פרק 4

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר $n > 1$

- לאחר עיסוק ממושך במשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון אנו עוברים לטפל במשוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה יותר ($n > 1$). נתחיל בהיכרות עם כמה דוגמאות ידועות
  - משוואות ליניאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים: $y'' - 5y' + y = e^x$
  - משוואות Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = y$
  - משוואות לז'נדר: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) = 0$
  - משוואות הקפיץ: $my'' + cy' + ky = F(x)$
  - נפילה חופשית עם חיכוך אווירי: $my''(t) = mg - ky'(t)$
- נפתור למשל את המשוואה הפשוטה הבאה

$$y'' = 6x$$

זוהי משוואה ליניארית מסדר שני. על ידי שתי אינטגרציות פשוטות נקבל את הפיתרון הכללי שלה

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1 \\ y'' &= x^3 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

זוהי אכן משפחה דו-פרמטרית של פיתרונות שכוללת את <u>כל</u> הפיתרונות של

המשוואה. מעורבים בה שני קבועים, ולכן בבעיית התחלה יידרשו שני תנאי התחלה: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

דוגמא 1: הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

הוא $y(x) = x^3 + 5x - 1$.

באופן כללי, הפיתרון הכללי של משוואות דיפרנציאליות מסדר n יכללו n קבועים.

דוגמא 2: על ידי הורדת סדר, פתור את משוואת הנפילה חופשית עם חיכוך אווירי

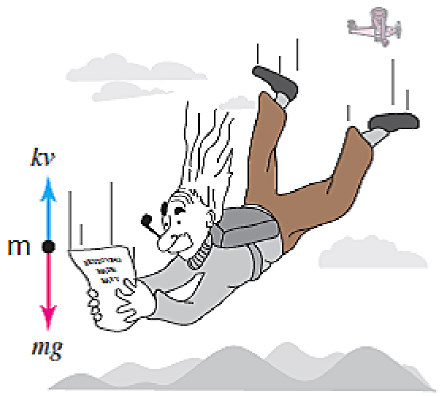
$$my''(t) = mg - ky'(t)$$

(שהוצגה בשיעור המבוא של הקורס - ראה פרק 1), כאשר

m - היא מסת הגוף הנופל

g - קבוע גרביטציה

k - קבוע החיכוך



איור 4.1: נפילה חופשית עם חיכוך אווירי

פיתרון: אם נסמן $v(t) = y'(t)$ (משמעות פיזיקאלית - מהירות), נקבל משוואה ליניארית מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$$

שפיתרונה הכללי הוא

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

ולכן

$$y(t) = \int v(t) = \frac{mgt}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}} + c_2$$

- **דוגמא 3:** פתור את בעיית ההתחלה על ידי הורדת סדר

$$\begin{cases} y''' - y'' = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 8 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

- **דוגמא 4:** מצא פיתרון כללי עבור המשוואה

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad 0 < x < \infty$$

דיון תאורטי

§4.1

- הצורה הכללית של משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר n הוא

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

כאשר כל הפונקציות $a_i(x)$ רציפות בקטע פתוח (α, β). כמובן האפשרות ש־$\alpha = -\infty$ או $\beta = \infty$ כלולה.

- כאשר $g(x) \equiv 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.
- אנו נניח גם כי $a_n(x)$ אינה פונקציית האפס (אחרת סדר המשוואה הוא $n-1$) ולכן נוכל לחלק את המשוואה ב־$a_n(x)$ ולקבל את הצורה הנורמלית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x)$$

- בפיתרון הכללי של משוואה כזאת יתקבלו n קבועים c_1, c_2, ..., c_n,

ובכדי לכפות פיתרון יחיד נזדקק ל־n תנאי התחלה.

$$\begin{cases} y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x) \\ y(x_0)=\alpha_0 \\ y'(x_0)=\alpha_1 \\ y''(x_0)=\alpha_2 \\ \qquad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1} \end{cases}$$

§4.2 משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n

משפט 4.1: נתונה משוואות דיפרנציאלית ליניארית מסדר n עם n תנאי התחלה

$$\begin{cases} y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x) \\ y(x_0)=\alpha_0 \\ y'(x_0)=\alpha_1 \\ y''(x_0)=\alpha_2 \\ \qquad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1} \end{cases} \tag{4.1}$$

כאשר

א. $p_i(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות בקטע (α,β), $i=0,1,2,\ldots,n-1$

ב. הנקודה x_0 שייכת לקטע: $\alpha<x_0<\beta$

ג. הערכים α_0, α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-1}, מספרים ממשיים שרירותיים

אזי קיים פיתרון אחד ויחיד $\phi(x)$ למשוואה על כל הקטע (α,β) המקיים את כל תנאי ההתחלה.

- משפט הקיום והיחידות עבור משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר n מבטיח קיום פיתרון בסביבה מסוימת (x_0-h, x_0+h), שעשויה להיות קטנה יותר מתחום ההגדרה של מקדמי המשוואה (α,β). אבל המשפט הנ"ל טוען טענה חזקה יותר: תחום ההגדרה של הפיתרון זהה לתחום ההגדרה של מקדמי המשוואה. הוכחת משפט זה חורגת ממסגרת הקורס ולא תכוסה.

- **תרגיל 4.1:** באיזה קטעים מובטח לנו שלמשוואה הבאה יהיו פיתרונות?

$$x(x-1)y''+e^xy'+x^2y=\cos x$$

- **תרגיל 4.2:** מהו הפיתרון היחיד של בעיית ההתחלה הבאה?

$$\begin{cases} y''+x^3y+(x^2-1)y=0 \\ y(5)=0 \\ y'(5)=0 \end{cases}$$

רמז: מדובר במשוואה ליניארית **הומוגנית**

- **תרגיל 4.3:** נניח ש־$y_1(x)$ הוא פיתרון של המשוואה

$$y''+x^3y+(x^2-1)y=0 \tag{4.2}$$

המקיים

$$\begin{cases} y_1(0)=0 \\ y_1'(0)=1 \end{cases}$$

ונניח ש־$y_2(x)$ הוא פיתרון שני של (4.2) שמקיים

$$\begin{cases} y_2(0)=1 \\ y_2'(0)=0 \end{cases}$$

הוכח: אם $y_3(x)$ הוא פיתרון של המשוואה (4.2) המקיים

$$\begin{cases} y_3(0)=1 \\ y_3'(0)=1 \end{cases}$$

אז בהכרח $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ לכל x ממשי!

