < 0$ 3. שני פתרונות 4. $x > 2$ או $x < 0$ 5.
א. $x > -2$ ב. $x > -\frac{3}{2}$

18. מושגים יסודיים בהנדסה אנליטית

ההנדסה האנליטית היא ענף מתמטי המטפל בבעיות גאומטריות בשיטות אלגבריות (או שיטות אנליטיות). הצעד הראשון (ואולי הכי חשוב) בכיוון זה נעשה ע"י המתמטיקאי והפילוסוף רנה דקארט (אשר שמו הלטיני היה Renetus Cartesius) אשר התאים לכל נקודה P במישור זוג מספרים ממשיים (x, y) ביחס למערכת הצירים הרגילה, הקרויה **מערכת צירים קרטזית** על שמו. במערכת הצירים הקרטזית ניתן להציג צורות גאומטריות שונות ע"י משוואות אלגבריות. למשל ישר במישור מציגים ע"י המשוואה $y = ax + b$. כמו כן, ניתן לבטא גדלים גאומטריים שונים ע"י נוסחאות אלגבריות מתאימות. נתחיל במציאת נוסחה למרחק שבין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ במישור. לשם כך נתבונן בציור 69. נעביר קטע BC המקביל לציר- y וקטע AC המקביל לציר- x ונקבל משולש ישר זווית ABC .



איור 69: שיפוע ומרחק בין שתי נקודות במישור

ברור כי $AC = |x_2 - x_1|$ ו- $BC = |y_2 - y_1|$ ולכן על פי משפט פיתגורס נקבל

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ולכן נוסחת המרחק בין הנקודה A לנקודה B היא

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

דוגמא 1: חשב את המרחק בין הנקודה $A(7, 2)$ לנקודה $B(11, 5)$.

פתרון: על פי הנוסחה, $AB = \sqrt{(11 - 7)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5$.

18.1 שיפוע של ישר

יהי L קו ישר במישור, ותהי α הזווית שבין הישר לציר ה- x החיובי, כפי שרואים בציור 69. **השיפוע של הישר** מוגדר להיות המספר $a = \tan \alpha$. יהיו $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ שתי נקודות שונות על הישר L . משני הציורים הנ"ל לא קשה לקבל את הנוסחה הבאה עבור שיפוע הישר:

$$\text{שיפוע הישר} = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ברור שאם (x, y) היא נקודה כלשהיא על הישר L אז

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan \alpha = a$$

ולכן $y - y_1 = a(x - x_1)$, ולכן $y = ax + (y_1 - ax_1)$. הביטוי $y_1 - ax_1$ מסמן מספר קבוע, ולכן אם נסמן $b = y_1 - ax_1$ נקבל את המשוואה המפורשת של הישר L :

$$y = ax + b$$

קל לראות כי הנקודה $(0, b)$ במישור היא נקודת המפגש שבין הישר L ובין ציר- y .

לבסוף נציין שני מצבים מיוחדים של ישר במישור:

א. אם הישר L מקביל לציר- x אזי $y_1 = y_2$ ולכן $\tan \alpha = 0$, כלומר השיפוע הוא אפס.

ב. אם הישר L מקביל לציר- y אזי $x_1 = x_2$ ולכן הזווית בין L וציר- x היא 90° , ולכן הטנגנס אינו מוגדר, ולכן לישר כזה לא קיים שיפוע, ולא קיימת משוואה מפורשת.

18.2 זווית בין שני ישרים

יהיו L_1 ו- L_2 שני ישרים לא מקבילים הנחתכים בנקודה משותפת כפי שרואים בציור 70. מטרתנו תהיה לחשב את הזווית θ שבין שני הישרים. לשם כך נניח שהנתונים שבידנו הם המשוואות המפורשות של הישרים:

$$L_1: y = a_1x + b_1, \quad L_2: y = a_2x + b_2$$

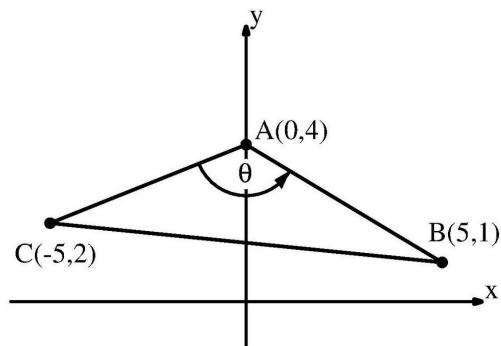
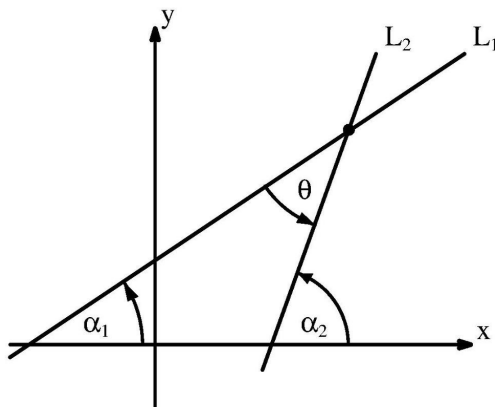
כאמור לעיל, $a_1 = \tan \alpha_1$ הוא שיפוע הישר L_1 , ו- $a_2 = \tan \alpha_2$ הוא שיפוע הישר L_2 . ברור כי $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ ולכן:

$$\tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1}$$

ולכן:

$$\tan \theta = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1}$$

אם הישרים ניצבים, כלומר $\theta = \pm 90^\circ$, אז הביטוי $\tan \theta$ אינו מוגדר, ולכן הנוסחה הנ"ל תקפה רק עבור זוויות $\theta \neq \pm 90^\circ$.



איור 70: זווית בין שני ישרים במישור

ברור שאם $\theta = 90^\circ$ אז $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$, ולכן

$$a_2 = \tan \alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1) = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{a_1}$$

ולכן קבלנו תנאי אלגברי פשוט לבדיקת הניצבות של שני ישרים

$$L_1 \perp L_2 \iff a_1 \cdot a_2 = -1$$

אם הישרים L_1 ו- L_2 אינם נחתכים, כלומר הם מקבילים, אז ברור ש- $\alpha_1 = \alpha_2$, ולכן $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$, ולכן שיפועיהם שווים $a_1 = a_2$.

$$L_1 \parallel L_2 \iff a_1 = a_2$$

דוגמא 2: קודקודי המשולש $\triangle ABC$ הם $A(0,4)$, $B(5,1)$ ו- $C(-5,2)$. חשב את טנגנס הזווית θ שבין הצלע AB לצלע AC .

