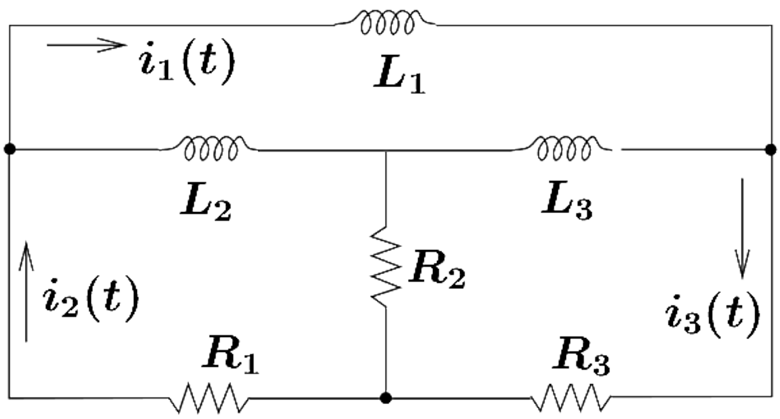
פרק 7
מערכות של משוואות ליניאריות

- מערכות של משוואות דיפרנציאליות עולות בתחומי הפיזיקה, האלקטרונקה, יחסי גומלין בין אוכלוסיות בתחום האקולוגיה, הביולוגיה, ומדעי החברה, ועוד. מערכת של משוואות דיפרנציאליות היא שיטה מתמטית לייצוג ובניית מודל מתמטי של מערכות שבהן קבוצת גדלים (פונקציות) התלויים ומשפיעים אחד על השני על פי חוקים פיזיקאליים או אחרים.
- למשל בכדי לבנות מודל של מעגל חשמלי מורכב, יש לייצג את הזרמים, המתחים, הקיבולים, ההשראות (inductance), והתנגדויות על פני מספר רב של רכיבי המעגל, על ידי פונקציות מתמטיות מתאימות, ולתאר את הקשרים ביניהם באמצעות משוואות דיפרנציאליות שבהן עשויות להופיע הנגזרות של כל הפונקציות השונות במודל.



איור 7.1: מעגל חשמלי

- מערכת משוואות מסוג זה עשויה להיראות למשל כך

$$i_1'(t) = -\frac{R_2}{L_1}i_2(t) - \frac{R_3}{L_1}i_3(t)$$

$$i_2'(t) = -\left(\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_1}\right)i_2(t) - \left(\frac{R_1}{L_2} - \frac{R_3}{L_1}\right)i_3(t)$$

$$i_3'(t) = -\left(\frac{R_1}{L_3} - \frac{R_2}{L_1}\right)i_2(t) - \left(\frac{R_1}{L_3} - \frac{R_3}{L_1} + \frac{R_3}{L_3}\right)i_3(t)$$

כאשר הפונקציות הנעלמות $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ מציינות את העוצמה של הזרם החשמלי העובר בחוטים שונים במעגל כפונקציה של הזמן t.

- נציג עוד מספר דוגמאות של מערכות מסדר ראשון, תוך כדי ציון סוג המערכת **בצורתה הנורמלית**. ברוב המקרים המערכת תכלול n משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, של n פונקציות נעלמות: $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, כאשר t הוא בדרך כלל משתנה הזמן.

- **מערכת משוואות הומוגנית בעלת מקדמים קבועים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

- **מערכת משוואות הומוגנית בעלת מקדמים משתנים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = t^2x_1(t) - 3tx_2(t) \\ x_2'(t) = (1-t)x_1(t) + t^7x_2(t) \end{cases}$$

- **מערכת משוואות לא-הומוגנית בעלת מקדמים קבועים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 5x_1(t) - 3x_2(t) + \cos t \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) - e^t \end{cases}$$

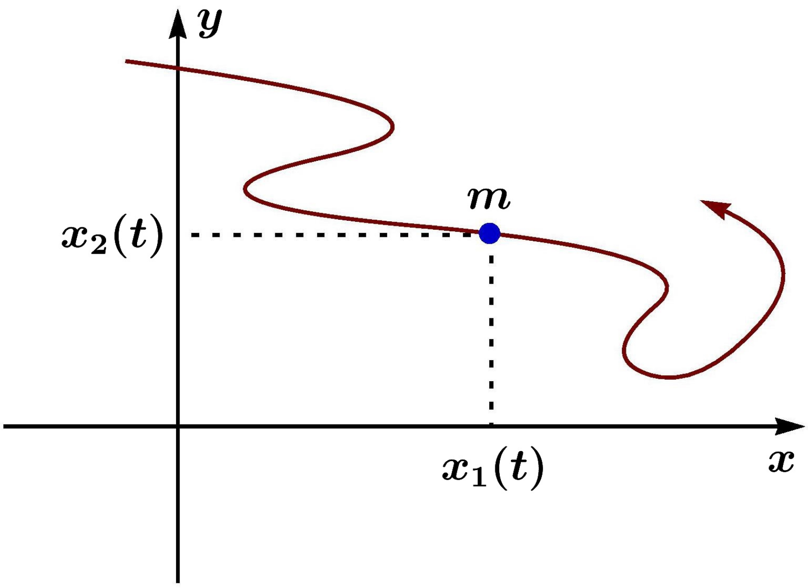
- לבעיות התחלה יש לצרף n תנאי התחלה (כאן $n = 2$)

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 8 \\ x_2(0) &= -6 \end{aligned}$$

- **דוגמא של מערכת אקולוגית**
  - $x_1(t)$ יציין את מספר הארנבות בזמן t ביער נתון
  - $x_2(t)$ יציין את מספר השועלים ביער
  - מסתבר ששתי הפונקציות $x_1(t)$, $x_2(t)$ מקיימות את המערכת

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_1x_1(t) - b_1x_1(t)x_2(t) \\ x_2'(t) &= b_2x_1(t)x_2(t) - a_2x_2(t) \end{cases}$$

  זוהי כמובן מערכת לא-ליניארית.
  - a_1 הוא קצב הגידול של אוכלוסיית הארנבות
  - a_2 הוא קצב התמותה של אוכלוסיית השועלים
  - b_1, b_2 הם קבועי אינטראקציה
- **דוגמא פיזיקאלית: תנועת חלקיק במישור**
  - $x_1(t)$ יציין את הקואורדינטה של החלקיק m על ציר ה־x בזמן t
  - $x_2(t)$ יציין את הקואורדינטה של החלקיק m על ציר ה־y בזמן t
  - פונקציות המיקום $x_1(t)$, $x_2(t)$ של החלקיק מקיימות המערכת משוואות



איור 7.2: תנועה של חלקיק בעל מסה m במישור

דיפרנציאליות מסדר שני

$$\begin{cases} mx_1''(t) &= F_1(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) \\ mx_2''(t) &= F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) \end{cases}$$

- F_1 הוא הכוח האופקי הפועל על החלקיק m בתלות בזמן, מיקום, והמהירות הריגעית של m בזמן t
- F_2 הוא הכוח האנכי הפועל על החלקיק m בתלות בזמן, מיקום, והמהירות הריגעית של m בזמן t
- המערכת מתארת למעשה את הפירוק של החוק השני של ניוטון לרכיב אנכי ורכיב אופקי.