תרגיל 4.4: בהמשך לתרגיל הקודם, מה תוכל לאמר על פיתרון $y_4(x)$ של משוואה (4.2) שמקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y_4(0) = 15 \\ y_4'(0) = -32 \end{cases}$$

טענה 4.2: אם $y(x)$ הוא פיתרון של המשוואה (4.2) המקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

אז בהכרח $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ לכל x ממשי.

§4.3 משוואות הומוגניות ועקרון הסופרפוזיציה

כאמור, כאשר אגף ימין של משוואה דיפרנציאלית ליניארית הוא אפס, היא נקראת **משוואה הומוגנית**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

למשוואות הומוגניות יש תכונות מיוחדות שהופכות אותן לנוחות יותר לטיפול.

נתחיל בחקירת משוואות ליניאריות הומוגניות ונתקדם בהמשך למשוואות ליניאריות לא-הומוגניות.

משפט 4.3: אם

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_k(x)$$

היא קבוצה של k פיתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ואם c_1, c_2, $\ldots$, c_k, הם k מספרים ממשיים שרירותיים, אזי הפונקציה

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

גם היא פיתרון של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור משוואה הומוגנית מסדר 2

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ההוכחה למקרה הכללי זהה לחלוטין. כאמור, נתון ש־

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

לכן

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \cdots + c_ky_k'(x) \\ \phi''(x) &= c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + \cdots + c_ky_k''(x) \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} &\phi''(x) + p_1(x)\phi'(x) + p_0\phi(x) \\ &\quad = \left[c_1y_1''(x) + \cdots + c_ky_k''(x)\right] + p_1(x)\left[c_1y_1'(x) + \cdots + c_ky_k'(x)\right] \\ &\qquad + p_0(x)\left[c_1y_1(x) + \cdots + c_ky_k(x)\right] \\ &\quad = c_1\left[y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0y_1(x)\right] + \cdots + c_k\left[y_k''(x) + p_1(x)y_k'(x) + p_0y_k(x)\right] \\ &\quad = 0 + \cdots + 0 = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו כי $\phi(x)$ גם הוא פיתרון של המשוואה הליניארית ההומוגנית. ∎

- כל ביטוי מהצורה

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x)$$

נקרא **צירוף ליניארי** או **קומבינציה ליניארית**.

- בפירוט יותר אומרים כי הפונקציה $\phi(x)$ היא **צירוף ליניארי של** $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x)\}$.
- **דוגמא 5:** קל לבדוק שהפונקציות $\sin x$, $\cos x$, הן פיתרונות של המשוואה

$$y'' + y = 0$$

על סמך המשפט האחרון נוכל להסיק שעבור כל שני מספרים ממשיים c_1, c_2, גם $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ הוא פיתרון של המשוואה. האם

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

הוא הפיתרון הכללי של המשוואה?
בהמשך נוכיח שהתשובה לשאלה זו חיובית.

אופרטורים דיפרנציאליים (Differential Operators) §4.3.1

- בהוכחה של המשפט האחרון נאלצנו להצטמצם למשוואות ליניאריות מסדר 2 מאחר ואורך שורה של דף סטנדרטי אינו מספיק בכדי להכיל צירופים ליניאריים ארוכים מדי, אז מרוב עצים לא רואים את היער. מצבים כאלה מאלצים אותנו לפתח שיטות סימון שיחסכו במלל רב וישקפו את המבנה הלוגי בצורה יותר קומפקטית.
- למטרה זו פותח נושא של **אופרטורים ליניאריים** עם אלגברה מתאימה כחלק תשתיתי של תחום האליזה הפונקציונלית. מדובר בהעתקות בין מרחבי פונקציות.
- הרעיון הבסיסי הוא להתייחס לסימון $\frac{d}{dx}$ כאל העתקה המקבלת כקלט

פונקציה $f(x)$ ומייצרת פונקציה חדשה $f'(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

או בצורה פשוטה יותר

$$\frac{d}{dx}[y] = y'$$

- באותו אופן מוגדרים האופרטורים $\frac{d^n}{dx^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^n}{dx^n}[y] = y^{(n)}$$

לפעמים האופרטורים האלה מסומנים גם על ידי D, D^n, D_x, D_x^n. ולכן משוואות דיפרנציאליות כמו

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

נוכל לפעמים לרשום גם בצורה

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 2\right)[y] = 0$$

או

$$(D^2 - 3D + 2)[y] = 0$$

- נוכל לחבר כל שני אופרטורים נתונים ולקבל אופרטור חדש L. לדוגמא:

$$L = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{d}{dx}$$

נוכל להפעיל את האופרטור החדש L באופן הבא:

$$L[f(x)] = \left(\frac{d^3}{dx^3} + \frac{d}{dx}\right)[f(x)] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)] = f'''(x) + f'(x)$$

נוכל לכפול כל אופרטור בביטוי $p(x)$ (כולל קבועים) ולקבל מגוון רחב

מאוד של אופרטורים כגון

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{d^3}{dx^3} + 5\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 7 \\ L_2 &= \frac{d^3}{dx^3} - 2e^x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} \\ L_3 &= \frac{d^4}{dx^4} - 5x\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + x^2\frac{d}{dx} - 4 \end{aligned}$$

או בצורה יותר נוחה לקריאה

$$\begin{aligned} L_1 &= D^3 + 5D^2 - 2D + 7 \\ L_2 &= D^3 - 2e^x D^2 + 2D \\ L_3 &= D^4 - 5xD^3 - 3D^2 + x^2 D - 4 \end{aligned}$$

- אפשר לדמות את האופרטור L גם לסוג של אלגוריתם או סדרת הוראות לביצוע סדרת פעולות על פונקציה נתונה.
- למשל האופרטור L_2 מהרשימה הקודמת שקול למעשה לסדרת ההוראות הבאה:
  - א. גזור את הפונקציה שלוש פעמים
  - ב. הוסף לתוצאה את מכפלת הנגזרת השנייה ב־ $-2e^x$
  - ג. הוסף לתוצאה את מכפלת הנגזרת הראשונה ב־2
- נפעיל לדוגמא את האופרטור L_3 על הפונקציה $y = \sin x$

$$\begin{aligned} L_3[y] &= \left(D^4 - 5xD^3 - 3D^2 + x^2 D - 4\right)[y] \\ &= y'''' - 5xy''' - 3y'' + x^2 y' - 4y \\ &= \sin x - 5x(-\cos x) - 3(-\sin x) + x^2\cos x - 4\sin x \\ &= \sin x + 5x\cos x + 3\sin x + x^2\cos x - 4\sin x \\ &= (x^2 + 5x)\cos x \end{aligned}$$

- יש לשים לב לכך שהקבוע 7 באופרטור L_1 מתורגם לפעולה $7y$.

