פרק 5

פיתרון משוואות באמצעות טורי חזקות

חזרה על נושא טורי חזקות

§5.1

חזרה תמציתית על נושא טורי חזקות. נושא זה אמור להיות מכוסה בקורסים של חדו"א 1 וחדו"א 2 ולכן מובאים עיקרי הדברים ללא הוכחות וללא פירוט רב מידי. השתדלנו לכלול רק נושאים שדרושים לנו עבור פיתרון משוואות דיפרנציאליות.

הגדרה 5.1: טור פונקציות מהצורה

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

נקרא **טור חזקות**.

הנקודה x_0 נקראת **מרכז הטור**.

הקבועים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראים **מקדמי הטור**.

איור 5.1: Colin Maclaurin
1698-1746

איור 5.2: Brook Taylor
1685-1731

- בחלק גדול מהדוגמאות והמקרים מרכז הטור הוא בדרך כלל $x_0 = 0$.
במקרה זה, יש לטור החזקות צורה יותר פשוטה

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

- **דוגמא 1:** כל פולינום הוא למעשה טור חזקות אשר כל מקדמיו מלבד מספר סופי מתאפס

$$-7x^2 + 100x - 19 = -19 + 100x - 7x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \cdots$$

לכן טור חזקות הוא הכללה של מושג הפולינום למימד אינסופי, ואכן בהקשרים מסוימים, טור חזקות נקרא לפעמים "פולינום אינסופי".

- **דוגמא 2:** טור החזקות הכי מוכר וידוע הוא הטור הגאומטרי

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

מרכז הטור הוא $x_0 = 0$, ולכל מקדמיו שווים 1 (כלומר, לכל n, $a_n = 1$).
כזכור הוא מתכנס בקטע הפתוח $(-1, 1)$.

- תזכורת: דוגמאות בולטות של טורי מקלורן (טורי טיילור סביב $x_0 = 0$)

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} &&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots, (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n &&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n &&= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

- יש לשים לב לכך שנוסחת הטור הגאומטרי היא מקרה פרטי של נוסחת מקלורן שלפניה ($\alpha = -1$, והחלפת x על ידי $-x$).

תחום התכנסות של טור חזקות

§5.1.1

- ברור כי כל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$.
- ככל שקצב הגידול של סדרת המקדמים a_n יותר מהיר כך מצטמצם תחום ההתכנסות של הטור.
- למשל טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$ בלבד! ($n^n x^n = (nx)^n$ מתבדר אם $x \neq 0$).
- לעומת זאת, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס עבור כל x ממשי.

משפט 5.1: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בנקודה $x = x_1$, אזי הוא מתכנס במידה שווה ובהחלט בכל קטע $[x_0 - r, x_0 + r]$ עבור כל r המקיים $0 < r < |x_1 - x_0|$.

- מהמשפט הקודם נובע שתחום ההתכנסות של טור חזקות חייב להיות

סימטרי סביב נקודת המרכז שלו x_0 (מה שמסביר את המונח "מרכז").

- **מסקנה:** תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ חייב להיות בעל אחת מהצורות הבאות:
  - א. נקודה בודדת $\{x_0\}$
  - ב. קטע פתוח מהצורה $(x_0-R,\ x_0+R)$
  - ג. קטע סגור מהצורה $[x_0-R,\ x_0+R]$
  - ד. קטע חצי-סגור מהצורה $[x_0-R,\ x_0+R)$
  - ה. קטע חצי-סגור מהצורה $(x_0-R,\ x_0+R]$
  - ו. כל הישר הממשי $(-\infty,\ \infty)$
- מהמשפט הקודם לא ניתן ללמוד דבר על נקודות הקצה של תחום התכנסות סופי. למשל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ מתכנס בנקודה $x=-1$ אך מתבדר עבור $x=1$. תחום ההתכנסות שלו הוא $[-1,1)$ (מרכז הטור הוא $x=0$).
- המספר R נקרא **רדיוס ההתכנסות של הטור** ויש לו ערך מתאים בכל אחת מהצורות א'-ו': בצורה א', $R=0$, ובצורה ו' $R=\infty$.