- באותה הצורה נוכל למדל תנועת חלקיק מסה במרחב התלת-מימדי $\mathbb{R}^3$ באמצעות שלוש פונקציות $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

משפט הקיום והיחידות עבור מערכות של משוואות דיפרנציאליות מסדר 1

§7.1

משפט 7.1: נתונה מערכת של n משוואות דיפרנציאליות ב־n פונקציות נעלמות $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, **בצורה הנורמלית** הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& F_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ x_2'(t) &=& F_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) &=& F_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{cases} \qquad \begin{array}{rcl} x_1(t_0) &=& \alpha_1 \\ x_2(t_0) &=& \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n(t_0) &=& \alpha_n \end{array}$$

כאשר

א. F_1, F_2, ..., F_n פונקציות של $n+1$ משתנים אשר כל נגזרותיהן הראשונות $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות בתחום $n+1$-מימדי פתוח $\mathscr{D}$ במרחב $\mathbb{R}^{n+1}$ (אין דרישת גזירות על פי המשתנה t).

ב. הנקודה $(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ היא נקודה פנימית של התחום $\mathscr{D}$.

אזי קיימת סביבה (α,β) סביב הנקודה t_0 אשר בה קיים פיתרון אחד ויחיד $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ המקיים את מערכת המשוואות וגם את תנאי ההתחלה.

הערה: משפט הקיום והיחידות עבור משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר 1 הוא מקרה פרטי ($n=1$) של המשפט הנ"ל.

הצורה הנורמלית של **מערכת משוואות ליניארית לא-הומוגנית** מסדר 1 עם תנאי התחלה היא

$$\left\{\begin{array}{rcl|rcl} x_1'(t) & = & p_{11}(t)x_1(t)+p_{12}(t)x_2(t)+\cdots+p_{1n}(t)x_n(t)+q_1(t) & x_1(t_0) & = & \alpha_1 \\ x_2'(t) & = & p_{21}(t)x_1(t)+p_{22}(t)x_2(t)+\cdots+p_{2n}(t)x_n(t)+q_2(t) & x_2(t_0) & = & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & p_{n1}(t)x_1(t)+p_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+p_{nn}(t)x_n(t)+q_n(t) & x_n(t_0) & = & \alpha_n \end{array}\right.$$

כאשר כל הפונקציות $p_{ij}(t)$, $q_i(t)$ מוגדרות ורציפות מעל קטע פתוח (α,β), והנקודה t_0 שייכת לקטע. אם כל הפונקציות $q_i(t)$ מתאפסות אז מקבלים צורה נורמלית של **מערכת ליניארית הומוגנית**

$$\left\{\begin{array}{rcl|rcl} x_1'(t) & = & p_{11}(t)x_1(t)+p_{12}(t)x_2(t)+\cdots+p_{1n}(t)x_n(t) & x_1(t_0) & = & \alpha_1 \\ x_2'(t) & = & p_{21}(t)x_1(t)+p_{22}(t)x_2(t)+\cdots+p_{2n}(t)x_n(t) & x_2(t_0) & = & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & p_{n1}(t)x_1(t)+p_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+p_{nn}(t)x_n(t) & x_n(t_0) & = & \alpha_n \end{array}\right.$$

משפט הקיום והיחידות עבור מערכות ליניאריות של משוואות מסדר 1 §7.1.1

משפט 7.2: אם כל הפונקציות $p_{ij}(t)$, $q_i(t)$ מוגדרות ורציפות מעל קטע פתוח (α,β) הכולל בתוכו את הנקודה t_0, אזי קיים פיתרון אחד ויחיד

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$$

המקיים את המערכת בכל תחום ההגדרה (α,β), ומקיים את כל תנאי ההתחלה.

יש לשים לב לכך שבניגוד למשפט הקיום והיחידות הכללי, במערכות ליניאריות הקיום והיחידות של הפיתרון מובטח על **כל** תחום ההגדרה ולא על תת-תחום.

מערכות של משוואות מסדר גבוה §7.1.2

נציין כי שלא כמו במשוואות דיפרנציאליות רגילות, הטיפול במערכות דיפרנציאליות מסדר 1 הוא מספיק כללי מאחר וכל מערכת משוואות מסדר גבוה יותר ניתן להמיר בקלות למערכת מסדר 1. נסביר את הרעיון באמצעות דוגמא. למשל, את המערכת מסדר 2 הבאה

$$\begin{cases} x_1''(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_1'(t) + 4x_2'(t) \\ x_2''(t) &= 5x_1(t) - 6x_2(t) + 7x_1'(t) + 8x_2'(t) \end{cases}$$

נוכל להפוך למערכת מסדר 1 על ידי הוספת שתי פונקציות נוספות $x_3(t)$, $x_4(t)$, והוספת שתי משוואות באופן הבא

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_4(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_3(t) + 4x_4(t) \\ x_4'(t) &= 5x_1(t) - 6x_2(t) + 7x_3(t) + 8x_4(t) \end{cases}$$

לכן הטיפול הממוקד במערכות דיפרנציאליות מסדר 1 הוא מוצדק ומספיק בהחלט בקורס מבוא למשוואות דיפרנציאליות.

תרגיל 7.1: על ידי שימוש בהליך הקודם, בצע המרה של משוואה דיפרנציאלית ליניארית רגילה מסדר n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_0(t)y = q(x)$$

למערכת משוואות ליניארית $n \times n$ מסדר 1.

רישום מטריציוני §7.1.3

על ידי שימוש במשפטים מתאימים מתחום האלגברה הליניארית ניתן לחקור מערכות של משוואות דיפרנציאליות ליניאריות באמצעות כלים מהאלגברה הליניארית. נתחיל ברישום מטריציוני של מערכת ליניארית של מערכת ליניארית לא-הומוגנית

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

נשתמש גם בייצוג וקטורי

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

נוכל לקודד גם את תנאי ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

על ידי השוויון הוקטורי

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\alpha}$$

לכן המערכת שלנו מצטמצמת למערכת הוקטורית הבאה

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{q}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

פיתרון מערכת ליניארית על ידי שיטת האלימינציה §7.1.4

בשיטת האלימינציה יש לנסות לבטא את אחת מהפונקציות הנעלמות על ידי שאר הפונקציות ועל ידי כך להקטין את המערכת. תופעת לוואי של שיטה זו היא שסדר הגזירה עשוי לגדול.

נציג שיטת פיתרון פשוטה על ידי הדוגמא הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נובע כי $x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t)$, ולכן

$$x_2'(t) = x_1''(t) - x_1'(t)$$

נחליף את $x_2(t)$ ואת $x_2'(t)$ במשוואה השניה בביטוים המתאימים

$$x_1''(t) - x_1'(t) = 4x_1(t) - 2[x_1'(t) - x_1(t)]$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה ליניארית מסדר 2

$$x_1''(t) + x_1'(t) - 6x_1(t) = 0$$

השורשים של הפולינום האופייני $r^2 + r - 6r = 0$ הם $r = -3, 2$ ולכן

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ x_2(t) &= x_1'(t) - x_1(t) \\ &= -3c_1e^{-3t} + 2c_2e^{2t} - c_1e^{-3t} - c_2e^{2t} \\ &= -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{aligned}$$

מקובל לרשום את הפיתרון הכללי של המערכת כצירוף ליניארי של שני פיתרונות בצורה וקטורית

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

צורת הרישום הזו מרמזת על קשר אפשרי בין מערכות של משוואות דיפרנציאלית ושיטות פיתרון מתחום האלגברה הליניארית.