הגדרה 4.1: אופרטור L נקרא **אופרטור ליניארי** אם יש לו את שתי התכונות הבאות

א. עבור כל שתי פונקציות $f(x)$, $g(x)$

$$L[f+g]=L[f]+L[g]$$

ב. עבור כל פונקציה $f(x)$, ועבור כל קבוע ממשי c

$$L[cf]=cL[f]$$

- ניתן לאחד את שתי הדרישות לדרישה אחת: L הוא אופרטור ליניארי אם ורק אם לכל שתי פונקציות $f(x)$, $g(x)$, ולכל שני מספרים ממשיים c_1, c_2,

$$L[c_1f+c_2g]=c_1L[f]+c_2L[g]$$

התכונה האחרונה נקראת לפעמים **עיקרון הסופרפוזיציה**.

הגדרה 4.2: אופרטור L נקרא **אופרטור דיפרנציאלי** אם הוא סכום סופי של אופרטורים מהצורה $p(x)\frac{d^k}{dx^k}$.

- **דוגמא 6:** פגשנו כבר למעלה את שלושת הדוגמאות הבאות של אופרטורים דיפרנציאליים

$$\begin{aligned} L_1 &= D^3+5D^2-2D+7 \\ L_2 &= D^3-2e^xD^2+2D \\ L_3 &= D^4-5xD^3-3D^2+x^2D-4 \end{aligned}$$

- כאמור אופרטור היא העתקה בין שני מרחבי פונקציות (למעשה מרחבים וקטוריים כפי שהם מטופלים בשדה האלגברה הליניארית). אופרטור דיפרנציאלי נקרא **מסדר** n אם סדר הגזירה הכי גבוה שמופיע בו הוא n. המרחב הליניארי עליו הוא פועל מסומן בדרך כלל על ידי $\mathscr{C}^n(\alpha,\beta)$ שהוא

המרחב של כל הפונקציות הגזירות n פעמים ברציפות מעל הקטע (α, β).
הטווח של האופרטור הוא לרוב מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין מעל הקטע (α, β).

משפט 4.4: כל אופרטור דיפרנציאלי הוא גם אופרטור ליניארי.

הוכחה: המשפט נובע מכך שסכום של אופרטורים ליניאריים נותן אופרטורי ליניארי, ומכך שכל אופרטור דיפרנציאלי הוא סכום של אופרטורים מהצורה $p(x)\frac{d^n}{dx^n}$. יספיק לכן להוכיח שהאופרטור $p(x)D^k$ הוא ליניארי. לשם כך יספיק להוכיח כי

$$\left(p(x)D^k\right)[f+g] = p(x)D^k[f] + p(x)D^k[g]$$

$$\left(p(x)D^k\right)[cf] = c \cdot p(x)D^k[f]$$

שני הדברים נובעים מייד מתכונות הנגזרת. ■

נוכל עכשיו לתת הוכחה מלאה למשפט שהוכחנו קודם עבור משוואות מסדר 2. נצטט אותו שוב

משפט 4.5: אם

$$y_1(x),\ y_2(x),\quad \ldots,\ y_k(x)$$

היא קבוצה של k פיתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ואם c_1, c_2, ..., c_k, הם k מספרים ממשיים שרירותיים, אזי הפונקציה

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

גם היא פיתרון של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה: הפעם נתחיל בהגדרת האופרטור הליניארי

$$L = D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + p_1(x)D + p_0(x)$$

תחת הסימון הזה, המשוואה ההומוגנית שלנו מתקצרת מאוד

$$L[y] = 0$$

הפיתרון של המשוואה הוא למעשה **הגרעין** של האופרטור L (כזכור, הגרעין של העתקה ליניארית מורכב מכל הוקטורים שההעתקה מעבירה לאפס).

את הנתון שהפונקציות $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ מהוות פיתרון של המשוואה נוכל עכשיו לרשום כך

$$L[y1] = 0, \quad L[y_2] = 0, \quad \dots, \quad L[y_k] = 0$$

בכדי להוכיח כי הצרוף הליניארי

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

גם הוא פיתרון, יספיק להוכיח כי $L[\phi] = 0$. אבל זה נובע מייד מהעובדה ש־L הוא אופרטור ליניארי

$$\begin{aligned} L[\phi] &= L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)] \\ &= c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)] + \cdots + c_kL[y_k(x)] \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

- במונחים של אלגברה ליניארית, טענת המשפט שקולה למשפט הידוע שהגרעין של אופרטור ליניארי הוא למעשה תת-מרחב ליניארי של המרחב $\mathscr{C}^n(\alpha, \beta)$.
- מסתבר שקיים קשר מעניין בין המימד של מרחב הפיתרונות ובין הסדר של המשוואה - הם שווים.

מערכת יסודית של פיתרונות עבור משוואות הומוגנית §4.4

הגדרה 4.3: קבוצת פיתרונות

$$\{y_1(x),\ y_2(x),\quad \ldots,\ y_n(x)\}$$

תיקרא **מערכת יסודית של פיתרונות** של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

אם כל פיתרון אחר של המשוואה הוא צירוף ליניארי שלה.