פתרון: ראשית כל נחשב את שיפועי הצלעות AB ו- AC

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{שיפוע הצלע } AB = \frac{4-1}{0-5} = -\frac{3}{5} \\ a_2 &= \text{שיפוע הצלע } AC = \frac{4-2}{0+5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ולכן

$$\tan \theta = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{6}{25}} = \frac{25}{19}$$

דוגמא 3: קודקודי המשולש $\triangle ABC$ הם $A(1,1)$, $B(4,4)$ ו- $C(1,7)$. הוכח כי זהו משולש ישר זווית. **הוכחה:** נחשב את שיפועי כל צלעותיו.

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{שיפוע הצלע } AB = \frac{4-1}{4-1} = 1 \\ a_2 &= \text{שיפוע הצלע } AC = \frac{7-1}{1-1} = \frac{6}{0} \text{ (לא קיים)} \\ a_3 &= \text{שיפוע הצלע } BC = \frac{4-7}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned}$$

לצלע AC לא קיים שיפוע משום שהיא ניצבת לציר- x . $a_1 a_3 = -1$, ולכן $AB \perp BC$, ולכן המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר זווית.

18.3 המשוואה הכללית של הישר

המשוואה $Ax + By + C = 0$, כאשר $A \neq 0$ או $B \neq 0$, מתארת תמיד קו ישר במישור והיא נקראת **המשוואה הכללית של הישר**. אם $A = 0$ אז $By + C = 0$ ולכן $y = -\frac{C}{B}$, ולכן המשוואה מתארת ישר המקביל לציר ה- x . אם $B = 0$ אז $Ax + C = 0$, ולכן $x = -\frac{C}{A}$, ולכן המשוואה מתארת ישר המקביל לציר ה- y . כאשר $C = 0$ המשוואה מתארת ישר העובר דרך ראשית הצירים.

המשוואה $y = ax + b$ נקראת **המשוואה המפורשת של הישר**. עבור ישר המקביל לציר ה- y לא קיימת משוואה מפורשת, אך קיימת משוואה כללית. המשוואה המפורשת היא מקרה פרטי של המשוואה הכללית, שכן אפשר לרשום אותה גם כך: $ax - y + b = 0$.

אם במשוואה הכללית $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, אז אפשר לעבור למשוואה מפורשת $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

דוגמא 4: רשום את המשוואה $3x - 4y = 12$ בצורה מפורשת.

פתרון: $y = \frac{3}{4}x - 3$.

נוסחת המרחק d שבין נקודה $P(x_0, y_0)$ לישר שמשוואתו $Ax + By + C = 0$ היא

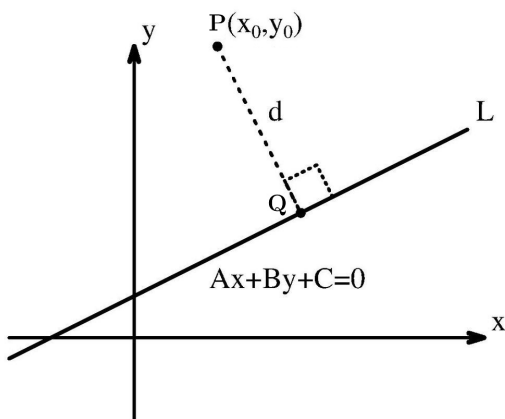
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

d מציין את המרחק הקצר ביותר שבין הנקודה P לישר.

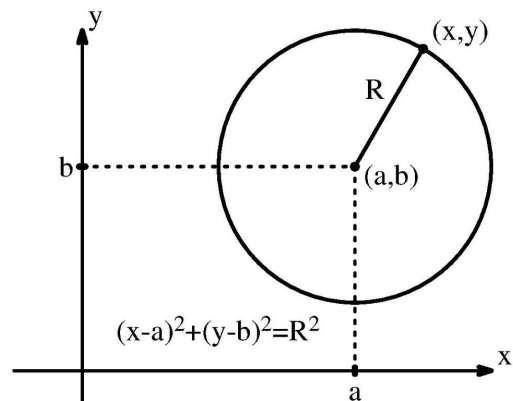
דוגמא 5: חשב את המרחק מן הנקודה $(1, -2)$ לישר $3x + 4y + 2 = 0$.

פתרון:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$



איור 71: המרחק הכי קצר בין נקודה לישר



איור 72: משוואת מעגל בעל רדיוס R ומרכז (a, b)

18.4 משוואת המעגל

תהי $M(a, b)$ נקודה נתונה במישור ויהי R מספר ממשי חיובי. המעגל, שמרכזו הוא הנקודה (a, b) ואשר רדיוסו הוא R , הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות אשר מרחקן מן הנקודה (a, b) שווה R . על סמך נוסחת המרחק שהוכחנו בתחילת הפרק, נוכל לאמר כי מעגל שמרכזו (a, b) ורדיוסו R מורכב מכל הנקודות (x, y) שמקיימות את המשוואה

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

מכאן נקבל את משוואת המעגל:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

דוגמא 6: הראה כי המשוואה $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ מתארת מעגל. מצא את מרכזו ואת רדיוסו.

פתרון: עלינו ראשית כל לנסות לעבור מן המשוואה הנ"ל לצורה הסטנדרטית של משוואת המעגל. נשתמש בטכניקת ההשלמה לריבוע.

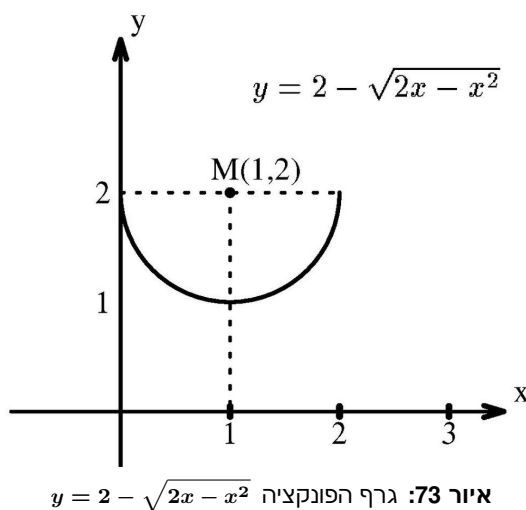
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 &= 16 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

קבלנו אם כן שהמשוואה הנ"ל שקולה למשוואה $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$, ולכן מרכז המעגל הוא $(1, -3)$ ורדיוסו הוא 4.

דוגמא 7: מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) המקיימות את המשוואה $y = 2 - \sqrt{2x - x^2}$?