משפט 5.2: (נוסחת קושי-האדאמר)
רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

משפט 5.3: (נוסחת המנה לחישוב רדיוס התכנסות)
רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

בנוסחת האדאמר-קושי, במידה והגבול אינו קיים ניתן לקחת את הגבול העליון של הסדרה ($\limsup$).

$$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

תרגיל 5.1: אם רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא R, מה תוכל לומר על רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$?

התכנסות במידה שווה של טור חזקות

§5.1.2

כפי שראינו בשיעורים הקודמים, תכונת ההתכנסות במידה שווה מאפשרת לבצע פעולות שימושיות על טורים ולקבל תוצאות חשובות. לכן חשוב להכיר את התנאים שתחתיהם טור חזקות מתכנס במידה שווה.

משפט 5.4: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R

א. אם $R=0$ אז הטור מתכנס בנקודה $x=x_0$ בלבד

ב. אם $R=\infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור סופי $[a,b]$

ג. אם $0<R<\infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[a,b]$ המקיים

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R$$

- יש לציין כי המשפט אינו שולל אפשרות של התכנסות במידה שווה בתחומים גדולים יותר.
- למשל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ מתכנס נקודתית בקטע הסגור $[-1,1]$. המשפט הקודם מבטיח התכנסות במידה שווה בכל תת-קטע $[a,b]$ המקיים

$$-1 < a < b < 1$$

אך לא קשה לבדוק שהטור מתכנס במידה שווה (וגם בהחלט) בכל הקטע $[-1,1]$.

- לעומת זאת הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס נקודתית בקטע הפתוח $(-1,1)$, אך אינו מתכנס במידה שווה בכל הקטע $(-1,1)$. ולכן טענת המשפט אופטימלית עבורו.

משפט 5.5: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי $f(x)$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה x, $-R < x < R$. אם הטור מתכנס בנקודה $x = R$, אז $f(x)$ רציפה משמאל בנקודה זו. אם הטור מתכנס בנקודה $x = -R$, אז $f(x)$ רציפה מימין בנקודה זו.

גזירה ואינטגרציה של טור חזקות §5.1.3

משפט 5.6: **(אינטגרציה של טור חזקות)**
יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.
אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ב. לשני הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $R = x$, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

דוגמא 3: אם נבצע אינטגרציה של הטור ההנדסי

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

נקבל נוסחה פרקטית לחישוב הלוגריתם הטבעי

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

תחום ההתכנסות של הטור ההנדסי הוא $(-1,1)$ אך תחום ההתכנסות של טור הלוגריתם הוא $(-1,1]$.

משפט 5.7: (גזירה של טור חזקות)
יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.
אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ב. לשני הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $R = x$, אז גם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

- המשפט האחרון מאפשר לנו למעשה לגזור טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ כמה פעמים שנרצה

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \cdots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x0)^3 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \\
f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

כמובן כל הזהויות האלה תקפות בקטע $(-R, R)$ בלבד (כאשר R הוא רדיוס ההתכנסות).

- בנקודה x_0 (מרכז הטור) מתקבלים השוויונים הבאים:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= a_0 \\
f'(x_0) &= a_1 \\
f''(x_0) &= 2a_2 \\
f'''(x_0) &= 3 \cdot 2a_3 \\
\vdots &= \vdots \\
f^{(k)}(x_0) &= k!a_k
\end{aligned}$$

- המסקנה מהחישוב האחרון היא שניתן לבטא את מקדמי הטור באמצעות הנגזרות של $f^{(k)}(x)$ בנקודה x_0.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