דוגמא 7: הקבוצה $\{\cos x,\ \ \sin x\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות למשוואה ההומוגנית

$$y'' + y = 0$$

הוכחה: יהי $y(x)$ פיתרון כלשהו של המשוואה ההומוגנית. נסמן

$$\begin{aligned} c_1 &= y(0) \\ c_2 &= y'(0) \end{aligned}$$

נגדיר את הפונקציה

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

קל לבדוק כי $z(x)$ היא פיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = c_1 \\ y'(0) = c_2 \end{cases}$$

לכן על פי משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n,

$$z(x) \equiv y(x)$$

כלומר: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

לסיכום: כל פיתרון של המשוואה ההומוגנית הוא צרוף ליניארי של הקבוצה $\{\cos x,\ \sin x\}$, ולכן זוהי קבוצה יסודית של פיתרונות. ■

- במונחים של אלגברה ליניארית, נאמר כי הקבוצה $\{\cos x, \sin x\}$ היא **בסיס** למרחב הפיתרונות של המשוואה ההומוגנית. אבל זה עדיין לא לגמרי מדויק אלא אם נוכיח שזו גם כן **קבוצה בלתי-תלויה של פיתרונות**. במקרה הנוכחי זה ברור, ולכן אכן מדובר בבסיס.
- המסקנה מהדוגמא הקודמת היא אם כן, שמרחב הפיתרונות של המשוואה ההומוגנית $y'' + y = 0$ הוא מרחב וקטורי הנפרש על ידי הבסיס $\{\cos x, \sin x\}$, ולכן המימד שלו הוא 2, בדיוק כמו סדר המשוואה. האם זה מקרי?
- **שאלה:** כיצד נבדוק אם קבוצה נתונה של פונקציות היא קבוצה יסודית של פיתרונות עבור משוואה הומוגנית נתונה?
  - בכדי לא לטבוע בסימנים, נתמקד במשוואה הומוגנית מסדר 2

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta$$

  - יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות של המשוואה בקטע (α, β). התנאי לכך שהקבוצה $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות הוא שלכל פיתרון $\phi(x)$ נוכל למצוא קבועים c_1, c_2, כך ש־

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

  - ננסה ללכת בעיקבות הרעיון שפגשנו בדוגמא הקודמת. נבחר נקודה x_0

בקטע (α,β) ונגדיר

$$\begin{cases}\alpha_0=\phi(x_0)\\ \alpha_1=\phi'(x_0)\end{cases}$$

וננסה לחפש פיתרון מהצורה

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases}y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0,\ \ \alpha<x<\beta\\ y(x_0)=\alpha_0\\ y'(x_0)=\alpha_1\end{cases}$$

אם נצליח להוכיח את קיומם של קבועים c_1, c_2, שעבורם $y(x)$ פותר את בעיית ההתחלה הזו, אז על פי משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר גבוה, הפיתרון $y(x)$ חייב להיות זהה לפיתרון $\phi(x)$ ומשימתנו הושלמה.

על ידי הצבת הנקודה $x=x_0$ בתנאי ההתחלה נקבל מערכת של שתי משוואות בשני הנעלמים c_1, c_2:

$$\begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0) &= \phi(x_0)\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0) &= \phi'(x_0)\end{cases}$$

מלימודי האלגברה הליניארית אנו יודעים שלמערכת קיים פיתרון אחד ויחיד אם ורק אם דטרמיננטת המקדמים אינה מתאפסת

$$\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)\neq 0$$

מאחר והנקודה x_0 נבחרה באופן שרירותי, נוכל להסיק שהקבוצה $\{y_1(x),\ \ y_2(x)\}$ היא מערכת יסודית של פיתרונות אם ורק אם

הדטרמיננטה אינה מתאפסת בשום נקודה x של תחום ההגדרה

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \alpha < x < \beta$$

הפונקציה $W(x)$ נקראת **הורונסקיאן** של הקבוצה $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$, על שמו של המתמטיקאי הפולני (Józef Maria Hoene-Wroński, 1776-1853) שגילה אותה לראשונה. היא לפעמים מסומנת על ידי הביטוי $W[y_1, y_2]$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

הוכחנו אם כן את המשפט הבא.

משפט 4.6: נתונה משוואה ליניארית הומוגנית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β). קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית אם ורק אם הורונסקיאן $W[y_1, y_2]$ אינו מתאפס באף נקודה בקטע (α, β).

מסקנה: אם $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ אינה קבוצה יסודית, אזי הורונסקיאן מתאפס זהותית בכל הקטע (α, β)

$$W[y_1, y_2](x) = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

דוגמא 8: הורונסקיאן של הקבוצה $\{\cos x,\ \sin x\}$ הוא

$$W[\cos, \sin](x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ולכן $\{\cos x,\ \sin x\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות של המשוואה ההומוגנית $y'' + y = 0$.

דוגמא 9: שתי הפונקציות $\{e^x,\ e^{-x}\}$ הן שני פיתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y'' - y = 0$$

הוכח כי המשפחה הדו-פרמטרית

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

היא הפיתרון הכללי של המשוואה על כל הישר הממשי $(-\infty, \infty)$.
הוכחה: הורונסקיאן של הקבוצה $\{e^x,\ e^{-x}\}$ הוא

$$W[e^x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

קיבלנו שלכל x ממשי, הערך של הורונסקיאן הוא -2 ולכן על פי המשפט הקודם $\{e^x,\ e^{-x}\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות. כלומר כל פיתרון של המשוואה $y'' - y = 0$ הוא צירוף ליניארי של $\{e^x,\ e^{-x}\}$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

ולכן זוהי צורתו של הפיתרון הכללי. ■

תרגיל 4.5: הוכח כי $y(x) = c_1 x + c_2 x e^x$ הוא פיתרון כללי של המשוואה ההומוגנית הבאה בקרן $(0, \infty)$

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0$$

השאלה השנייה שמתבקשת: האם לכל משוואה הומוגנית נורמלית יש קבוצה יסודית של פיתרונות?

המשפט הקודם מציע שיטה בכדי לבדוק אם קבוצת פיתרונות היא יסודית, אך אינו מבטיח קיום של קבוצה כזו! המשפט הבא עונה לשאלה זו בחיוב (בינתיים עבור משוואות מסדר 2, אבל בהמשך נפגוש משפט כללי יותר).

משפט 4.7: לכל משוואה ליניארית הומוגנית נורמלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad \alpha < x < \beta$$

קיימת מערכת יסודית של פיתרונות

הוכחה: תהי x_0 נקודה מסוימת בקטע (α, β). על פי משפט הקיום והיחידות למשוואות ליניאריות, קיים פיתרון $y_1(x)$ עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, & \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

וקיים פיתרון $y_2(x)$ עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, & \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

נוכיח כי קבוצת הפיתרונות $\{y_1(x), \;\; y_2(x)\}$ היא יסודית, על פי מבחן הורונסקיאן. לשם כך תספיק בדיקת הורונסקיאן בנקודה x_0 בלבד

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

מאחר והורונסקיאן אינו מתאפס בנקודה $x = x_0$ נובע כי $\{y_1(x), \;\; y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית ■

- מההוכחה עבור $n = 2$ ברור כיצד תיראה ההוכחה עבור משוואות מסדר $n = 3$ ומעלה.
- במונחים של אלגברה ליניארית, קבוצה יסודית נקראת גם **קבוצה פורשת** **(spanning set)**, ולפעמים גם **קבוצת יוצרים**. לכן בהקשרים שונים נאמר כי הקבוצה $\{y_1(x), \;\; y_2(x)\}$ **פורשת** את כל הפיתרונות של המשוואה, או

מרחב הפיתרונות של המשוואה **נפרש** עלי ידי הקבוצה $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$.