פתרון: משוואה זו שקולה למשוואה $2 - y = \sqrt{2x - x^2}$, מכאן נסיק כי למשוואה יש מובן רק בתנאי ש- $2 - y \geq 0$ ו- $2x - x^2 \geq 0$. לכן יש להניח כי $0 \leq x \leq 2$ ו- $y \leq 2$. לאחר העלאה בריבוע של שני האגפים נקבל $(y - 2)^2 = 2x - x^2$ ועל כן $x^2 - 2x + (y - 2)^2 = 0$. ע"י השלמה לריבוע נקבל את משוואת המעגל

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$



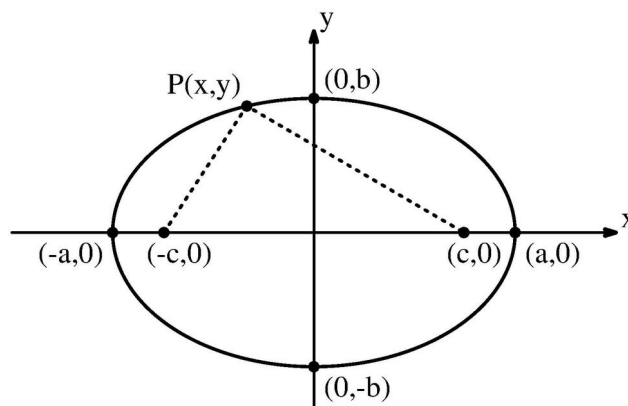
למשוואה זו עלינו לצרף גם את התנאים $0 \leq x \leq 2$ ו- $y \leq 2$ ואז נקבל חצי מעגל תחתון שמרכזו בנקודה $M(1, 2)$ ואשר רדיוסו $R = 1$, כפי שרואים בציור 73.

18.5 משוואת האליפסה

אליפסה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ שווה לגודל קבוע $2a$. הנקודות F_1 ו- F_2 נקראות **המוקדים** של האליפסה. באופן כללי, המוקדים יכולים להיות ממוקמים בכל המישור, אך נסתפק בהבנת המקרה השכיח שבו המוקדים ממוקמים על ציר ה- x בשתי נקודות סימטריות, כפי שזה מוצג בציור 74. כאמור, נקודה $P(x, y)$ נמצאת על האליפסה אם ורק אם $PF_1 + PF_2 = 2a$. ע"י שימוש בנוסחת המרחק שהצגנו בתחילת הפרק, אפשר להגיע מן המשוואה האחרונה למשוואה הסטנדרטית של האליפסה:

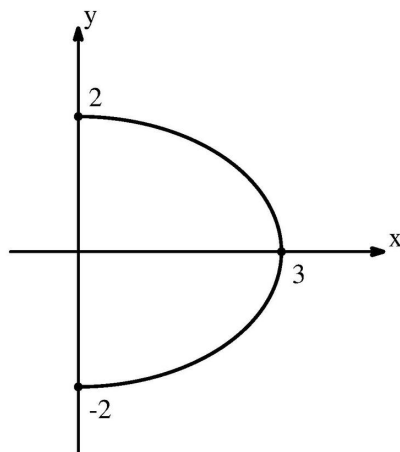
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כאשר $b^2 = a^2 - c^2$. המספרים החיוביים a ו- b נקראים **צירי האליפסה**.



איור 74: אליפסה

דוגמא 8: מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) המקיימות את המשוואה $2x = 3\sqrt{4 - y^2}$?



איור 75: גרף המשוואה $2x = 3\sqrt{4 - y^2}$

פתרון: ראשית כל נציין כי למשוואה יש מובן

רק אם $x \geq 0$ ו- $-2 \leq y \leq 2$. לאחר העלאה

בריבוע של שני האגפים נקבל $4x^2 = 9(4 - y^2)$

ולכן $4x^2 + 9y^2 = 36$, ולבסוף $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

מכאן שמדובר באליפסה שצירה הם $a = 3$

ו- $b = 2$. מאחר ועלינו להוסיף את הדרישה

$x \geq 0$, נקבל שהתשובה היא החצי הימני של

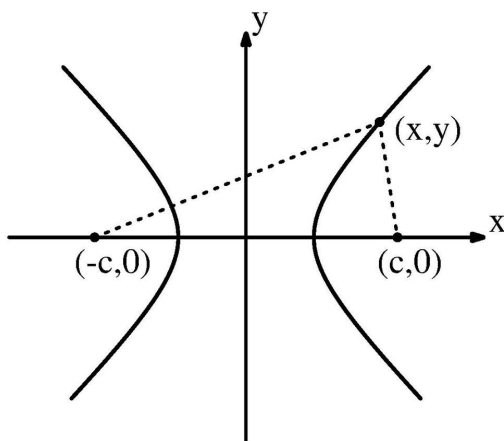
האליפסה, כפי שרואים בציור 75.

18.6 משוואת ההיפרבולה

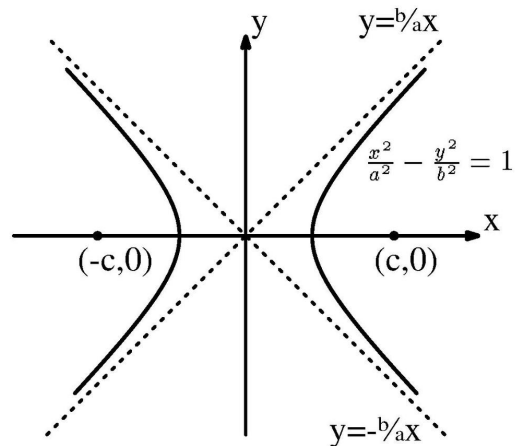
היפרבולה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות אשר הפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ הוא גודל קבוע $2a$. ע"י שימוש בנוסחת המרחק ניתן לקבל את המשוואה הסטנדרטית של ההיפרבולה

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כאשר $b^2 = c^2 - a^2$. גם כאן בחרנו במקרה השכיח שבו **המוקדים** של ההיפרבולה ממוקמים על ציר ה- x , אך באופן כללי הם עשויים להמצא בכל מקום אחר במישור. להיפרבולה קיימים תמיד שתי אסימפטוטות $y = \pm \frac{b}{a}x$ (ראה ציורים 76 ו-77).



איור 76: היפרבולה כמקום גאומטרי

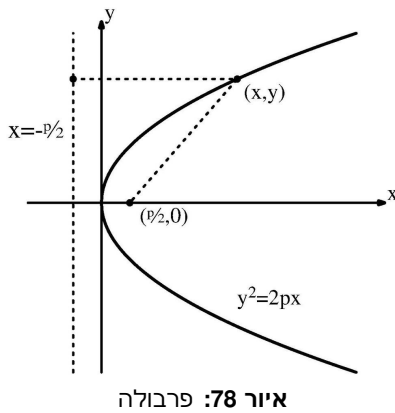


איור 77: היפרבולה עם שתי אסימפטוטות

דוגמא 9: נתונה ההיפרבולה $9x^2 - 16y^2 = 144$. מצא את מוקדיה, את נקודות החיתוך שלה עם הצירים, ואת האסימפטוטות שלה.