מערכת ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים §7.2

הצורה הכללית של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים נראית כך

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

כאשר a_{ij} הם קבועים ממשיים. הרישום המטריציוני של המערכת הוא

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

נסמן את **מטריצת המקדמים** על ידי A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ואז נוכל לייצג את המערכת שלנו על ידי

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

וקטור של n פונקציות $\vec{u}(t)$

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

נקרא **פיתרון של המערכת** אם הוא מקיים

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

לכל t ממשי (תחום הקיום של מערכת בעלת מקדמים קבועים הוא $\mathbb{R}$).

במשפט הבא נוכיח כי **הצירוף הליניארי** של כל שני פיתרונות, גם הוא פיתרון

משפט 7.3: אם $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ הם שני פיתרונות של המערכת

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

אז גם הצירוף הליניארי $c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ הוא פיתרון של המערכת.

הוכחה: נציין כי הוכחת משפט זה בצורת הרישום המקורית עשויה להיות ארוכה ומייגעת. צורת הרישום המטריציונית מאפשרת לנו להוכיח טענות מסוג זה בקלות רבה. אנו כמובן מסתמכים על משפטים מתאימים מהאלגברה הליניארית

$$A(c_1\vec{u} + c_2\vec{v}) = c_1A\vec{u} + c_2A\vec{v} = c_1\vec{u}'(t) + c_2\vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}[c_1\vec{u}(t) + c_2\vec{v}(t)]$$

קיבלנו לכן ש־

$$\frac{d}{dt}[c_1\vec{u}(t) + c_2\vec{v}(t)] = A(c_1\vec{u} + c_2\vec{u})$$

ולכן הצירוף הליניארי $c_1\vec{u} + c_2\vec{u}$ גם הוא פיתרון של המערכת. ∎

בדוגמא הקודמת למשל

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

נוכל לרשום את המערכת בצורה מטריציונית

$$\begin{pmatrix} x_1't) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

למעלה מצאנו פיתרון כללי

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

ניתן להציג אותו כצירוף ליניארי של שני פיתרונות יסודיים

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

השאלה היא האם זהו הפיתרון הכללי של המערכת? נוכיח בהמשך כי מרחב הפיתרונות של המערכת הוא מרחב וקטורי שמימדו 2 (גודל המערכת). מאחר ושני הוקטורים

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

הם בלתי-תלויים ליניארית, הם מהווים בסיס למרחב הפיתרונות, ולכן הפיתרון שגילינו הוא אכן הפיתרון הכללי.

ללא הגבלת הכלליות ננסח את המשפטים והדוגמאות שבהמשך הפרק במונחים של מערכת משוואות מסדר 2×2 או 3×3 בכדי להעביר את הרעיונות באופן ברור. קל מאוד להכליל אותם למערכות משוואות מסדר $n \times n$.

משפט 7.4: יהיו $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, שלושה פיתרונות בלתי תלויים ליניארית של מערכת המשוואות ההומוגנית מגודל 3×3

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β). אזי כל פיתרון של המערכת הוא צירוף ליניארי של שלושת הפיתרונות הנ"ל. כלומר, הפיתרון הכללי של המערכת נתון על ידי

$$\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t) + c_3\vec{u}_3(t)$$

נניח כי

$$\vec{u}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

הם שלושה פיתרונות של מערכת משוואות ליניארית אז ניתן לבדוק את התלות או אי-תלות ליניארית שלהם באמצעות הורונסקיאן

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix}$$

אם הורונסקיאן $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) \neq 0$ אז הוקטורים $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ בלתי תלויים ליניארית.

משפט 7.5: אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ הם פיתרונות של המערכת

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β), אזי או שהורונסקיאן $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ מתאפס זהותית על כל התחום (α, β) או שלכל t בתחום (α, β), $W(t) \neq 0$.

נוסחת אבל (Niels Henrik Abel 1802-1829) §7.2.1

אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ מערכת יסודית של פיתרונות של מערכת משוואות עם מקדמים משתנים, אז

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} [p_{11}(t) + p_{22}(t) + p_{33}(t)] dt}$$

עבור מערכת משוואות בעלת מקדמים קבועים, הנוסחה תראה כך

$$\boldsymbol{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(0)e^{(a_{11}+a_{22}+a_{33})t}}$$

הסכום $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ הוא סכום איברי האלכסון של מטריצת המקדמים A, והוא נקרא העקבה (trace) של A ולפעמים מסומן על ידי $\mathrm{trace}(A)$. מהנוסחה נובע כמובן שהורונסקיאן אינו תלוי בפיתרונות הספציפיים והוא זהה עבור כל מערכת יסודית של פיתרונות.

למשל, במערכת 2×2 הבאה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

הערך של הורונסקיאן הוא

$$W = W(0)e^{\int_0^t 8dt} = W(0)e^{8t}$$

מצאנו למעלה כי שני הוקטורים הבאים מהווים מערכת פיתרונות יסודית

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

ולכן הורונסקיאן של המערכת הוא

$$W = 2e^{8t}$$

הוכחה עבור $n = 2$:

נניח כי $\vec{u}$, $\vec{v}$ שני פיתרונות מערכת משוואות ליניארית הומוגנית

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

הורונסקיאן של u, v הוא

$$W[\vec{u}, \vec{v}](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$$

הנגזרת של הורונסקיאן לפי t היא

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}W[\vec{u}, \vec{v}] &= [x_1'(t)y_2(t) - x_1(t)y_2'(t)] - [x_2'(t)y_1(t) - x_2(t)y_1'(t)] \\
&= \begin{vmatrix} x_1'(t) & y_1'(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{22}x_2 & a_{22}y_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

השוויון האחרון הושג באמצעות פעולות שורה

$$\begin{aligned}
R_1 &\leftarrow R_1 - a_{12}R_2 \quad \text{(determinant 1)} \\
R_2 &\leftarrow R_2 - a_{21}R_1 \quad \text{(determinant 2)}
\end{aligned}$$

קיבלנו לכן

$$W' = a_{11}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})W$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית פרידה

$$\frac{dW}{W} = (a_{11}+a_{22})dt$$

שפיתרונה הכללי

$$W = W(0)e^{(a_{11}+a_{22})t}$$

נציין כי במקרה הכללי מתקבלת משוואה דיפרנציאלית פרידה

$$\boxed{\frac{dW}{W} = \operatorname{trace}(A)\,dt}$$

שפיתרונה הכללי הוא נוסחת אבל שרשמנו למעלה

$$W = e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{trace}(A)dt}$$

משפט 7.6: לכל מערכת משוואות ליניארית הומוגנית מסדר $n\times n$,

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α,β), קיימת מערכת יסודית של פתרונות בגודל n.