- המשפט אינו מתייחס לשאלה האם יש קבוצה אחת כזו או יותר. ברור שאם יש קבוצה יסודית אחת, אז ניתן לייצר ממנה עוד אינסוף קבוצות יסודיות (כיצד?)
- המשפט גם לא מתייחס לגודל של הקבוצה. הוא מבטיח את קיומה של קבוצה בגודל 2 (עבור משוואה מסדר 2). אך קל מאוד לייצר קבוצות יסודיות בעלות שלוש או יותר פונקציות: פשוט מתחילים עם קבוצה יסודית של שתי פונקציות ומוסיפים לה כל סדרת פונקציות שנחפוץ (שתי הפונקציות הראשונות יפרשו ממילא את כל הפיתרונות ואת הפונקציות הנוספות נוכל לכפול באפסים)
- שאלה נוספת שעשויה להישאל עבור משוואות מסדר שני: האם תיתכן קבוצה יסודית של פיתרונות בעלת פונקציה אחת בלבד? במקרה זה קל להוכיח שלכל פיתרון $y_1(x)$ של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר 2, ניתן למצוא פיתרון $y_2(x)$ שאינו כפולה של $y_1(x)$ באמצעות "בישול" תנאי התחלה מתאימים.
- קבוצה יסודית מינימלית (קבוצה פורשת מינימלית) נקראת **בסיס**. במקרה של משוואה מסדר 2 הבסיס הוא תמיד בגודל 2, ולכן מימד מרחב הפיתרונות הוא 2.
- **תלות ואי-תלות ליניארית:** מושג חשוב נוסף מתחום האלגברה הליניארית שרלבנטי לענייננו הוא מושג התלות הליניארית. קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x)\}$ נקראת **תלויה ליניארית** אם קיימים קבועים c_i שאינם כולם אפס כך ש־

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x) = 0$$

או באופן שקול: קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x)\}$ תלויה ליניארית אם לפחות אחד מאיברי הקבוצה הוא צירוף ליניארי של השאר.

- מכל הדיון הנ"ל נוכל להסיק בקלות את המשפט הבא. בכדי להימנע מבילבול ושגיאות, יש לשים לב כי המשפט מדבר רק על פיתרונות של

משוואה ליניארית הומוגנית!

משפט 4.8: קבוצת פיתרונות $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)\}$ של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n,

א. מהווה בסיס עבור מרחב הפיתרונות של המשוואה אם ורק אם הורונסקיאן שלה אינו מתאפס בנקודה כלשהי של תחום ההגדרה.

ב. אם הורונסקיאן מתאפס בנקודה כלשהי, אז הקבוצה תלויה ליניארית (ולכן אינה בסיס למרחב הפיתרונות)

- קיבלנו אם כן מבחן פשוט לבדיקת תלות או אי-תלות ליניארית עבור קבוצת פיתרונות של משוואה הומוגנית

$$\{y_1(x), \quad y_2(x), \quad \dots, \quad y_n(x)\}$$

מספיק למצוא נקודה אחת x_0 בתחום הקיום אשר שעבורה הורונסקיאן אינו מתאפס בכדי לקבוע שהקבוצה בלתי תלויה ליניארית. אם הורונסקיאן $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ מתאפס בנקודה x_0, אז הקבוצה תלויה ליניארית.

- נדגיש שוב שמבחן זה עובד רק עבור קבוצות של פיתרונות של משוואות הומוגניות! כשמדובר בסתם פונקציות, לורונסקיאן אין ממש שימוש. לדוגמא, קל לראות כי שתי הפונקציות הבאות אינן תלויות ליניארית, אבל הורונסקיאן שלהם מתאפס על כל הישר הממשי

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

- בשלב זה מובטח לנו כי לכל משוואה ליניארית הומוגנית יש קבוצה יסודית של פיתרונות, אך עדיין אין בידינו שיטות למציאתן. בסעיפים הבאים נלמד על שיטות למציאת פיתרונות.

מציאת פיתרון על ידי הורדת סדר

§4.5

- בהינתן פיתרון אחד למשוואה ליניארית הומוגנית, ניתן למצוא פיתרון שני שהוא בלתי תלוי על ידי הורדת סדר המשוואה. נתחיל בדוגמא.
- **דוגמא 10:** קל לבדוק כי $y_1(x) = e^{-x}$ הוא פיתרון של המשוואה

$$y'' + 2y' + y = 0$$

רעיון: בדומה לרעיון גורם האינטגרציה שפגשו בשני מקרים קודמים, ננסה למצוא פיתרון שני שהוא מכפלה של הפיתרון הראשון בפונקציה $v(x)$

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

(לנסות תמיד אפשר, במקרה הגרוע הנסיון נכשל ועוברים לרעיון הבא)

$$\begin{aligned} y_2' &= v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' \end{aligned}$$

ולאחר הצבה במשוואה

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

נקבל

$$v[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1] + v'[2y_1' + p_1(x)y_1] + v''y_1 = 0$$

הביטוי הראשון מתאפס כי y_1 הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית, ואנו נותרים עם

$$v'[2y_1' + p_1(x)y_1] + v''y_1 = 0$$

ולאחר נירמול

$$v'' + \left[p_1(x) + 2\frac{y_1'}{y_1}\right] v' = 0$$

הורדת הסדר תתרחש לאחר ההצבה $u = v'$

$$\boxed{u' + \left[p_1(x) + 2\frac{y_1'}{y_1}\right] u = 0}$$

זוהי משוואה ליניארית הומוגנית מסדר 1 במשתנה u.