פתרון: ע"י חילוק שני האגפים ב-144 נקבל $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, ולכן $a^2 = 16$ ו- $b^2 = 9$, ולכן $c^2 = a^2 + b^2 = 25$, ולכן מוקדיה הם $F_1(5, 0)$ ו- $F_2(-5, 0)$. מן המשוואה המקורית קל לראות שאם $y = 0$ אז $x = \pm 4$, ולכן ההיפרבולה חותכת את ציר ה- x בנקודות $(4, 0)$ ו- $(-4, 0)$. ההיפרבולה אינה חותכת את ציר ה- y בשום נקודה משום שאם נציב $x = 0$ במשוואה $9x^2 - 16y^2 = 144$, נקבל $y^2 = -9$, ואין שום פתרון ממשי למשוואה זו. האסימפטוטות של ההיפרבולה הם $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x$.

18.7 משוואת הפרבולה



הפרבולה היא המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה $F(\frac{p}{2}, 0)$ ומישר קבוע $x = -\frac{p}{2}$. הנקודה F נקראת **מוקד הפרבולה**, והישר $x = -\frac{p}{2}$ נקרא **הישר המדריך של הפרבולה**. שימוש פשוט בנוסחת המרחק מוביל למשוואה הסטנדרטית של הפרבולה: $y^2 = 2px$.

דוגמא 10: על הפרבולה $y^2 = 2px$ נמצאת הנקודה $(2, 4)$. מצא את המוקד ואת הישר המדריך שלה.

פתרון: נציב את הנקודה $(2, 4)$ במשוואה ונקבל $16 = 2p \cdot 2$, ולכן $p = 4$. מכאן שמוקד הפרבולה הוא $F(2, 0)$ והישר המדריך שלה הוא $x = -2$.

תרגילים

1. נתון המשולש $\triangle ABC$ אשר קודקודיו הם $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$ ו- $C(-5, 3)$.
 - א. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.
 - ב. מצא את אורך הצלע AB .
 - ג. מצא את טנגנס הזווית שבין הצלע AB לצלע AC .
2. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $A(1, 3)$ ו- $B(-5, 5)$.
3. יהי L_1 ישר שמשוואתו $Ax + By + C = 0$, ותהי (x_0, y_0) נקודה מחוץ לישר.
 - א. מצא את משוואת הישר L_2 העובר דרך הנקודה (x_0, y_0) וניצב לישר L_1 .
 - ב. מצא את נקודת החיתוך (x_1, y_1) של שני הישרים.
 - ג. חשב את המרחק בין הנקודה (x_0, y_0) לנקודה (x_1, y_1) וקבל את נוסחת המרחק בין הנקודה (x_0, y_0) לישר L_1 .
4. הראה כי המשוואה $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ היא משוואת מעגל ומצא את המרכז ואת הרדיוס של מעגל זה.
5. הוכח כי המשוואה $y + 3 = -\sqrt{4x - x^2}$ מתארת חצי מעגל ומצא את מרכזו ורדיוסו.

6. הוכח כי המשוואה $9 + x^2 = 9y^2$ מתארת היפרבולה ומצא את המוקד שלה והאסימפטוטות שלה.

7. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. מצא את p אם ידוע שהנקודה $(1, 6)$ נמצאת על הפרבולה.

תשובות סופיות

1. א. $AB = 5$ ב. $\tan \alpha = 1$

2. $x + 3y = 10$

3. א. $B(x - x_0) = A(y - y_0)$ ב. $y_1 = \frac{-ABx_0 + A^2y_0 - BC}{A^2 + B^2}$, $x_1 = \frac{-AC + B^2x_0 - AB y_0}{A^2 + B^2}$ ג. $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

7. $p = 18$

19. פולינומים ומשפט השארית

כל פונקציה מן הצורה $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, כאשר $a_n \neq 0$, נקראת **פולינום** (או **רב-איבר**). המספרים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ נקראים **המקדמים** של הפולינום. המקדם a_0 נקרא **המקדם החופשי**, והמקדם a_n נקרא **המקדם המוביל** (בתנאי ש- $a_n \neq 0$). המספר n המתאים לחזקה הגבוהה ביותר של x קוראים **מעלת הפולינום**.

דוגמא 1:

א. $P(x) = 12x^3 - 7$ הוא פולינום ממעלה 3 אשר מקדמיו הם $a_0 = -7$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 12$.

ב. $P(x) = -x + 4$ הוא פולינום ממעלה 1 אשר מקדמיו הם $a_0 = 4$ ו- $a_1 = -1$.

ג. $P(x) = 17$ הוא פולינום ממעלה 0 בעל מקדם חופשי בלבד $a_0 = 17$.

ד. אם $P(x)$ ו- $Q(x)$ הם שני פולינומים אז קל לראות ש- $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$ ו- $P(x)Q(x)$ הם פולינומים. לעומת זאת, המנה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ אינה בדרך כלל פולינום. למשל $\frac{12x^3 - 7}{-x + 4}$ אינו פולינום.

ה. למרות זאת, במקרים רבים המנה של שני פולינומים עשויה לתת פולינום לאחר פעולת צמצום. למשל אם $P(x) = x^2 - 8x + 15$ ו- $Q(x) = x - 5$ אז $\frac{P(x)}{Q(x)} = x - 3$ כי

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} = \frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 5} = x - 3$$

י. ברוב המקרים, המנה של שני פולינומים נותנת שארית שאינה פולינום. למשל אם

$$P(x) = x^2 - 8x + 16 \quad \text{ו-} \quad Q(x) = x - 5$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x^2 - 8x + 15) + 1}{x - 5} = \frac{(x^2 - 8x + 15)}{x - 5} + \frac{1}{x - 5} = x - 3 + \frac{1}{x - 5}$$

המטרה הראשונה שלנו תהיה לתאר שיטת חילוק בין פולינומים אשר תאפשר לנו להציג כל מנה של שני פולינומים $\frac{P(x)}{Q(x)}$ באופן הבא

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

כאשר $M(x)$ הוא הפולינום ו- $R(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$ (ועל כן לא ניתן יותר לחלק את $R(x)$ ב- $Q(x)$). הפולינום $R(x)$ נקרא **השארית**. שיטת החילוק שנתאר נקראת **שיטת החילוק הארוך** והיא מבוססת על הרעיון הפשוט הבא: בכל שלב ננסה להציג חלק מן המונה ככפולה של המכנה. נביא דוגמא.

דוגמא 2: חלק את הפולינום $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 10$ בפולינום $Q(x) = x^2 + x$.

פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 10}{x^2 + x} &= \frac{2x(x^2 + x) - 9x^2 + 3x + 10}{x^2 + x} = 2x + \frac{-9x^2 + 3x + 10}{x^2 + x} \\ &= 2x + \frac{-9(x^2 + x) + 12x + 10}{x^2 + x} = 2x - 9 + \frac{12x + 10}{x^2 + x} \end{aligned}$$

התהליך מסתיים כאשר המעלה של הפולינום שבמונה קטנה מן המעלה של הפולינום שבמכנה. את תוצאת החילוק ניתן לרשום גם כך:

$$2x^3 - 7x^2 + 3x + 10 = (2x - 9)(x^2 + x) + 12x + 10$$

במקרה זה, השארית היא $12x + 10$. פרוצדורה זו נהוג להציג גם כמו "החילוק הארוך" שבין מספרים:

נסביר את התהליך על השלבים הבאים:

- מחלקים את הביטוי $2x^3$ ב- x^2 , ואת התוצאה $2x$ רושמים מעל לקו החלוקה.
- כופלים ב- $2x$ את המחלק $x^2 + x$, ואת התוצאה רושמים מתחת ל- $2x^3 - 7x^2 + 3x + 10$.
- מחסרים מן הפולינום $2x^3 - 7x^2 + 3x + 10$ את הפולינום $2x^3 + 2x^2$ ומקבלים פולינום חדש $-9x^2 + 3x + 10$.

$$\begin{array}{r}
 2x-9 \\
 \hline
 2x^3-7x^2+3x+10 \quad | \quad x^2+x \\
 - \quad 2x^3+2x^2 \\
 \hline
 -9x^2+3x+10 \\
 - \quad -9x^2-9x \\
 \hline
 12x+10
 \end{array}$$

איור 79: חילוק ארוך של הפולינום $2x^3 - 7x^2 + 3x + 10$ בפולינום $x^2 + x$

ד. מפעילים מחדש את הפרוצדורה הנ"ל עבור הפולינום החדש $-9x^2 + 3x + 10$.

ברור כי התהליך מסתיים תמיד לאחר מספר סופי של צעדים, כי מעלת הפולינומים הולכת ויורדת לאחר כל חילוק, עד לשלב שבו היא תהיה קטנה יותר ממעלת המחלק $x^2 + x$, ואז התהליך מסתיים.

נעבור לדון במקרה מיוחד של חילוק פולינום $P(x)$ בפולינום מן הצורה $x - a$, כאשר a מספר קבוע. ברור כי במקרה זה השארית תהיה תמיד מספר קבוע c , ואת תוצאת החילוק תמיד ניתן להציג ע"י

$$P(x) = Q(x)(x - a) + c$$

נוכל לדעת את השארית c מבלי לבצע את כל פעולת החילוק במלואה, פשוט ע"י הצבת הנקודה $x = a$ בנוסחה האחרונה

$$P(a) = Q(a)(a - a) + c = c$$

ולכן השארית ניתנת לחישוב מיידי מן הנוסחה $c = P(a)$. תוצאה זו ידועה בשם "משפט השארית":

משפט השארית: השארית מחילוק הפולינום $P(x)$ בפולינום $x - a$ היא $P(a)$.

מסקנה: הפולינום $P(x)$ מתחלק בפולינום $x - a$ (בלי שארית) אם ורק אם $P(a) = 0$.

דוגמא 3:

א. הוכח כי הפולינום $x^n - a^n$ מתחלק בפולינום $x - a$ בלי שארית, לכל n טבעי.

ב. הוכח כי הפולינום $x^n + a^n$ מתחלק בפולינום $x + a$ בלי שארית, לכל n אי-זוגי.

הוכחה:

א. נסמן $P(x) = x^n - a^n$. אזי $P(a) = a^n - a^n = 0$ ולכן על פי משפט השארית $P(x)$ מתחלק ב- $x - a$.

ב. נסמן $P(x) = x^n + a^n$. מאחר וכאן n הוא מספר טבעי אי-זוגי, הרי ש- $(-a)^n = -a^n$

$-a^n$, ולכן

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$$

ולכן שוב ממשפט השארית נובע כי $x^n + a^n$ מתחלק ללא שארית ב- $x + a$.

19.1 שורשים של פולינומים

מספר ממשי a נקרא שורש של פולינום $P(x)$ אם $P(a) = 0$. אם $P(x)$ פולינום ממעלה 2 (שנקרא גם פולינום ריבועי), אז ניתן למצוא את שורשיו על פי הנוסחה הידועה. קיימות גם נוסחאות מתאימות למציאת שורשים של פולינומים ממעלה שלישית ורביעית, אך הן מסורבלות ולרוב אין משתמשים בהן. לא קיימות נוסחאות כלליות למציאת שורשים של פולינומים שמעלתם גדולה מ-4. יתר על כן, הוכח כי נוסחאות כאלה הן בלתי אפשריות. למרות זאת, במקרים לא מעטים ניתן למצוא שורשים של פולינומים ממעלות גבוהות ע"י פרוק לגורמים של הפולינומים האלה. להלן משפט המאפשר לפעמים "ניחוש אינטליגנטי" של חלק מן השורשים.

משפט: יהי $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ פולינום אשר כל מקדמיו הם מספרים שלמים. אזי

א. אם יש ל- $P(x)$ שורש שלם r ו- $a_n = 1$ אזי המקדם a_0 מתחלק ב- r .

ב. אם לפולינום $P(x)$ יש שורש רציונלי $\frac{p}{q}$, כאשר p ו- q הם מספרים שלמים והשבר מצומצם, אזי a_0 מתחלק ב- p ו- a_n מתחלק ב- q .

דוגמא 4: פתור את המשוואות

ב. $14x^3 - 3x^2 - 1 = 0$

א. $x^3 + 3x - 14 = 0$

פתרון:

א. המחלקים של -14 הם: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. לכן אם לפולינום $P(x) = x^3 + 3x - 14$ יש שורשים שלמים אז על פי המשפט הקודם הם חייבים להמצא ברשימה הזאת. על ידי בדיקה קלה נגלה כי $x = 2$ הוא שורש של $P(x)$, כלומר $P(2) = 0$. על פי משפט השארית, הפולינום $P(x)$ מתחלק ללא שארית בפולינום $x - 2$:
לכן פרקנו לגורמים את הפולינום המקורי $(x^3 + 3x - 14) = (x^2 + 2x + 7)(x - 2)$. בכדי למצוא את השורשים האחרים שלו עלינו למצוא את השורשים של הפולינום הריבועי $x^2 + 2x + 7$. בדיקה קלה מראה כי לפולינום זה אין שורשים ממשיים, ולכן $x = 2$ הוא השורש הממשי היחיד של $x^3 + 3x - 14$.