משפט 5.8: (נגזרות גבוהות של טור חזקות)
יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, $R>0$. אזי לסכום $f(x)$ יש נגזרת מכל סדר בכל נקודה $|x|<R$. את הנגזרת מסדר k של $f(x)$ ניתן לקבל על ידי גזירת הטור איבר איבר k פעמים. בנוסף לכך, קיים הקשר הבא בין הנגזרת מסדר k והמקדם a_k של הטור

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

פיתוח פונקציה לטור חזקות

§5.1.4

משפט 5.9: (יחידות טור חזקות)
אם שני טורי חזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

מקיימים $f(x)=g(x)$ עבור כל x בקטע פתוח (x_0-r, x_0+r), עבור $r>0$, אזי לכל n טבעי, $a_n=b_n$.

- המשמעות של המשפט הקודם היא שאם ניתן בכלל להציג פונקציה $f(x)$ באמצעות טור חזקות סביב נקודה x_0, אז ניתן לעשות זאת בדרך אחת בלבד!
- השאלה שעניינה מתימטיקאים כמו טיילור ומקלורן היתה שבהינתן פונקציה המוגדרת בקטע (x_0-r, x_0+r), האם קיים טור חזקות מתאים שסכומו הוא $f(x)$ לכל x בקטע זה?

הגדרה 5.2: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת סביב נקודה x_0. כלומר קיים $0 < r \leq \infty$, כך שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$. נאמר כי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$, אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ כך ש־

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- נשאלת השאלה באילו תנאים ניתן לפתח פונקציה לטור חזקות?
- נתחיל עם תנאים הכרחיים שעל פונקציה לקיים בכדי שיהיה לה טור חזקות.

משפט 5.10: (תנאי הכרחי לקיום טור חזקות)
אם פונקציה $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב נקודה x_0, אז

א. תחום ההגדרה של $f(x)$ חייב להיות סימטרי מסביב x_0 (פרט לקצות הקטע)

ב. לפונקציה $f(x)$ יש נגזרת רציפה מכל סדר בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה

- התנאים הנ"ל הכרחיים, אך לא מספיקים! הדוגמא הנגדית הידועה ביותר היא הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ גזירה ברציפות על כל הישר הממשי, ומקיימת $f^{(n)}(0) = 0$ לכל סדר גזירה n, ולכן אם יש לה טור חזקות, על פי משפט היחידות הוא חייב להיות טור חזקות שכל מקדמיו אפס, וזה כמובן אבסורד.

- בכדי לענות על שאלת הקיום נחזור לנוסחת טיילור הידועה לנו מלימודי חדו"א 1:

משפט 5.11: (נוסחת טיילור)
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x=x_0$, ותהי x נקודה כלשהיא בסביבה זו. אזי קיימת נקודה c בין x_0 ו־x כך ש־

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

נקראת **נוסחת השארית של לגרנז'**.

- לאחר שנזכרנו והבנו מחדש את נוסחת טיילור מחדו"א 1, נוכל לנסח תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום טור חזקות.

משפט 5.12: (קיום טור חזקות)
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות אינסוף פעמים בסביבה (x_0-r,x_0+r) של הנקודה x_0. לכל n טבעי, תהי $R_n(x)$ נוסחת השארית של לגרנז', המתאימה לנוסחת טיילור של $f(x)$ סביב x_0. אזי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

עבור כל x בסביבה (x_0-r,x_0+r).