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור מערכת משוואות מסדר 3×3. תהי t_0 נקודה כלשהי בתחום (α,β). על פי משפט הקיום והיחידות למערכות ליניאריות קיים

פיתרון $\vec{u}_1(t)$ של המערכת המקיים את תנאי ההתחלה

$$\vec{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

באותו אופן, קיימים פיתרונות $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, המקיימים

$$\vec{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

על פי המשפט הקודם הקבוצה $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, היא בלתי-תלויה ליניארית כי הורונסקיאן שלה אינו מתאפס בנקודה t_0

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

אם $\vec{u}(t)$ הוא פיתרון כלשהו של המערכת אז נסמן

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{u}(t_0)$$

נסמן

$$\vec{v}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t) + c_3\vec{u}_3(t)$$

אזי

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_0) &= c_1\vec{u}_1(t_0)+c_2\vec{u}_2(t_0)+c_3\vec{u}_3(t_0)\\ &= c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

על פי משפט הקיום והיחידות, $\vec{u}(t)=\vec{v}(t)$ לכל t בתחום (α,β), כלומר $\vec{u}$ הוא צירוף ליניארי של הפיתרונות $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, ולכן הקבוצה $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ היא בסיס למרחב הפיתרונות של המערכת. ∎

המשפט הקודם מוכיח את קיומו התאורטי של בסיס למרחב הפיתרונות של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית, אך אינו נותן רמז כלשהו לאיך למצוא בסיס פיתרונות כזה. בשלב הבא של הסיור שלנו נתאר שיטה למציאת מערכת פיתרונות בסיסית כזו עבור המקרה של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים.

§7.3 שיטות פיתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית

$$\vec{u}'(t)=A\vec{u}(t) \tag{7.1}$$

כאשר A מטריצת מקדמים קבועים מסדר $n\times n$. לשם נוחות נתמקד במקרה של מערכת מגודל 3×3. בדומה למקרה של משוואות ליניאריות הומוגניות רגילות, נחפש פיתרונות מהצורה

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda t}\\c_2e^{\lambda t}\\c_3e^{\lambda t}\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\vec{c}$$

סימננו את וקטור הקבועים על ידי $\vec{c}$. הנגזרת של $\vec{u}(t)$ היא

$$\vec{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\vec{c}$$

ולכן מערכת המשוואות שלנו הופכת למשוואה מטריציונית

$$A \cdot e^{\lambda t}\vec{c} = \lambda e^{\lambda t}\vec{c}$$

ולאחר צימצום הביטוי $e^{\lambda t}$

$$A\vec{c} = \lambda\vec{c} \tag{7.2}$$

ומקבלים מערכת משוואות ליניארית הומוגניות

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \vec{0} \tag{7.3}$$

כאשר I היא מטריצת היחידה

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המערכת (7.3) מוכרת לנו משדה האלגברה הליניארית בנושא וקטורים וערכים עצמיים. על פי משפט יסודי של האלגברה הליניארית, למערכת (7.3) קיים פיתרון לא טריביאלי $\vec{c} \neq \vec{0}$ אם ורק אם

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{7.4}$$

הדטרמיננה שבאגף שמאל היא למעשה **הפולינום האופייני** של המטריצה A, וכל שורש λ של הפולינום האופייני נקרא **ערך עצמי** של המטריצה A, כל פיתרון

לא טריביאלי $\vec{c}$ של המערכת (7.3), נקרא **וקטור עצמי השייך ל־**λ. כאמור, לכל וקטור עצמי $\vec{c}$ מתאים פיתרון יסודי $e^{\lambda t}\vec{c}$ עבור המערכת הדיפרנציאלית (7.1). והוקטורים $\vec{c}$ הם הוקטורים העצמיים השייכים לערכי λ. על פי המשפט האחרון, אנו זקוקים בדיוק לשלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים בכדי לקבל בסיס למרחב הפיתרון של המערכת הדיפרנציאלית (7.1). נסביר על ידי דוגמא פשוטה של מערכת 2×2 שבה אנו נדרשים למצוא בסיס של שני וקטורים עצמיים.

דוגמא 1: מצא פיתרון כללי למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

פיתרון: נעבור לרישום מטריציוני

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

נחשב את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

השורשים של הפולינום האופייני הם $\lambda = 3, 5$. נחשב את הוקטורים העצמיים

המתאימים לערכים אלה

$$(A-3I)\vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-5I)\vec{c} \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא קשה למצוא את שני הוקטורים העצמיים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

קיבלנו לכן שני פיתרונות למערכת

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{5t}$$

הורונסקיאן של שני פיתרונות אלה בנקודה $t = 0$ הוא

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

אינו מתאפס כי מערכת של וקטורים עצמיים היא תמיד בלתי-תלויה (לכן בדיקת הורונסקיאן אינה הכרחית, אך מומלצת למטרות בדיקה כפולה). הפיתרון הכללי של המערכת הוא לכן

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix}$$

דוגמא 2: מצא פיתרון פרטי עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t)+x_2(t)-x_3(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t)+3x_2(t)-4x_3(t) \\ x_3'(t) &= 4x_1(t)+x_2(t)-4x_3(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 5 \\ x_2(0) &= 10 \\ x_3(0) &= 15 \end{aligned}$$

פיתרון: מטריצת המקדמים היא

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני הוא

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(\lambda-3)(\lambda+4)+4] - (-8-2\lambda+16) - (2-12+4\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-8)+8+2\lambda-16-2+12-4\lambda$$

$$= \lambda^2+\lambda-8-\lambda^3-\lambda^2+8\lambda+6-2\lambda$$

$$= -\lambda^3+7\lambda-6=0$$

קיבלנו פולינום ממעלה שלישית שנפתור על ידי ניחוש

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - 7\lambda + 6 &= \lambda^3 - \lambda - 6\lambda + 6 \\
&= \lambda(\lambda^2 - 1) - 6(\lambda - 1) \\
&= \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) - 6(\lambda - 1) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

קיבלנו שלושה ערכים עצמיים שונים

$$\lambda = 1, \quad 2, \quad -3$$

מציאת וקטורים עצמיים

$$\begin{aligned}
(A - I)\vec{c} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(A - 2I)\vec{c} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(A + 3I)\vec{c} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

על ידי שיטת הדירוג נמצא את הוקטורים העצמיים

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -3: \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

לכן הפיתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

מציאת פיתרון פרטי

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

נקבל מערכת משוואות ליניאריות

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 5 \\ c_1 + 2c_2 + 7c_3 &= 10 \\ c_1 + c_2 + 11c_3 &= 15 \end{cases}$$

פיתרון בשיטת הדירוג יניב את הפיתרון $c_1 = 5$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. לכן

הפיתרון של בעיית ההתחלה הוא

$$\begin{cases} x_1(t) &= 5e^{t}-e^{2t}+e^{-3t} \\ x_2(t) &= 5e^{t}-2e^{2t}+7e^{-3t} \\ x_3(t) &= 5e^{t}-e^{2t}+11e^{-3t} \end{cases}$$

ערכים עצמיים בעלי ריבוי אלגברי וגאומטרי זהה $k>1$ §7.3.1

בשתי הדוגמאות הקודמות קיבלנו ערכים עצמיים פשוטים. כלומר ערכים עצמיים שהריבוי האלגברי שלהם הוא 1. במקרים אחרים אנו עשויים לקבל ערכים עצמיים λ בעלי ריבוי אלגברי k גדול מאחד. הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי λ הוא המימד של מרחב הוקטורים העצמיים השייכים לו. מספר זה נע בין 1 ל-k.