ב. נסמן $P(x) = 14x^3 - 3x^2 - 1$. נבדוק אם קיים שורש רציונלי $\frac{p}{q}$. אם קיים שורש כזה אז, על סמך המשפט הקודם, p מחלק את -1 ו- q מחלק את 14. לכן p יכול להיות אחד מן המספרים ± 1 , ו- q צריך להיות אחד מן המספרים: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. לכן השורשים הרציונליים (אם הם קיימים) צריכים להמצא ברשימה: $\pm \frac{1}{14}, \pm \frac{1}{7}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{1}$.

$$\begin{array}{r}
 x^2+2x+7 \\
 x^3+3x-14 \bigg| x-2 \\
 -x^3-2x^2 \\
 \hline
 2x^2+3x-14 \\
 -2x^2-4x \\
 \hline
 7x-14 \\
 -7x-14 \\
 \hline
 = =
 \end{array}$$

איור 80: חילוק ארוך של הפולינום $x^3 + 3x - 14$ בפולינום $x - 2$

לאחר בדיקה של כל המועמדים האלה נמצא כי $x = \frac{1}{2}$ הוא שורש. שוב, בכדי למצוא את יתר השורשים, נחלק את $P(x)$ בפולינום $x - \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\begin{array}{r}
 14x^2+4x+2 \\
 14x^3-3x^2-1 \bigg| x-\frac{1}{2} \\
 -14x^3-7x^2 \\
 \hline
 4x^2-1 \\
 -4x^2-2x \\
 \hline
 2x-1 \\
 -2x-1 \\
 \hline
 = =
 \end{array}$$

איור 81: חילוק ארוך של הפולינום $14x^3 - 3x^2 - 1$ בפולינום $x - \frac{1}{2}$

קבלנו לכן $(14x^3 - 3x^2 - 1) = (14x^2 + 4x + 2)(x - \frac{1}{2})$. לא קשה לראות כי לפולינום $14x^2 + 4x + 2$ אין שורשים ממשיים ולכן השורש היחיד של $P(x)$ הוא $x = \frac{1}{2}$.

19.2 יחסים בין מקדמים ושורשים של פולינום

כידוע, אם x_1 ו- x_2 הם שורשי המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ אזי

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות אלה נקראות **נוסחאות וייטה** והן נובעות מייד מן הנוסחה למציאת השורשים:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אם נחבר את שני השורשים נקבל מייד $-\frac{b}{a}$, ואם נכפיל אותם נקבל בקלות את $\frac{c}{a}$.
נוסחאות דומות קיימות גם עבור משוואות ממעלה גבוהה יותר. נביא למשל את הנוסחאות
המתאימות למשוואה ממעלה שלישית: אם x_1, x_2, x_3 ו- x_3 הם שורשי המשוואה

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

אזי

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a} &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \frac{c}{a} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ -\frac{d}{a} &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

דוגמא 5: אם x_1, x_2, x_3 ו- x_3 הם שורשי המשוואה $x^3 - 6x^2 + 11x - 36 = 0$ אז מתקיים

$$\begin{aligned} 6 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ 11 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ 36 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

דוגמא 6: יהיו $P(x) = a_1x + b_1$ ו- $Q(x) = a_2x + b_2$ שני פולינומים ממעלה ראשונה.
נניח כי $P(x_1) = Q(x_1)$ ו- $P(x_2) = Q(x_2)$ כאשר $x_1 \neq x_2$. הוכח כי $P(x) = Q(x)$
לכל ערך של x , כלומר, שני הפולינומים זהים: $a_1 = a_2$ ו- $b_1 = b_2$. **הוכחה:** נרשום את
שני הנתונים

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1 &= a_2x_1 + b_2 \\ a_1x_2 + b_1 &= a_2x_2 + b_2 \end{aligned}$$

לאחר החסרת המשוואה השניה מן המשוואה הראשונה נקבל $a_1(x_1 - x_2) = a_2(x_1 - x_2)$.
היות ו- $x_1 - x_2 \neq 0$ נקבל ש- $a_1 = a_2$. לאחר הצבת תוצאה זו באחת מן המשוואות
נקבל גם $b_1 = b_2$. ■

באופן יותר כללי, אפשר להוכיח את המשפט הבא:

משפט: אם $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ו- $Q(x) = b_0 + a_1x + \dots + b_nx^n$ הם שני
פולינומים ממעלה n , ואם השוויון $P(x_i) = Q(x_i)$ מתקיים עבור $n + 1$ ערכים שונים של
 x , $i = 1, 2, \dots, n + 1$, אזי $P(x) = Q(x)$ לכל ערך של x , כלומר שני הפולינומים זהים:
 $a_n = b_n, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

למשפט זה שימושים רבים בנושא של פירוק שברים מורכבים לשברים פשוטים. נביא שלש דוגמאות בנושא זה.

דוגמא 7: מצא את הערכים של A ו- B בזהות $\frac{x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$. **פתרון:** לאחר חיבור שני השברים באגף ימין נקבל

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

ולאחר איסוף איברים במונה של השבר שבאגף ימין נקבל

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x + B - 3A}{(x+1)(x-3)}$$

מאחר ולשני השברים אותו המכנה, הרי ששני המונים שווים באופן זהותי

$$x-1 = (A+B)x + B - 3A$$

ולכן בהכרח

$$1 = A + B$$

$$-1 = -3A + B$$

מכאן ש- $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$.

לאותה התוצאה אפשר להגיע בדרך קצרה יותר. השוויון

$$x-1 = A(x-3) + B(x+1)$$

מתקיים לכל ערך של x , ולכן בכדי לחשב את הערכים של A ו- B נוכל למשל להציב $x = -1$ ו- $x = 3$ ולקבל $2 = 4B$ ו- $-2 = 4A$, מכאן ש- $A = \frac{1}{2}$ ו- $B = \frac{1}{2}$.

דוגמא 8: מצא את הערכים של A , B , ו- C בזהות הבאה

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

פתרון: לאחר חיבור שלשת השברים שבאגף ימין נקבל

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

שוב, משוויון המכנים נובע שוויון המונים

$$x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$$

לאחר שנציב בשוויון זה למשל $x = -1$, $x = 0$, ו- $x = 2$ נקבל

$$-2 = 3C, \quad -1 = -2A, \quad 1 = 6B$$

מכאן ש- $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, ו- $C = -\frac{2}{3}$.