אריתמטיקה של טורי חזקות §5.1.5

- **הזזת אינדקס סכימה**
  - הזזת אינדקס הסכימה n מתבצעת על פי הכלל הפשוט הבא: בהחלפת אינדקס n באינדקס חדש $n+k$ יש להחסיר k מגבולות הסכימה
  - למשל: הטור $\sum_{n=17}^{100}a_nx^n$ שקול לטור $\sum_{n=12}^{95}a_{n+5}x^{n+5}$. במקרה זה:
    - אינדקס הסכימה הוא n

- גבולות הסכימה הם: 17, 100
- ההזזה היא: $k = 5$
- הטור $\sum_{n=17}^{100} a_n x^n$ שקול לטור $\sum_{n=22}^{105} a_{n-5} x^{n-5}$
  ההזזה כאן היא: $k = -5$

- בדרך כלל גבול הסכימה העליון הוא ∞ ולפעולת ההזזה אין עליו השפעה. לכן למשל הטור $\sum_{n=17}^{\infty} a_n x^n$ שקול לטור $\sum_{n=12}^{\infty} a_{n+5} x^{n+5}$
- ברוב המקרים אנו מעוניינים שבטור חזקות סטנדרטי תהייה התאמה בין האינדקס n והחזקה $(x - x_0)^n$. במקרים אחרים אנו מעוניינים "ליישר חזקות" בין שני טורים שונים.
- למשל אם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, אז בפעולת גזירה מאבדים את האיבר הראשון, ולכן יש לבצע הזזת אינדקס $k = -1$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

- בנגזרת השנייה מאבדים את שני האיברים הראשונים של הטור, ולכן יש לבצע הזזה $k = 2$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n$$

הכפלת טור חזקות בביטוי x^k

- על סמך משפטים מתאימים מתורת הטורים האינסופיים, הפעולה הבאה היא חוקית בתחום ההתכנסות של הטור

$$x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+k}$$

תוצאת לוואי של הכפלה כזו היא שחזקת האיבר n גדלה, ולכן מומלץ "ליישר" את הטור על ידי הזזת אינדקס.

דוגמא 4:

$$x^3\sum_{n=0}^{\infty}(n+8)a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+8)a_nx^{n+3}=\sum_{n=3}^{\infty}(n+5)a_nx^n$$

התבצעה הזזת אינדקס $k=-3$.

חיבור וחיסור של טורי חזקות

על סמך משפטים מתאימים מתורת הטורים האינסופיים, הפעולות הבאות חוקיות בתחום ההתכנסות **המשותף** של הטורים המעורבים

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^{n+k}\\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(x-x_0)^{n+k}\end{aligned}$$

דוגמא טיפוסית לשילוב בין כל הפעולות הנ"ל שנפגוש בתרגילים שונים של פיתרון משוואות דיפרנציאלית היא

$$\begin{aligned}&x^2\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)x^{n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n+1}\\ &=\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)x^{n+3}+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n+1}\\ &=\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)x^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2x^{n+3}\\ &=4x^3+9x^4+16x^5+\sum_{n=3}^{\infty}[(n+2)^2+(n-2)]x^{n+3}\\ &=4x^3+9x^4+16x^5+\sum_{n=6}^{\infty}[(n-1)^2+(n-5)]x^n\\ &=4x^3+9x^4+16x^5+\sum_{n=6}^{\infty}(n^2-n-4)x^n\end{aligned}$$

פיתרון משוואות דיפרנציאליות על ידי טורי חזקות

§5.2

- באופן כללי, כשנתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נחפש פיתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. הבעייה כמובן היא לגלות את המקדמים a_n לכל n טבעי.

- נתחיל בדוגמא פשוטה

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

צורת הטור שלנו היא

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

על פי משפט מהסעיף הקודם, הפיתרון הפרטי הוא

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

ברור כי $a_0 = y(0) = 1$. ננסה לחשב את a_1

$$a_1 = y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot y(0) = 0$$

באותו אופן נוכל לחשב גם את a_2. לשם כך נגזור את המשוואה לפי x ונקבל

$$y'' = 2y + 2xy'$$

ולכן

$$y''(0) = 2y(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 2$$

ולכן

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 1$$

ברור שנוכל להמשיך כך ולחשב את כל הנגזרות $y^{(n)}(0)$, אבל לא נראה שמציאת נוסחה כללית אפשרית לגילוי בשיטה זו.