- בדוגמא שלנו $p_1(x) + 2\frac{y_1'}{y_1} = 0$ ומקבלים משוואה פשוטה מאוד

$$u' = 0$$

ממנה נובע בקלות כי $v(x) = x$, ולכן $y_2(x) = xe^{-x}$. קל לבדוק ש־ $\{e^{-x},\ xe^{-x}\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות ולכן הפיתרון הכללי הוא $a_1e^{-x} + a_2xe^{-x}$.

- כמובן, הפיתרון הכללי של $v(x)$ אינו מעניין אותנו. אנו זקוקים רק לדגימה אחת בלבד (רצוי פשוטה ככל האפשר).

- **דוגמא 11:** נתון כי $y_1(x) = \frac{1}{x}$ הוא פיתרון של המשוואה

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

מצא את הפיתרון הכללי.

נוסחת אבל (Niels Henrik Abel, 1802-1829)

§4.6

משפט 4.9: (נוסחת אבל)

אם

$$\{y_1(x),\ y_2(x),\quad \ldots,\ y_n(x)\}$$

הן n פיתרונות של המשוואה הליניארית ההומוגנית מסדר n

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

אזי הורונסקיאן שלהם מקיים

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=Ke^{-\int p_{n-1}(x)dx}$$

עבור קבוע ממשי K. כאשר הקבוצה אינה יסודית (תלויה ליניארית) $K=0$.

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור סדר $n=2$. יהיו $\{y_1(x),\ y_2(x)\}$ שני פיתרונות של המשוואה. כלומר

$$\begin{aligned} y_1''+p_1(x)y_1'+p_0(x)y_1 &= 0 \\ y_2''+p_1(x)y_2'+p_0(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב־y_2, ואת המשוואה השניה ב־y_1

$$\begin{aligned} y_2y_1''+p_1(x)y_2y_1'+p_0(x)y_2y_1 &= 0 \\ y_1y_2''+p_1(x)y_1y_2'+p_0(x)y_1y_2 &= 0 \end{aligned}$$

לאחר החסרת המשוואה השניה מהראשונה נקבל

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p_1(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \tag{4.3}$$

כזכור, הורונסקיאן עבור $n = 2$ הוא

$$W(x) = y_1y_2' - y_2y_1'$$

ולכן

$$W'(x) = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

אם נתבונן שוב במשוואה (4.3) נגלה שהיא משוואה דיפרנציאלית בורונסקיאן W

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה פרידה מסדר ראשון. לאחר הפרדת משתנים נקבל את הנוסחה

$$\boxed{\frac{dW}{W} = -p_1(x)dx}$$

ולכן

$$\ln W(x) = -\int p_1(x)dx$$

ולכן

$$\boxed{W(x) = Ke^{-\int p_1(x)dx}} \tag{4.4}$$

את הקבוע K ניתן לחשב על ידי הצבת נקודה כלשהי x_0 מתחום ההגדרה בהגדרה המטריציונית של $W(x)$. ■

- לפעמים רושמים את נוסחת אבל בצורה

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt} \tag{4.5}$$

כאשר x_0 היא נקודה כלשהי בתחום הקיום של המשוואה. אבל נוסחה זו תהיה שימושית רק במקרים בהם קל לחשב את $W(x_0)$ באמצעות הדטרמיננטה, או למטרת שימוש תאורטי.

- עבור שימושים שונים, רצוי גם לזכור את המשוואה הדיפרנציאלית המקדימה לנוסחת אבל עבור המקרה הכללי

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_{n-1}(x) \tag{4.6}$$

- מהתבוננות בנוסחה (4.4) אנו מקבלים אישור נוסף לעובדה: או ש־ $W(x) = 0$ לכל $\alpha < x < \beta$, או ש־ $W(x) \neq 0$ לכל $\alpha < x < \beta$. כאשר (α, β) הוא תחום הקיום של המשוואה. המקרה הראשון קורה כאשר $K = 0$, והשני כאשר $K \neq 0$.
- הדבר השני שאנו למדים מנוסחת אבל הוא שהורונסקיאן זהה למעשה עבור כל הקבוצות היסודיות עד כדי הכפלה בקבוע.
- במקרה של $n = 2$, הורונסקיאן של שני פיתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ מזכיר לנו את המונה של נוסחת הנגזרת של מנת הפונקציות $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1(x)^2} = \frac{W(x)}{y_1(x)^2} = \frac{Ke^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

לכן, אם ידוע לנו פיתרון אחד $y_1(x)$ של המשוואה, נוכל למצוא את הפיתרון השני $y_2(x)$ על ידי השוויון

$$\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right]' = \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

כלומר

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

ולכן

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2} \tag{4.7}$$

- הנוסחה של אבל תאפשר לנו עכשיו להתקדם הלאה ולפתור משוואות ליניאריות הומוגניות בעלי מקדמים קבועים.

פיתרון משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים §4.7

- בסעיף הנוכחי נתמקד במשוואה ליניארית הומוגנית מסדר n בעלת מקדמים קבועים

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4.8}$$

כאשר a_i, $0 \le i \le n$, הם קבועים ממשיים.

- על פי משפט הקיום והיחידות למשוואות ליניאריות תחום הקיום של כל פיתרון של המשוואה הוא על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$.
- **הגדרה:** הפולינום

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

נקרא **הפולינום האופייני** של המשוואה (4.8).

- אם r_1 הוא שורש ממשי של הפולינום האופייני אזי ניתן לפרק אותו למכפלת שני גורמים

$$P(r) = Q(r)(r - r_1)$$

כאשר $Q(r)$ הוא פולינום ממשי ממעלה $n-1$.

- אם נתבונן ברישום האופרטור של המשוואה

$$P(D)[y] = Q(D)(D - r_1)[y] = Q(D)\big[(D - r_0)[y]\big] = 0$$

הפיתרון של המשוואה הליניארית

$$(D - r_1)[y] = y' - r_1 y = 0$$

הוא $c_1 e^{r_1 x}$ (קל לבדוק).

- לכן לשורשים הממשיים $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ של הפולינום האופייני $P(r)$ יתאימו הפיתרונות

$$\{e^{r_1 x}, \quad e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad e^{r_k x}\}$$

אשר בדיקה פשוטה באמצעות הורונסקיאן (בנקודה $x = 0$) מראה שהם בלתי תלויים.

תזכורת: תרגיל נפוץ באלגברה ליניארית, הדטרמיננטה של Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (r_j - r_i)$$

ההוכחה מתבצעת באינדוקציה.