בשלב הנוכחי נטפל במקרה בו הריבוי הגאומטרי זהה לריבוי האלגברי k. כלומר לערך העצמי λ יש k וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\dots$, $\vec{v}_k$. במקרה כזה, לערך העצמי λ יתאימו k פיתרונות יסודיים של המערכת הדיפרנציאלית (7.1):

$$\vec{v}_1e^{\lambda t},\quad \vec{v}_2e^{\lambda t},\quad \dots,\vec{v}_ke^{\lambda t}$$

דוגמא 3: נתונה המערכת

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

קל לבדוק שלמטריצת המקדמים יש בדיוק שני ערכים עצמיים: $\lambda=-1,2$, כאשר $\lambda=-1$ הוא ערך עצמי בעל ריבוי אלגבר 2, וגם הריבוי הגאומטרי שלו

הוא 2. לכן הפיתרון של המשוואות האופייניות מניב שלושה וקטורים עצמיים

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא 4: במקרה הכי פשוט שבו מטריצת המקדמים היא מטריצת היחידה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

קיים ערך עצמי יחיד בלבד $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 3, כי הפולינום האופייני הוא

$$(1 - \lambda)^3 = 0$$

אבל גם הריבוי הגאומטרי הוא 3 מאחר וקיימים שלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים לו

$$\lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים מרוכבים פשוטים §7.3.2

בשלב זה נטפל בערך עצמי מרוכב פשוט $\lambda = a + bi$ (ריבוי אלגברי 1). מאחר ומקדמי הפולינום האופייני ממשיים, לכל שורש מרוכב $\lambda = a + bi$ מצטרף השורש הצמוד $\lambda = a - bi$. לכן במקרה כזה יש לחלץ זוג וקטורים עצמיים בלתי תלויים שיתאימו לזוג השורשים.

טענה: אם $\vec{c}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = a + bi$, אזי הוקטור הצמוד $\bar{\vec{c}}$ גם הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי הצמוד $a - bi$.

הוכחה:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\vec{c}} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i \\ a_2 - b_2 i \\ a_3 - b_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} i$$

לכן

$$A\vec{c} = \lambda\vec{c} \implies \overline{A\vec{c}} = A\bar{\vec{c}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{c}}$$

קיבלנו $A\bar{\vec{c}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{c}}$, לכן $\bar{\vec{c}}$ הוא וקטור עצמי השייך ל־ $\bar{\lambda}$. ∎

טענה: תהי

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מערכת משוואות ליניארית בעלת מקדמים קבועים, ויהי

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} i$$

וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = a + bi$. אזי $\vec{c}e^{\lambda t}$ והצמוד שלו הם שני פיתרונות מרוכבים של המערכת, אשר החלק הממשי והמדומה שלהם הם שני פיתרונות ממשיים בלתי-תלויים של המערכת.

הוכחה: לא קשה לראות ש־ $\vec{c}e^{\lambda t}$ הוא פיתרון מרוכב של המערכת

$$A\vec{c}e^{\lambda t} = \lambda\vec{c}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}\left[\vec{c}e^{\lambda t}\right]$$

הוכחנו למעלה כי גם הצמוד הוא פיתרון. נסמן

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

אזי $\vec{c} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta}$. נחשב את החלק הממשי והחלק המדומה של הפיתרון $\vec{c}e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \vec{c}e^{\lambda t} &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta} i)e^{(a+bi)t} \\ &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta} i)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta} i)\left(e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt\right) \\ &= \left(\vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt\right) + \left(\vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt\right) i \end{aligned}$$

באותו אופן נראה כי

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta} i)e^{(a-bi)t} = \left(\vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt\right) - \left(\vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt\right) i$$

נסמן

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt \\ \vec{v}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt \end{aligned}$$

משני השוויונים שהוכחנו נובע כי

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \tfrac{1}{2}\left[(\vec{\alpha} + \vec{\beta} i)e^{(a+bi)t} + (\vec{\alpha} - \vec{\beta} i)e^{(a-bi)t}\right] \\ \vec{v}(t) &= \tfrac{1}{2i}\left[(\vec{\alpha} + \vec{\beta} i)e^{(a+bi)t} - (\vec{\alpha} - \vec{\beta} i)e^{(a-bi)t}\right] \end{aligned}$$

כלומר $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ הם פיתרונות ממשיים כי הם התקבלו כצירופים ליניאריים

של הפיתרונות המרוכבים. לכן קיבלנו שני פיתרונות ממשיים למערכת:

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= \vec{\alpha}e^{at}\cos bt - \vec{\beta}e^{at}\sin bt\\ \vec{v}(t) &= \vec{\alpha}e^{at}\sin bt + \vec{\beta}e^{at}\cos bt\end{aligned}$$

■

הערה: לא מומלץ לנסות לזכור בעל פה את שתי הנוסחאות האחרונות. יספיק לזכור את צורת הפיתרון הראשון $e^{(a+bi)t}(\vec{\alpha}+i\vec{\beta})$ בלבד! שתי הנוסחאות האחרונות הן למעשה החלק הממשי והמדומה של צורה זו (לוקח פחות מחצי דקה לקבל את שתי הנוסחאות בצורה זו).

דוגמא 5: מצא פיתרון כללי למערכת

$$\begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

פיתרון: הפולינום האופייני כאן הוא

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

השורשים של הפולינום הם $\lambda = 3+2i$, $\lambda = 3-2i$. על פי הניתוח שעשינו למעלה, יספיק למצוא וקטור עצמי עבור $\lambda = 3+2i$

$$(A-\lambda I)\vec{c} = \begin{pmatrix} 1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

מקבלים וקטור עצמי

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

הפיתרון המרוכב המתאים הוא

$$\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}e^{(3+2i)t}$$

נפרק אותו לחלק הממשי והמדומה

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}e^{(3+2i)t} &= \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}i\right]\cdot e^{3t}(\cos 2t+i\sin 2t)\\ &= \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}\cos 2t-\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}e^{3t}\sin 2t\right]+i\left[\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}e^{3t}\cos 2t+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}\sin 2t\right]\end{aligned}$$

וקיבלנו את שני הפיתרונות הממשיים הבלתי תלויים

$$\vec{u}_1(t)=\begin{pmatrix}e^{3t}\cos 2t\\e^{3t}\cos 2t-2e^{3t}\sin 2t\end{pmatrix},\qquad \vec{u}_2(t)=\begin{pmatrix}e^{3t}\sin 2t\\-2e^{3t}\cos 2t+e^{3t}\sin 2t\end{pmatrix}$$

הפיתרון הכללי של המערכת הוא כמובן המרחב הנפרש על ידי $\{\vec{u}_1(t),\ \vec{u}_2(t)\}$

$$\vec{u}(t)=c_1\vec{u}_1(t)+c_2\vec{u}_2(t)=c_1\begin{pmatrix}e^{3t}\cos 2t\\e^{3t}\cos 2t-2e^{3t}\sin 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{3t}\sin 2t\\-2e^{3t}\cos 2t+e^{3t}\sin 2t\end{pmatrix}$$

ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 2 וריבוי גאומטרי 1 §7.3.3

כאן נטפל במקרה בו לערך העצמי λ ריבוי אלגברי 2 אך ריבוי גאומטרי 1. כלומר יש לנו וקטור עצמי יחיד $\vec{a}$ ששייך לערך העצמי λ אך אנו נדרשים לקבל שני פיתרונות יסודיים עבור המערכת הדיפרנציאלית שלנו. לשם כך נשתמש במושג של **וקטור עצמי מוכלל**.