- נִנסה להציב את הטור שלנו במשוואה

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ 2xy &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

השוויון $y' = 2xy$ גורר שוויון טורים, ולכן שוויון מקדמים

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$$

מדובר בנוסחת נסיגה (רקורסיה) של סדרת המקדמים

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

מצאנו כבר כי

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0$$

ולכן

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{1} \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= \tfrac{2a_0}{2} = \tfrac{2}{2} \\
a_3 &= \tfrac{2a_1}{3} = 0 \\
a_4 &= \tfrac{2a_2}{4} = \tfrac{2\cdot 2}{2\cdot 4} \\
a_5 &= \tfrac{2a_3}{5} = 0 \\
a_6 &= \tfrac{2a_4}{6} = \tfrac{2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6} \\
a_7 &= \tfrac{2a_5}{7} = 0 \\
a_8 &= \tfrac{2a_6}{8} = \tfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}
\end{aligned}$$

לאחר רישום של כעשרה איברים מתחילה להתבהר נוסחת המקדם הכללי של הטור. עבור $n = 2k$, נוסחת המקדם היא

$$a_n = \frac{2^k}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k} = \frac{2^k}{2^k k!} = \frac{1}{k!} = \frac{1}{\frac{n}{2}!}$$

ועבור $n = 2k+1$ נוסחת המקדם היא

$$a_{2k+1} = 0$$

לכן נוכל לרשום

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

טור החזקות שלנו יראה כך

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

במקרה הספציפי, המשוואה $y' = 2xy$ היא משוואה פרידה קלה שפיתרונה הכללי הוא

$$y(x) = Ce^{x^2}$$

הפיתרון הפרטי עבור תנאי ההתחלה $y(0) = 1$ הוא $y(x) = e^{x^2}$. טור מקלורן של e^x הוא

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

אם נחליף את x ב־x^2 בטור האחרון, נקבל את התוצאה שקיבלנו קודם, ולכן אימתנו את התוצאה עבור המקרה הזה. באופן כללי יהיה עלינו להסתמך על משפטים מהסוג הבא בכדי לוודא שקיים פיתרון בצורת טור חזקות. המשפט מנוסח עבור משוואה דיפרנציאלית מסדר 2, אך גירסאות דומות קיימות עבור כל סדר.

משפט 5.13: נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

אם הפונקציות $p(x)$, $q(x)$ ניתנות לפיתוח לטור חזקות סביב הנקודה x_0 בקטע פתוח $(x_0 - R, x_0 + R)$, אז קיים פיתרון אחד ויחיד לבעייה שגם הוא ניתן לפיתוח לטור חזקות מעל אותו קטע.

דוגמא 5: משוואת Airy

פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

פיתרון: במקרה הנוכחי, $p(x)=0$, $q(x)=x$, וברור ששתי פונקציות אלה הם כבר בצורה של טור חזקות (סופי). נחפש פיתרון מהצורה

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

נחשב את חלקי המשוואה

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \\ xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \end{aligned}$$

לכן

$$y''-xy = 2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}]x^n = 0$$

קיבלנו נוסחת נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ \ n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

נוכל לרשום אותה בצורה יותר נוחה

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \ \ n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

ברור שכל המקדמים מהצורה a_{3k+1}, a_{3k+2} יתאפסו. נשאר לכן לחשב את

המקדמים מהצורה a_{3k}

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1} \\ a_3 &= \frac{a_0}{3\cdot 2} = \frac{1}{3\cdot 2} \\ a_6 &= \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} \\ a_9 &= \frac{a_6}{9\cdot 8} = \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} \end{aligned}$$

הפיתרון הפרטי של הבעייה הוא לכן

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3k-1)\cdot 3k} \end{aligned}$$

דוגמא 6: פיתרון כללי עבור משוואת Airy

בדוגמא הקודמת פתרנו בעיית התחלה, אך לפעמים אנו נדרשים למצוא פיתרון כללי למשוואה

$$y'' - xy = 0$$

על פי הבדיקה שביצענו בדוגמא הקודמת

$$\begin{cases} a_0 = \text{<free coefficient>} \\ a_1 = \text{<free coefficient>} \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