דוגמא 9: מצא את הערכים של A , B , ו- C בפירוק הבא

$$\frac{x - 1}{(x - 2)^2(x - 3)} = \frac{A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

פתרון: מן השוויון

$$\frac{x - 1}{(x - 2)^2(x - 3)} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)(x - 3) + C(x - 2)^2}{(x - 2)^2(x - 3)}$$

נקבל את השוויון הזהותי

$$x - 1 = A(x - 3) + B(x - 2)(x - 3) + C(x - 2)^2$$

ניתן להציב בו כל שלשה ערכים של x שנבחר. למשל, אם נציב בו את $x = 2$, $x = 0$, ו- $x = 3$ נקבל מייד

$$A = -1, \quad B = -2, \quad C = 2$$

דוגמא 10: מצא את הערכים של A , B , ו- C בפירוק הבא

$$\frac{23 - 5x}{(x^2 + x - 4)(2x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x - 4} + \frac{C}{2x + 1}$$

פתרון: מן השוויון

$$\begin{aligned} \frac{23 - 5x}{(x^2 + x - 4)(2x + 1)} &= \frac{(Ax + B)(2x + 1) + C(x^2 + x - 4)}{(x^2 + x - 4)(2x + 1)} \\ &= \frac{(2A + C)x^2 + (A + 2B + C)x + B - 4C}{(x^2 + x - 4)(2x + 1)} \end{aligned}$$

נקבל את מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A + 2B + C = -5 \\ B - 4C = 23 \end{cases}$$

למערכת זו קיים הפתרון היחיד $A = 3$, $B = -1$, ו- $C = -6$, ולכן הפירוק היחיד הוא

$$\frac{23 - 5x}{(x^2 + x - 4)(2x + 1)} = \frac{3x - 1}{x^2 + x - 4} + \frac{-6}{2x + 1}$$

תרגילים

1. חלק את הפולינומים

א. $(3x^5 + 2x^2 + 4x + 2) : (x + 1)$

ב. $(x^5 + x - 1) : (x - 2)$

2. בעזרת משפט השארית, חשב את השארית בכל אחד מתרגילי החילוק של הבעייה הקודמת והשווה עם התוצאות שקבלת שם.

3. הוכח כי אם למשוואה $x^3 - 3x + 2 = 0$ קיימים שלשה שורשים שונים אזי סכומם שווה אפס.

4. ידוע כי אחד מן השורשים של הפולינום $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ הוא -2 . מצא את כל השורשים האחרים.

5. פתור את המשוואות:

א. $x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $8x^3 + 2x - 10 = 0$

6. למה צריך להיות שווה a בכדי שהפולינום $x^3 - 3x^2 + ax + 2$ יתחלק ללא שארית בפולינום $x + 2$?

7. מצא את הערכים של a ו- b בפולינום $x^3 - ax^2 + bx - 4$ אם ידוע שהוא מתחלק בפולינום $(x - 2)^2$ ללא שארית.

8. הצג את השבר $\frac{23x-101}{(x-5)^2(x+2)}$ כסכום של שברים פשוטים מן הצורה $\frac{A}{x-5}$, $\frac{B}{(x-5)^2}$, ו- $\frac{C}{x+2}$.

9. מצא את הערכים של A, B, C ו- בפירוק

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

10. מצא את הערכים של A, B, C, D ו- בפירוק

$$\frac{2x+2}{x(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x}$$

11. נתונה המשוואה

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1$$

כאשר a, b, c ו- שלשה מספרים השונים זה מזה. בדוק כי $x_1 = a, x_2 = b$ ו- $x_3 = c$ פותרים את המשוואה. לא קשה לראות, כי לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים, תתקבל משוואה ריבועית. אם כן, כיצד ייתכן שלמשוואה זו שלשה פתרונות שונים?! הסבר תוצאה פרדוקסלית זו!

תשובות סופיות

1. א. $3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ ב. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 17$

4. $x = -4, x = 3$

5. א. $x_1 = 1, x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}, x_3 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ ב. $x_1 = 1$

6. $a = -9$ 7. $a = 5, b = 8$ 8. $A = 3, B = 2, C = -3$

9. $A = \frac{5}{3}, B = -\frac{1}{6}, C = -\frac{3}{2}$ 10. $A = 4, B = -2, C = 2, D = -2$

20. נוסחת הבינום של ניוטון

נוסחת הבינום של ניוטון מאפשרת לפתוח את הסוגריים בביטוי $(a+b)^n$, לכל מספר טבעי n . נתחיל בשתי הדוגמאות הראשונות מסוג זה:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

על סמך נוסחה זו נוכל להתקדם הלאה:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

ולכן קבלנו את שתי הנוסחאות:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

בדיוק באותו אופן נוכל להוכיח גם את הנוסחאות הבאות:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

באופן כללי ניתן להוכיח כי לכל מספר טבעי n מתקיים

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ הוא המקדם הבינומיאלי של האיבר $k+1$ באגף ימין. הנוסחה האחרונה נקראת **נוסחת הבינום של ניוטון**. ניתן להציג אותה גם בצורה היותר קצרה

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

הביטוי $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ נקרא **האיבר הכללי** של נוסחת הבינום. נציין כי מספר האיברים שבאגף ימין של נוסחת הבינום הוא $n+1$, מאחר ו- k מתחיל בערך אפס ומסתיים ב- n .

20.1 משולש פסקל

השימוש המלא בנוסחת הבינום של ניוטון נעשה רק במקרים ההכרחיים. הבעייה העקרית בפיתוח הבינום של $(a+b)^n$ היא במציאת המקדמים הבינומיאליים. נשים לב כי סדרת המקדמים בפיתוח של $(a+b)^2$ היא $(1, 2, 1)$ וסדרת המקדמים בפיתוח של $(a+b)^3$ היא $(1, 3, 3, 1)$. בפיתוח של $(a+b)^1$ סדרת המקדמים היא $(1, 1)$, ובפיתוח של $(a+b)^0$ יש רק מקדם יחיד (1) . אם נרשום את כל הסדרות הללו על פי הסדר נקבל את **משולש**

פסקל:

				1						
			1	1						
		1	2	1						
	1	3	3	1						
	1	4	6	4	1					
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

במקרים רבים קל יותר למצוא את המקדמים ע"י שימוש במשולש זה מאשר באמצעות נוסחת הבינום של ניוטון. משולש פסקל מתאפיין על ידי כך שכל מספר פנימי (כלומר מספר שאינו ראשון או אחרון) הוא סכום שני המספרים שמעליו. באמצעות כלל פשוט זה ניתן לחשב עוד מספר גדול של שורות במשולש בקלות רבה.

דוגמא 1: בעזרת משולש פסקל, פתח את הבינום $(a + b)^5$.

פתרון: שורת המקדמים המתאימה לביטוי זה היא השורה השישית שבמשולש פסקל: $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$ ולכן

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

דוגמא 2: פתח את הבינום $(x^2 + \frac{1}{x})^4$.

פתרון: על סמך משולש פסקל, שורת המקדמים היא $(1, 4, 6, 4, 1)$ ולכן

$$\begin{aligned} (x^2 + \frac{1}{x})^4 &= (x^2)^4 + 4(x^2)^3 \cdot \frac{1}{x} + 6(x^2)^2 \cdot (\frac{1}{x})^2 + 4(x^2) \cdot (\frac{1}{x})^3 + (\frac{1}{x})^4 \\ &= x^8 + 4x^5 + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

דוגמא 3: הוכח כי בפיתוח הבינום $(x^2 - \frac{1}{x})^{12}$ קיים איבר שאינו תלוי ב- x ומצא אותו.