הפיתרון היסודי הראשון שלנו הוא כמובן $\vec{x}(t)=\vec{a}e^{\lambda t}$.
את הוקטור השני $\vec{b}$ נקבל על ידי ניחוש פיתרון מהצורה:

$$\vec{x}(t)=\vec{a}te^{\lambda t}+\vec{b}e^{\lambda t}$$

לאחר הצבת צורה זו במערכת שלנו $\vec{x}'(t) = A\vec{x}$ נקבל

$$\vec{a}(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + \lambda \vec{b} e^{\lambda t} = A(\vec{a} t e^{\lambda t} + \vec{b} e^{\lambda t})$$

ולכן

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) e^{\lambda t} + \lambda \vec{a} t e^{\lambda t} = A \vec{b} e^{\lambda t} + A \vec{a} t e^{\lambda t}$$

על ידי השוואת המקדמים של $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$ נקבל

$$\begin{aligned} A\vec{a} &= \lambda \vec{a} \\ A\vec{b} &= \vec{a} + \lambda \vec{b} \end{aligned}$$

ולכן המערכת הדרושה למציאת הוקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ היא

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{a} &= \vec{0} \\ (A - \lambda I)\vec{b} &= \vec{a} \end{aligned}$$

הערה: הוקטור $\vec{b}$ נקרא **וקטור עצמי מוכלל של** A, ובדרך כלל הוא מוגדר כפיתרון של המערכת $(A - \lambda I)^2 \vec{b} = \vec{0}$.

דוגמא 6: פתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

פיתרון: הפולינום האופייני

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

יש לנו ערך עצמי יחיד $\lambda = 2$ בעל ריבוי אלגברי 2. בנסיון חיפוש וקטורים

עצמיים

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

נגלה שיש לנו רק וקטור עצמי אחד. כלומר הריבוי הגאומטרי הוא 1.

$$\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

לכן על פי המוסבר לעיל יש לחפש וקטור עצמי מוכלל $\vec{b}$ על ידי פיתרון המערכת

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{a}}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

קל למצוא את הפיתרון

$$\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

ואז בסיס למרחב הפיתרונות הוא

$$\vec{u}_1(t)=\vec{a}e^{2t},\qquad \vec{u}_2(t)=\left(t\vec{a}+\vec{b}\right)e^{2t}$$

כלומר

$$\vec{u}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{2t},\qquad \vec{u}_2(t)=\begin{pmatrix}t\\ -t+1\end{pmatrix}e^{2t}$$

הפיתרון הכללי של המערכת הוא

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1 §7.3.4

יהי λ ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1. בדומה למקרה הקודם, נוכיח כי שלושת הוקטורים הדרושים $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ מתקבלים על ידי פיתרון שלושת המערכות הליניאריות

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\vec{a} &= \vec{0} \\ (A-\lambda I)\vec{b} &= \vec{a} \\ (A-\lambda I)\vec{c} &= \vec{b} \end{aligned}$$

והפיתרונות היסודיים למערכת (7.1) הם

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} \\ u_2(t) &= (t\vec{a}+\vec{b})e^{\lambda t} \\ u_3(t) &= (\tfrac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c})e^{\lambda t} \end{aligned}$$

הפיתרון היסודי הראשון מתקבל על ידי הוקטור העצמי היחיד $\vec{a}$. את הפיתרון השני והשלישי נקבל באמצעות וקטורים עצמיים מוכללים $\vec{b}$, $\vec{c}$. את נכונות הפיתרון השני כבר הוכחנו במקרה הקודם, ולכן נעבור להוכחת הפיתרון השלישי

$$\vec{u}_3'(t) = (t\vec{a}+\vec{b})e^{\lambda t} + \lambda\left(\frac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}\right)e^{\lambda t}$$

לאחר הצבת $\vec{u}_3'(t)$ במערכת $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ נקבל

$$(t\vec{a}+\vec{b})e^{\lambda t} + \lambda\left(\frac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}\right)e^{\lambda t} = A\left(\frac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}\right)e^{\lambda t}$$

לאחר צימצום $e^{\lambda t}$ וכינוס איברים נקבל

$$\frac{t^2}{2}\lambda\vec{a} + t(\vec{a} + \lambda\vec{b}) + (\vec{b} + \lambda\vec{c}) = \frac{t^2}{2}A\vec{a} + tA\vec{b} + A\vec{c}$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל

$$\begin{aligned} A\vec{a} &= \vec{a} \\ A\vec{b} &= \vec{a} + \lambda\vec{b} \\ A\vec{c} &= \vec{b} + \lambda\vec{c} \end{aligned}$$

או בצורה המקובלת

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{a} &= \vec{0} \\ (A - \lambda I)\vec{b} &= \vec{a} \\ (A - \lambda I)\vec{c} &= \vec{b} \end{aligned}$$

דוגמא 7: פתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

פיתרון: הפולינום האופייני של מטריצת המקדמים A הוא

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

לכן $\lambda = 2$ הוא ערך עצמי יחיד של A בעל ריבוי אלגברי 3. קל לבדוק

שהוקטור העצמי היחיד (עד כדי אי-תלות ליניארית) שיש ל־λ הוא

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

את הוקטור העצמי המוכלל $\vec{b}$ נקבל על ידי פיתרון המערכת $(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$. כלומר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פיתרון המערכת נותן

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

את הוקטור השלישי $\vec{c}$ נקבל על ידי פיתרון המערכת $(A - \lambda I)\vec{c} = \vec{b}$. כלומר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

פיתרון המערכת נותן

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן הבסיס למרחב הפיתרונות שלנו הוא

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\
u_2(t) &= (t\vec{a}+\vec{b})e^{\lambda t} = \left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} \\
u_3(t) &= (\tfrac{1}{2}t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c})e^{\lambda t} = \left[\tfrac{1}{2}t^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}
\end{aligned}$$

ולאחר פישוט

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad u_2(t) = \begin{pmatrix} t-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad u_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2-\frac{t}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} e^{2t}$$

§7.3.5 ערך עצמי מריבוי 3 בעל ריבוי גאומטרי 2

כאן בידינו ערך עצמי λ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2. כלומר יש לנו שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית $\vec{a}$, $\vec{b}$ בלבד.

א. שני הפיתרונות הראשונים שלנו הם

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} \\
\vec{u}_2(t) &= \vec{b}e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

ב. הפיתרון השלישי הוא מהצורה $\vec{u}_3(t) = (t\vec{d}+\vec{c})e^{\lambda t}$ כאשר $\vec{c}$ הוא צירוף

ליניארי של $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$$

כך שלמערכת $(A-\lambda I)\vec{d} = \vec{c}$ יש פיתרון לא טריביאלי $\vec{d}$.