נחלק את סדרת המקדמים לתתי-הסדרות a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}. את הצורה

הכללית של סדרת המקדמים a_{3k} כבר מצאנו בדוגמא הקודמת

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{<free coefficient>} \\ a_3 &= \frac{a_0}{2\cdot 3} \\ a_6 &= \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} \\ a_9 &= \frac{a_6}{9\cdot 8} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} \\ &\vdots \\ a_{3k} &= \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3k-1)\cdot 3k} \end{aligned}$$

באותו אופן נמצא את הנוסחה הכללית של סדרת המקדמים a_{3k+1}

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{<free coefficient>} \\ a_4 &= \frac{a_1}{3\cdot 4} \\ a_7 &= \frac{a_4}{7\cdot 6} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} \\ a_{10} &= \frac{a_7}{10\cdot 9} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} \\ &\vdots \\ a_{3k+1} &= \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots 3k\cdot(3k+1)} \end{aligned}$$

מאחר ו־$a_2 = 0$, כל k, $a_{3k+2} = 0$. הפיתרון הכללי של משוואת Airy הוא אם כן

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdots(3k-1)\cdot3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdots3k\cdot(3k+1)} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdots(3k-1)\cdot3k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdots3k\cdot(3k+1)} \end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdots(3k-1)\cdot3k} \\ y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdots3k\cdot(3k+1)} \end{aligned}$$

לכן הפיתרון הכללי שקיבלנו הוא

$$y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

לא קשה לראות כי

$$y_1(0)=1,\qquad y_2(0)=0$$

$$y_1'(0)=0,\qquad y_2'(0)=1$$

ולכן הורונסקיאן של y_1, y_2 אינו מתאפס

$$W[y_1,y_2](0)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

לכן קבוצת הפיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות ולכן הפיתרון שקיבלנו הוא אכן הפיתרון הכללי של משוואת Airy.

תרגיל 5.2: פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases}y''-xy=0\\ y(0)=3\\ y'(0)=-2\end{cases}$$

פיתרון: כמובן אנו מעוניינים בפיתרון בצורת טור חזקות

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ברור לנו כי

$$\begin{aligned}a_0&=y(0)=3\\ a_1&=y'(0)=-2\end{aligned}$$

ולכן על סמך התוצאה הקודמת, הפיתרון הפרטי הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdots(3k-1)\cdot3k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdots3k\cdot(3k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdots(3k-1)\cdot3k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{3k+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10\cdots3k\cdot(3k+1)} \end{aligned}$$

הערה: אם ממש רוצים, אז אפשר להציג את המקדמים על ידי נוסחאות יותר "מקצועיות" כמו

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{a_0}{(3k)!} \prod_{i=0}^{k-1} (3i+1) \\ a_{3k+1} &= \frac{a_1}{(3k+1)!} \prod_{i=0}^{k-1} (3i+2) \end{aligned}$$

תרגיל 5.3: משוואת Airy מעל נקודה $x_0 = 1$:

מצא קירוב פולינומיאלי ממעלה 7 עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

פיתרון: הפעם יש למצוא שמונה איברים ראשונים של טור חזקות סביב הנקודה $x_0 = 1$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

נחשב נגזרת שנייה

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n$$

בכדי לחשב את המכפלה xy יש לבצע "תימרון קטן"

$$\begin{aligned}
xy &= [1+(x-1)]y \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n
\end{aligned}$$

נציב את שתי התוצאות האחרונות במשוואת איירי ונקבל

$$\begin{aligned}
y'' - xy &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n\right) \\
&= (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_n - a_{n-1}\right](x-1)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

קיבלנו נוסחת נסיגה

$$\begin{cases}
a_0 = 0 \\
a_1 = 1 \\
a_2 = 0 \\
a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{cases}$$