- הבעייה היא שמספר השורשים הממשיים עשוי להיות קטן מ־n ולכן נצטרך למצוא פיתרונות נוספים בכדי לקבל מערכת יסודית של פיתרונות.
- מהיכרות מוקדמת עם סוג זה של משוואות, למדנו כי לפיתרונות היסודיים יש בדרך כלל צורות כגון e^{rx}, $\sin rx$, $\cos rx$.
- דרך שניה להוכיח את התוצאה האחרונה היא פשוט על הצבת $y(x) = e^{rx}$

במשוואה הדיפרנציאלית

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} \\ y'(x) &= re^{rx} \\ y''(x) &= r^2e^{rx} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= r^ne^{rx} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y &= (a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0)e^{rx} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **דוגמא 12:** מצא פיתרון כללי עבור

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

פיתרון: הפולינום האופייני כאן הוא $r^2 - 5r + 6 = 0$. שורשי הפולינום הם $\{2,\ 3\}$, ולכן נקבל מערכת יסודית של פיתרונות $\{e^{2x},\ e^{3x}\}$. לכן הפיתרון הכללי של המשוואה

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

- על פי המשפט היסודי של האלגברה, לפולינום האופייני $P(r)$ (שמעלתו n) יש n שורשים, אשר חלקם אולי מרובים, וחלקם מרוכבים (גם המרוכבים עשויים להיות מרובים!). נבדוק כל מקרה לגופו.
- **שורשים ממשיים, כולם ריבוי 1:** אם כל השורשים שונים וממשיים $\{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n\}$, אז נקבל מערכת יסודית של פיתרונות $\{e^{r_1x},\ e^{r_2x},\ \ldots,\ e^{r_nx}\}$ ובכך סיימנו.
- **שורש מרוכב, ריבוי 1:** במידה ואחד השורשים הוא מרוכב $r = s + it$, אז גם השורש הצמוד $r = s - it$ יופיע ברשימה. אפשר לבדוק שגם הפונקציות e^{s+it}, e^{s-it} הן פיתרונות למשוואה, אך הן פונקציות מרוכבות. אבל ניתן לקבל מהן שני פיתרונות ממשיים בלתי-תלויים באמצעות צירופים ליניאריים

הבאים

$$\begin{aligned} e^{sx}\cos tx &= \tfrac{1}{2}\left[e^{s+it}+e^{s-it}\right] \\ e^{sx}\sin tx &= \tfrac{1}{2i}\left[e^{s+it}-e^{s-it}\right] \end{aligned}$$

ניתן לבדוק באמצעות הורונסקיאן ששני הפיתרונות האלה בלתי-תלויים ליניארית.

- **שורש ממשי ריבוי k גדול מ־1:** אם r_1 שורש מריבוי k אז הפולינום האופייני $P(r)$ ניתן לפירוק באופן הבא

$$P(r) = (r-r_1)^k Q(r)$$

כאשר $Q(r)$ פולינום ממעלה $n-k$, אך r_1 אינו שורש של הפולינום $Q(r)$ (כלומר $Q(r_1) \neq 0$).

לשורש r_1 יתאימו k פיתרונות שונים (ובלתי-תלויים)

$$\{e^{r_1x},\quad xe^{r_1x},\quad \ldots,\quad x^{k-1}e^{r_1x}\}$$

בכדי להוכיח טענה זו נסמן את המשוואה שלנו על ידי $L[y]=0$. קל לראות כי עבור כל r ממשי

$$L[e^{rx}] = e^{rx}P(r) = e^{rx}(r-r_1)^kQ(r)$$

נגזור את שני האגפים לפי המשתנה r נקבל

$$\begin{aligned} L[xe^{rx}] &= xe^{rx}(r-r_1)^kQ(r)+e^{rx}\left[k(r-r_1)^{k-1}Q(r)+(r-r_1)^kQ'(x)\right] \\ &= e^{rx}\left[x(r-r_1)^kQ(r)+k(r-r_1)^{k-1}Q(r)+(r-r_1)^kQ'(x)\right] \end{aligned}$$

אם נציב $r=r_1$ נקבל $L[xe^{rx}]=0$. כלומר $y(x)=xe^{rx}$ הוא פיתרון למשוואה. באופן דומה, אם נמשיך לגזור את השוויון האחרון לפי המשתנה r, נקבל שכל הפונקציות בקבוצה

$$\{e^{r_1x},\quad xe^{r_1x},\quad \ldots,\quad x^{k-1}e^{r_1x}\}$$

הן פיתרונות של המשוואה שלנו.

- **שורש מרוכב ריבוי k גדול מ־1:** בגלל שמקדמי המשוואה ממשיים, כל שורש כזה $s+it$ מגיע גם עם הצמוד שלו $s-it$. בדיוק כמו קודם נוכיח כי הקבוצה

$$\{e^{(s\pm it)x}, \quad xe^{(s\pm it)x}, \quad \dots, \quad x^{k-1}e^{(s\pm it)x}\}$$

מהווה קבוצה יסודית של $2k$ פיתרונות. ניתן לחלץ ממנה $2k$ פיתרונות ממשיים

$$\begin{array}{ll} e^{sx}\cos tx, & e^{sx}\sin tx, \\ xe^{sx}\cos tx, & xe^{sx}\sin tx, \\ x^2e^{sx}\cos tx, & x^2e^{sx}\sin tx, \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1}e^{sx}\cos tx, & x^{k-1}e^{sx}\sin tx \end{array}$$

- **דוגמא 13:** מצא פיתרון כללי עבור

$$y'' - 6y' + 9y =$$

פיתרון: הפולינום האופייני של המשוואה הוא $P(r) = (r-3)^2$. יש לנו שורש יחיד $r=3$ מריבוי 2. ולכן על פי התוצאה שקיבלנו למעלה, $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ הקבוצה יסודית של פיתרונות, ולכן הפיתרון הכללי

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$$

- **דוגמא 14:** באופן דומה נוכיח כי $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ היא קבוצה יסודית של פיתרונות עבור המשוואה

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

דוגמא 15: מצא פיתרון כללי עבור

$$y'''' - 6y''' + 13y'' = 0$$

פיתרון: המשוואה כאן היא ממעלה רביעית. לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 - 6r^3 + 13r^2 = r^2(r^2 - 6r + 13)$$