לכן במקרה הנוכחי, בסיס למרחב הפיתרונות של המערכת ההומוגנית שלנו יהיה

$$\begin{cases} \vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_3(t) = (t\vec{d} + \vec{c})e^{\lambda t} \end{cases}$$

דוגמא 8: מצא פיתרון כללי למערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

פולינום אופייני

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 = 0$$

במקרה זה מתקבל ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2, כלומר יש לו בדיוק שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים

$$(A-\lambda I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קל לגלות שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

בשלב הבא עלינו למצוא שני קבועים α_1, α_2 כך שלמערכת

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$$

יש פיתרון לא טריביאלי $\vec{c}$. ניתן לעשות זאת על ידי דירוג מערכת של 3 משוואות ב־5 משתנים (c_1, c_2, c_3, α_1, α_2) אבל ברוב המקרים יותר פשוט לנחש α_1, α_2 מתאימים (קיימת דרגת חופש גבוהה). למשל אם נבחר $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, נקבל מערכת קלה

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

שעבורה קיים פיתרון לא טריביאלי

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

באמצעות שלושת הוקטורים שקיבלנו נבנה את הבסיס לפיתרון הכללי

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{u}_3(t) = \left[t(\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}) + \vec{c}\right] e^{-t} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 4t-2 \\ -2t+4 \end{pmatrix} e^t$$

תרגיל 7.2: פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

הדרכה:

א. בדוק שלמטריצת המקדמים יש ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2.

ב. הראה ששני הוקטורים הבאים הם וקטורים עצמיים השייכים לערך העצמי $\lambda = 1$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ג. נסה להגיע לוקטור המוכלל

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכת משוואות ליניארית לא-הומוגנית

§7.4

לאחר שסקרנו כמה שיטות פיתרון של מערכות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים, נעבור למערכת לא-הומוגנית (המקדמים נשארים קבועים). בכדי להבליט את הרעיון של שיטת הפיתרון, נתמקד בדוגמאות פשוטות של מערכות מסדר 2×2,

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$$

או בצורה יותר מפורטת

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

בשלב הראשון נמצא פיתרון כללי למערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

שנסמנו

$$\vec{h}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$$

כמו במקרה של משוואה רגילה, יספיק למצוא פיתרון פרטי למערכת הלא-

הומוגנית בשיטת הוריאציה של הפרמטרים

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\vec{u}_1(t) + c_2(t)\vec{u}_2(t)$$

הנגזרת של $\vec{p}(t)$ תהיה

$$\vec{p}'(t) = [c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_1(t)\vec{u}_1'(t)] + [c_2'(t)\vec{u}_2(t) + c_2(t)\vec{u}_2'(t)]$$

נציב את $\vec{p}(t)$ במערכת הלא-הומוגנית

$$\begin{aligned}
\vec{p}'(t) &= [c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_1(t)\vec{u}_1'(t)] + [c_2'(t)\vec{u}_2(t) + c_2(t)\vec{u}_2'(t)] \\
&= A\,[c_1(t)\vec{u}_1(t) + c_2(t)\vec{u}_2(t)] + \vec{q}(t) \\
&= c_1(t)A\vec{u}_1(t) + c_2(t)A\vec{u}_2(t) + \vec{q}(t) \\
&= c_1(t)\vec{u}_1'(t) + c_2(t)\vec{u}_2'(t) + \vec{q}(t)
\end{aligned}$$

קיבלנו את המשוואה

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

אותה נפתור בהמשך באמצעות הכלל של קרמר. הפיתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית ייתקבל על ידי הסכום של הפיתרון הפרטי והפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\vec{u}(t) = \vec{p}(t) + \vec{h}(t) = \vec{p}(t) + c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$$

נסכם את מה שמצאנו במשפט הבא:

משפט 7.7: אם $\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$
הוא הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$
ואם הפונקציות $c_1(t)$, $c_2(t)$ מקיימות את המשוואה

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

אזי

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\vec{u}_1(t) + c_2(t)\vec{u}_2(t)$$

הוא פיתרון פרטי של המערכת הלא-הומוגנית

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$$

המשפט כבר הוכח בניתוח שקדם לו.

דוגמא 9: מצא פיתרון כללי למערכת הלא-הומוגנית הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + e^{4t} \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 6x_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

פיתרון: בסעיף הקודם כבר מצאנו את הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix}$$

נחפש פונקציות $c_1(t)$, $c_2(t)$ כך ש־

$$c_1'(t)\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + c_2'(t)\begin{pmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

כלומר, יש לפתור מערכת משוואות ליניארית בפונקציות $c_1'(t)$, $c_2'(t)$

$$\begin{cases} e^{3t}c_1'(t) + e^{5t}c_2'(t) &= e^{4t} \\ -e^{3t}c_1'(t) - 3e^{5t}c_2'(t) &= e^{3t} \end{cases}$$

לכן

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{4t} & e^{5t} \\ e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{-3e^{9t} - e^{8t}}{-2e^{8t}} = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}$$

ובאותו אופן נחשב את $c_2'(t)$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{4t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{vmatrix}}{-2e^{8t}} = \frac{e^{6t} + e^{7t}}{-2e^{8t}} = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

על ידי אינטגרציה נקבל את $c_1(t)$, $c_2(t)$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \tfrac{3}{2}e^t + \tfrac{t}{2} \\ c_2(t) &= \tfrac{1}{4}e^{-2t} + \tfrac{t}{2}e^{-t} \end{aligned}$$

הפיתרון הפרטי למערכת הלא-הומוגנית הוא לכן

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \left(\tfrac{3}{2}e^{t}+\tfrac{t}{2}\right)\begin{pmatrix}e^{3t}\\-e^{3t}\end{pmatrix}+\left(\tfrac{1}{4}e^{-2t}+\tfrac{t}{2}e^{-t}\right)\begin{pmatrix}e^{5t}\\-3e^{5t}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}+\frac{t}{2}\right)e^{4t}+\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{2}\right)e^{3t}\\-\frac{3}{2}\left(1+t\right)e^{4t}-\left(\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\right)e^{3t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

הפיתרון הכללי למערכת הלא-הומוגנית הוא לכן

$$\vec{u}(t)=c_1\begin{pmatrix}e^{3t}\\-e^{3t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{5t}\\-3e^{5t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}+\frac{t}{2}\right)e^{4t}+\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{2}\right)e^{3t}\\-\frac{3}{2}\left(1+t\right)e^{4t}-\left(\frac{3}{4}+\frac{t}{2}\right)e^{3t}\end{pmatrix}$$

דוגמא 10: מצא פיתרון כללי למערכת הלא הומוגנית

$$\begin{cases}x_1'(t) = x_1(t)+4x_3(t)-2e^{t}\\ x_2'(t) = 3x_2(t)+9t\\ x_3'(t) = x_1(t)+x_3(t)+e^{t}\end{cases}$$

פיתרון: נעבור לצורת רישום מטריציונית

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\x_3'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2e^{t}\\9t\\e^{t}\end{pmatrix}$$