שני השוויונים הראשונים נובעים מתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
a_0 &= y(1) = 0 \\
a_1 &= y'(1) = 1
\end{aligned}$$

השוויון השלישי נובע מכך ש־ $2a_2 - a_0 = 0$.
נוכל לרשום את נוסחת הנסיגה באופן נוח יותר

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{(n+2)(n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

שלא כמו בתרגיל קודם, לא ניתן להפריד המקדמים על פי תתי-סדרות a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}, עקב תלות בשני איברים קודמים שאינם מאותו סוג.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{a_0 + a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3} \\
a_4 &= \frac{a_1 + a_2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} \\
a_5 &= \frac{a_2 + a_3}{4 \cdot 5} = \frac{0 + \frac{1}{2 \cdot 3}}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5!} \\
a_6 &= \frac{a_3 + a_4}{5 \cdot 6} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5!} \\
a_7 &= \frac{a_4 + a_5}{6 \cdot 7} = \frac{\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5!}}{6 \cdot 7} = \frac{11}{7!}
\end{aligned}$$

הקירוב הפולינומיאלי ממעלה 7 לפיתרון הוא לכן

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{120} + \frac{11x^7}{5040}$$

תרגיל 5.4: משוואת Hermite

משוואה מהצורה

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

כאשר $\lambda = 0, 2, 4, \ldots$, נקראת משוואת הרמיט (Hermite).

פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

פיתרון: נחפש פיתרון בצורת טור חזקות

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\ -2xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 6y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n \\ &= 2a_2 + 6a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2n a_n + 6a_n] x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

נקבל נוסחת נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \dfrac{(2n-6)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

שני השוויונים הראשונים נובעים מתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} a_0 &= y(0) = 0 \\ a_1 &= y'(0) = 1 \end{aligned}$$

השוויון השלישי נובע מכך ש־ $2a_2 + 6a_0 = 0$.
ננסה לבדוק כיצד נראים המקדמים הראשונים של הטור

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{(2\cdot 1-6)a_1}{2\cdot 3} = -\frac{2}{3} \\ a_4 &= \frac{(2\cdot 2-6)a_2}{3\cdot 4} = 0 \\ a_5 &= \frac{(2\cdot 3-6)a_3}{4\cdot 5} = 0 \end{aligned}$$

ברור שהחל מ־ $n = 4$ כל המקדמים מתאפסים, ולכן למעשה קיבלנו טור חזקות סופי (מה שבדרך כלל אנחנו מכנים פולינום)

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3}$$

בדיקה פשוטה מוכיחה כי זהו אכן פיתרון של בעיית ההתחלה שלנו.

תרגיל 5.5: משוואת Hermite לא-הומוגנית
פתור את בעיית ההתחלה הבאה פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 6y = 12 - 16x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

פיתרון: השיטה של טורי חזקות ישימה גם עבור משוואות לא-הומוגניות.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

נשתמש בתוצאות שקיבלנו בתרגיל הקודם

$$\begin{aligned}
y''-2xy'+6y &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}-2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}6a_nx^n\\
&= 2a_2+6a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}-2na_n+6a_n]x^n\\
&= 12-16x
\end{aligned}$$

על פי תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
a_0 &= y(0)=2\\
a_1 &= y'(0)=-1
\end{aligned}$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל גם

$$\begin{aligned}
2a_2+6a_0 &= 12\\
6a_3+4a_1 &= -16
\end{aligned}$$

לכן נוסחת הנסיגה שלנו היא

$$\begin{cases}
a_0=2\\
a_1=-1\\
a_2=0\\
a_3=-2\\
a_{n+2}=\dfrac{(2n-6)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n=1,2,3,\dots
\end{cases}$$

כמו בתרגיל הקודם, קל לבדוק שכל שאר המקדמים של הטור מתאפסים

ולכן קיבלנו שוב פיתרון שהוא למעשה פולינום

$$y(x) = 2 - x - 2x^3$$

קל לבדוק שזה הפיתרון לבעיית ההתחלה שלנו. נסיים את הפרק הנוכחי במשפט הבא.