פתרון: האיבר הכללי של בפיתוח בינום הנ"ל הוא

$$\binom{12}{k} \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \binom{12}{k} \cdot x^{24-2k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^k} = \binom{12}{k} \cdot x^{24-3k} \cdot (-1)^k$$

כאשר $k = 8$, $24 - 3k = 0$ והאיבר שאינו תלוי ב- x השווה ל- $\binom{12}{8}$. חישוב קל נותן תשובה סופית 495.

דוגמא 4: הוכח כי לכל מספר טבעי n מתקיים

א. $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$

ב. $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1}$

הוכחה:

א. נציב בנוסחת הבינום של ניוטון $a = b = 1$ ונקבל

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

מן השוויון $(1+1)^n = 2^n$ נובעת המסקנה.

ב. נציב $a = 1$ ו- $b = -1$ בפיתוח הבינום $(a+b)^{2n}$ ונקבל

$$(1-1)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

ברור כי $(1-1)^{2n} = 0$. על ידי העברת האיברים השליליים מאגף ימין לאגף שמאל נקבל את המסקנה. ■

תרגילים

1. בפיתוח הבינום $(x^3 - \frac{1}{x^2})^{60}$ מצא

א. את המקדם של x^{10} ב. את המקדם של x^7 ג. את האיבר שאינו תלוי ב- x .

2. מהו המקדם של x^3 בפיתוח הבינום $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x})^{16}$?

3. מצא את האיבר השישי בפיתוח של $(3\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2)^9$

4. הוכח כי $\binom{2n}{n}$ הוא המקדם הבינומיאלי הגדול ביותר בפיתוח לבינום של $(a+b)^{2n}$.

5. על סמך התרגיל הקודם הוכח כי לכל טבעי n , $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$. הדרכה: $4^n = (1+1)^{2n}$. בפיתוח הבינום $(1+1)^{2n}$ יש $2n+1$ איברים.

תשובות סופיות

1. א. $\binom{60}{34}$ ב. 0 ג. $\binom{60}{36}$ 2. $\binom{16}{10}$ 3. $-42x^{12}$

21. נוסחאות פירוק

במקרים מסוימים, יש צורך בפירוק של ביטוי נתון למכפלה של שני גורמים או יותר. למשל, את הביטוי $\frac{x^2-49}{x-7}$ אפשר לרשום בצורה יותר פשוטה אם נפרק את המונה למכפלה של שני גורמים

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$$

ולאחר צמצום נקבל

$$\frac{x^2 - 49}{x - 7} = \frac{(x - 7)(x + 7)}{x - 7} = x + 7$$

למטרות רבות, הביטוי הפשוט $x + 7$ עדיף על הביטוי המקורי. הפירוק הנ"ל הוא מקרה פרטי של

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

ובאופן דומה ניתן להוכיח את שתי הנוסחאות הנוספות שברשימה הבאה

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

דוגמא 1: פרק את הביטוי $8x^3 + 27$ למכפלה של שני גורמים.

פתרון: ברור כי $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$, ולכן אם נציב $a = 2x$ ו- $b = 3$ בנוסחה השלישית נקבל

$$8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

דוגמא 2: פרק את הביטוי $x^4 - y^4$ למכפלה של שלושה גורמים.

פתרון: ברור כי $x^4 = (x^2)^2$ ו- $y^4 = (y^2)^2$, ולכן

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

שים לב כי השתמשנו פעמיים בנוסחה הראשונה.

דוגמא 3: צמצם את השבר $\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}}$.

פתרון: נסמן $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ ו- $b = 1$. אזי

$$a^3 - b^3 = (\sqrt[3]{1+x^2})^3 - 1^3 = (1+x^2) - 1 = x^2$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} &= \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} \\ &= a^2 + ab + b^2 = (1+x^2)^{\frac{2}{3}} + (1+x^2)^{\frac{1}{3}} + 1 \end{aligned}$$

דוגמא 4: צמצם את השבר $\frac{1+x^{12}}{1-x^4+x^8}$.

פתרון: נסמן $a = 1$ ו- $b = x^4$. אזי

$$\begin{aligned} \frac{1+x^{12}}{1-x^4+x^8} &= \frac{a^3 + b^3}{a - ab + b^2} \\ &= \frac{(a-b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} \\ &= a - b = 1 - x^4 \end{aligned}$$

למעשה, ניתן להוכיח שלכל n טבעי

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

אם n הוא מספר אי-זוגי אז קיימת גם הנוסחה

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

דוגמא 5: פרק את הביטוי $x^5 + 32y^{10}$ למכפלה של שני גורמים.

פתרון: נציב $a = x$ ו- $b = 2y^2$ (שים לב כי $n = 5$ אי-זוגי!) בנוסחה האחרונה ונקבל

$$x^5 + 32y^{10} = (x + 2y)(x^4 - 2x^3y^2 + 4x^2y^4 - 8xy^6 + 16y^8)$$

לפעמים רושמים את שתי הנוסחאות האחרונות בצורה קצת שונה המאפשרת לישים אותם לשם צמצום שברים מורכבים: לכל n טבעי

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

ולכל מספר אי-זוגי n

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}$$

דוגמא 6: צמצם את השבר $\frac{x^{\frac{5}{4}} + y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$.

פתרון: נסמן $a = \sqrt[4]{x}$ ו- $b = \sqrt[4]{y}$ ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{x^{\frac{5}{4}} + y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} &= \frac{a^5 + b^5}{a + b} \\ &= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ &= x - x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} + y \end{aligned}$$

תרגילים

1. פרק את הביטויים הבאים למכפלה של שני גורמים

א. $x^{62} - y^{124}$ ב. $x^2\sqrt{x} + y^5$

2. צמצם את השברים הבאים

א. $\frac{x^{10} + 1}{x^2 + 1}$ ב. $\frac{y^{15} - z^5}{y^3 - z}$ ג. $\frac{x^4y^{12} - x^8y^4}{xy^3 - x^2y}$

3. על סמך נוסחת הסכום של טור גאומטרי

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

הוכח את הנוסחה

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

הדרכה: הצב $q = \frac{b}{a}$ בנוסחת הסכום וכפול את שני האגפים ב- a^{n-1} .

תשובות סופיות

1. א. $(x^{31} - y^{62})(x^{31} + y^{62})$

ב. $(\sqrt{x} + y)((\sqrt{x})^4 - (\sqrt{x})^3y + (\sqrt{x})^2y^2 - \sqrt{x}y^3 + y^4)$

2. א. $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$

ב. $y^{12} + y^9z + y^6z^2 + y^3z^3 + z^4$

ג. $x^3y^3(y^6 + y^4x + y^2x^2 + x^3)$