נשאיר לקורא לוודא כי הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

הוא

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

על פי שיטת הוריאציה של הפרמטרים עלינו למצוא פיתרון פרטי עבור המערכת הלא-הומוגנית מהצורה

$$\vec{p}(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

הצבת $\vec{p}(t)$ במערכת הלא-הומוגנית מובילה למערכת ליניארית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{t} \\ 9t \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

בכדי לפתור את המערכת יש לדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -2e^{-t} & 0 & 2e^{3t} & : & -2e^{t} \\ 0 & e^{3t} & 0 & : & 9t \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} & : & e^{t} \end{pmatrix}$$

לאחר ביצוע פעולות השורה הבאות

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow R_1 - 2R_3 \\ R_3 &\leftarrow 4R_3 + R_1 \\ R_1 &\leftarrow \tfrac{e^{-3t}}{4} R_1 \\ R_2 &\leftarrow e^{-3t} R_2 \\ R_3 &\leftarrow e^{t} R_3 \end{aligned}$$

נקבל את המטריצה המדורגת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & e^{2t} \\ 0 & 1 & 0 & : & 9te^{-3t} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי

$$c_1'(t) = e^{2t}, \quad c_2'(t) = 9te^{-3t}, \quad c_3'(t) = 0$$

ולכן

$$c_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t}, \quad c_2(t) = -3te^{-3t} - e^{-3t}, \quad c_3'(t) = 0$$

ולכן

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + (-3te^{-3t} - e^{-3t}) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ -3t-1 \\ \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}$$

ולכן הפיתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית הוא

$$\vec{u}(t) = c_1\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\ 0\\ e^{-t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}2e^{3t}\\ 0\\ e^{3t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-e^{t}\\ -3t-1\\ \frac{1}{2}e^{t}\end{pmatrix}$$

שימוש בכלל קרמר למציאת $c_i'(x)$

במקרים אחרים נעדיף להשתמש בכלל קרמר בכדי לפתור את המערכת

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t) \tag{7.5}$$

לשם כך ננצל את העובדה שהורונסקיאן של סדרת וקטורי עמודות הוא למעשה הדטרמיננטה הדרושה עבור כלל קרמר!

$$c_1'(t) = \frac{W[\vec{q},\vec{u}_2]}{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2]}, \qquad c_2'(t) = \frac{W[\vec{u}_1,\vec{q}]}{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2]}$$

במקרה של מערכת מגודל 3×3 שיטת הוריאציה של הפרמטרים תוביל אותנו למערכת

$$c_1'(t)\vec{u}_1(t) + c_2'(t)\vec{u}_2(t) + c_3'(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t) \tag{7.6}$$

נוכל להציג את הפיתרון על ידי

$$c_1'(t) = \frac{W[\vec{q},\vec{u}_2,\vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]}, \quad c_2'(t) = \frac{W[\vec{u}_1,\vec{q},\vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]}, \quad c_3'(t) = \frac{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{q}]}{W[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]}$$

נציין רק שחישוב דטרמיננטות מסדר 3×3 הוא בדרך כלל יותר יקר מדירוג של המטריצה, ולכן יש להגביל את השימוש בנוסחאות האחרונות רק למקרים בהן המטריצה דלילה, או לשימושים תאורטיים.

דוגמא 11: מצא פיתרון כללי למערכת הלא-הומוגנית

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + 1 \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_2(t) \\ x_3'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

פיתרון: נתחיל בפיתרון המערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני שלה הוא

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2$$

במהלך החישוב החסרנו את השורה השלישית מהשורה השנייה, ופיתוח הדטרמיננטה נעשה על פי השורה השלישית. קיבלנו שני ערכים עצמיים $\lambda = 0$, $\lambda = 6$.

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 0$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג פשוט תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זוהי מערכת עם דרגת חופש 2, ולכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 0$ הוא 2. לא קשה למצוא את שני וקטורים עצמיים הבאים

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים השייכים ל־$\lambda = 6$ מתקבלים על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלאחר דירוג ופישוט תהפוך למערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כצפוי, זוהי מערכת עם דרגת חופש 1, כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 6$ הוא

1. לא קשה למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפיתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \vec{c}e^{6t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

ולכן הפיתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\vec{h}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

עכשיו נחזור למערכת הלא-הומוגנית שלנו

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + q(t) \tag{7.7}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

על פי שיטת הווריאציה של הפרמטרים יש למצוא פיתרון פרטי $\vec{p}(t)$ שצורתו

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3(t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{6t}$$

כאשר $c_1'(t)$, $c_2'(t)$, $c_3'(t)$ מתקבלים מפיתרון המערכת

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c_2'(t)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3'(t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{6t} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

ניתן לפתור את המערכת הזו על ידי שיטת הדירוג או על ידי שימוש בנוסחאות המבוססות על כלל קרמר הנ"ל. במקרה הנוכחי

$$W = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] \;=\; \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}e^{6t} = 3e^{6t}$$

$$W_1 = W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3] \;=\; \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}e^{6t} = e^{6t}$$

$$W_2 = W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3] \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} e^{6t} = e^{6t}$$

$$W_3 = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}] \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

לכן

$$c_1'(t) = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{3}, \qquad c_2'(t) = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{3}, \qquad c_3'(t) = \frac{W_3}{W} = \frac{1}{3}e^{-6t}$$

לכן

$$c_1(t) = \frac{t}{3}, \qquad c_2(t) = \frac{t}{3}, \qquad c_3(t) = -\frac{1}{18}e^{-6t}$$

הפיתרון הפרטי שלנו הוא לכן

$$\vec{p}(t) = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

עקב הסבירות הגבוהה לשגיאת חישוב בתהליך הנ"ל מומלץ מאוד לבדוק שאכן $\vec{p}(t)$ הוא פיתרון של המערכת הלא-הומוגנית:

$$A\vec{p}(t) + \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \vec{p}'(t)$$

הפיתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית הוא

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

תרגילים

1. מצא פיתרון כללי עבור כל מערכת משוואות

א. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x'(t) + x(t) + 5y(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) = 0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \end{cases}$

ד. $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

ה. $\begin{cases} x_1'(t) = 7x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 6x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$

ו. $\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$

ז. $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

ח. $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$

ט. $\begin{cases} x'(t) = y(t) - 5\cos t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$

י. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + \cos t \\ y'(t) = -x(t) + 2\sin t \end{cases}$

יא. $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

יב.
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

יג.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

יד.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

טו.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

טז.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2y(t) + 3y(t) - x(t) \end{cases}$$

יז.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

יח.
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases}$$

יט.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

כ.
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 16te^t \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

כא.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} te^t \\ te^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

כב.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{array}$$

ב.
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) + e^t \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}$$

ג.
$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ד.
$$\begin{cases} x'(t) - x(t) - 5y(t) = 1 \\ y'(t) + 2x(t) + y(t) = e^t \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array}$$

ה.
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - 5\cos t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array}$$

ו.
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) + e^t \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}$$

3. נתונה המערכת

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} c & 1 & c \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

מצא את כל הערכים של c עבורם כל פיתרון $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ של המערכת חסום על כל הקרן $(0, \infty)$.