משפט 5.14: תהי x_0 **נקודה רגולרית** של המשוואה הדיפרנציאלית

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

כלומר $P(x_0) \neq 0$. אם $\frac{Q(x)}{P(x)}$, $\frac{R(x)}{P(x)}$, הן פונקציות אנליטיות בנקודה x_0 אז ניתן להציג את הפיתרון הכללי של המשוואה על ידי

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

כאשר a_0, a_1 קבועים שרירותיים ו־ $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות טוריים בלתי-תלויים של המשוואה. רדיוס ההתכנסות של כל הפיתרונות הוא הקטן מבין רדיוסי ההתכנסות של טורי החזקות של $\frac{Q(x)}{P(x)}$, $\frac{R(x)}{P(x)}$.

הערה: פונקציה $f(x)$ מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ נקראת אנליטית בנקודה x_0 אם יש לה פיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 עם רדיוס התכנסות חיובי.

תרגילים

1. מצא פיתרון בצורת טור חזקות עבור כל אחת מהבעיות הבאות

א. $(1 + x^2)y'' + x^3 y = 0$

ב.
$$\begin{cases} y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 12 \end{cases}$$

ג.
$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ד. $(x^2+4)y'' + xy = x + 2$

ה.
$$\begin{cases} y'' + xy' + (2x-1)y = 0 \\ y(-1) = 2 \\ y'(-1) = -2 \end{cases}$$

ו.
$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 8y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ז.
$$\begin{cases} (1-x^2)y'' + 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ח.
$$\begin{cases} y'' - (x-1)y' - y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y'' - xy' + 5y = x + 1$

א. מצא פיתרון כללי בצורת טור חזקות.
רשום את כל איברי הטור עד החזקה השישית (x^6).

ב. מצא פיתרון פרטי מלא המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

ג. מהו סכום המקדמים $a_3 + a_5$ כאשר $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$?

3. יהי $y(x)$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 10y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

חשב את $y(\frac{1}{2})$.

4. יהי $y(x)$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

חשב את פיתרון טור החזקות $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ עד החזקה השביעית $(x-1)^7$.

5. יהי $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + x^4 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

בדוק את נכונות או אי-נכונות הטענות הבאות

א. $a_1 = 0$

ב. $a_n = \frac{(-1)^n}{n!6^n}$

ג. רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = 1$

ד. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

ה. $a_6 = \frac{1}{30}$

ו. $a_7 = \frac{1}{210}$

ז. $y(x) - 1$ היא פונקציה אי-זוגית

6. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2(x^2+1)y' - 6xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של הטור, ומצא את ארבעת האיברים הראשונים של הטור שאינם אפס.

7. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (10 - x^3)y'' + 5xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

חשב את המקדמים a_3, a_4, a_5.

8. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)y'' - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של המקדם a_{n+2}.

9. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + my = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכים של m הפיתרון של המשוואה יוצא פולינום ממעלה סופית, ומהי מעלת הפולינום המתאים לכל ערך m כזה?

10. בנה פיתרון בצורת טור חזקות סביב הנקודה $x = -2$ עבור המשוואה $y'' + xy = 0$. רשום את הפיתרונות עבור תנאי ההתחלה הבאים עד החזקה הרביעית

א. $y(-2) = 0$, $y'(-2) = 1$

ב. $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$

11. נתון כי הפונקציה $y(x) = x^2\sin(3x)$ היא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

כאשר כל המקדמים a_i הם קבועים ממשיים.

א. מצא מהו הערך המינימלי של n?

ב. מצא בסיס למרחב הפיתרונות של המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף הקודם

ג. מצא את כל המקדמים של המשוואה