יש שורש ממשי $r = 0$ בעל ריבוי 2, ושני שורשים מרוכבים $r = 3 \pm 2i$ בעלי ריבוי 1. לכן הקבוצה היסודית שלנו היא

$$\{1, \quad x, \quad e^{3x}\cos 2x, \quad e^{3x}\sin 2x\}$$

ולכן הפיתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x}\cos 2x + c_4 e^{3x}\sin 2x$$

דוגמא 16: מצא פיתרון כללי עבור

$$y'''' + 2y'' + y = 0$$

פיתרון: לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r - i)^2(r + i)^2$$

יש שני שורשים מרוכבים בעלי ריבוי 2: $r_1 = i$, $r_2 = -i$. לכן הקבוצה היסודית שלנו הפעם היא

$$\{\cos x, \quad x\cos x, \quad \sin x, \quad x\sin x\}$$

לכן הפיתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

דוגמא 17: מצא פיתרון כללי עבור

$$y'''' + y = 0$$

פיתרון: לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 + 1$$

יש ארבעה שורשים מרובכים פשוטים $r^4 = -1 = e^{\pi i}$,

$$r = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{5\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

על פי הנוסחה $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ נקבל את ארבעת השורשים הבאים

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

לכן הקבוצה היסודית שלנו היא

$$\{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\}$$

והפיתרון הכללי הוא כרגיל הצירוף הליניארי של ארבעת הפונקציות הללו.

משוואות לא הומוגניות

§4.8

משפט 4.10: אם $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות של משוואה דיפרנציאלית ליניארית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

אז ההפרש $y_h(x) = y_1(x) - y_2(x)$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

הוכחה: נשתמש בסימול האופרטורי

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

על פי עקרון הסופרפוזיציה

$$\begin{aligned} L[y_h(x)] &= L[y_1(x) - y_2(x)] \\ &= L[y_1(x)] - L[y_2(x)] \\ &= q(x) - q(x) = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו לכן שההפרש $y_h(x) = y_1(x) - y_2(x)$ הוא הפיתרון של המשוואה ההומוגנית. ∎

המשפט הבא הוא מסקנה מיידית של משפט זה.

משפט 4.11: אם ידוע לנו פיתרון פרטי $y_p(x)$ למשוואה הלא הומוגניות

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

ואם הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

הוא

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

אז הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

הוכחה: נשתמש שוב בסימול האופרטורי

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

את המשוואה הלא-הומוגנית נוכל לרשום כך

$$L[y] = q(x)$$

ואת המשוואה ההומוגנית נרשום כך

$$L[y] = 0$$

נניח שנתון לנו פיתרון פרטי $y_p(x)$ של המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y_p(x)] = q(x)$$

יהי $y(x)$ פיתרון כלשהו של המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y(x)] = q(x)$$

על פי המשפט הקודם $y(x)-y_p(x)$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית, ולכן קיימים קבועים c_1, c_2, ..., c_n, כך ש־

$$y(x)-y_p(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

ולכן

$$y(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

$\blacksquare$

- המשמעות של המשפט האחרון היא שבכדי לפתור משוואה דיפרנציאלית לא-הומוגנית אנו זקוקים לפיתרון פרטי יחיד שלה, ולפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.
- **דוגמא 18:** מצא את הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית

$$y''+y=3x$$

על ידי ניחוש פיתרון פרטי שלה.

פיתרון: קל לנחש ש־ $y_p(x)=3x$ הוא פיתרון פרטי של המשוואה. מהסעיפים הקודמים ידוע לנו כי הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y''+y=0$$

הוא

$$c_1\cos x+c_2\sin x$$

לכן הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x)=3x+c_1\cos x+c_2\sin x$$

- מכשיר נוסף שיכול לעזור בפיתרון משוואות לא-הומוגניות הוא עיקרון

הסופרפוזיציה: אם הגורם הלא-הומוגני $q(x)$ ניתן לפירוק

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)$$

ואם y_{p_i} הוא פיתרון פרטי של

$$L[y] = q_i(x)$$

אז הסכום

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$$

הוא פיתרון של

$$L[y] = q(x)$$

דוגמא 19: מצא פיתרון כללי למשוואה הלא-הומוגנית

$$y'' + y = 1 + x + \frac{3}{4}\sin\frac{x}{2} \qquad (4.9)$$

פיתרון: על פי עיקרון הסופרפוזיציה יספיק למצוא שלושה פיתרונות פרטיים עבור המשוואות הבאות

$$y'' + y = 1 \qquad (1)$$

$$y'' + y = x \qquad (2)$$

$$y'' + y = \frac{3}{4}\sin\frac{x}{2} \qquad (3)$$

קל לנחש שלושה פיתרונות פרטיים מתאימים

$$y_{p_1}(x) = 1 \qquad (1)$$

$$y_{p_2}(x) = x \qquad (2)$$

$$y_{p_3}(x) = \sin\frac{x}{2} \qquad (3)$$

ולכן פיתרון פרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית (4.9) הוא

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) = 1 + x + \sin\frac{x}{2}$$

ולכן הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית (4.9) הוא

$$y(x) = 1 + x + \sin\frac{x}{2} + c_1\cos x + c_2\sin x$$

שיטת השוואת המקדמים §4.8.1

- מסתבר שניחוש של פיתרון פרטי עבור משוואות לא-הומוגניות בעלי מקדמים קבועים, הוא פשוט יותר במקרים טיפוסיים.
- תהי

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = q(x)$$

הטבלה הבאה מציגה את צורת הניחוש של הפיתרון הפרטי המתאים לגורם $q(x)$. כמובן, יש להציב את $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית ולמצוא את המקדמים המתאימים.

	$q(x)$	$y_p(x)$
1	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)$
2	$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}$
3	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$	$x^k\Big[(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(C_0 + B_1x + \cdots + C_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x\Big]$
4	$(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$x^k\Big[(B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(C_0 + C_1x + \cdots + C_mx^m)e^{\alpha x}\sin\beta x\Big]$

טבלה 4.1: צורת הניחוש של הפיתרון הפרטי

- לכל שורה בטבלה נתאים זוג קבועים α, β. הקבוע α מתאים לגורם $e^{\alpha x}$,

והקבוע β מתאים לגורם $\cos\beta x$ או $\sin\beta x$.

- בשורה 1 של הטבלה, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ולכן שורה 1 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3 (אם נציב $\alpha = 0$, $\beta = 0$ בשורה 3, נקבל את שורה 1).
- בשורה 2 של הטבלה, $\beta = 0$, ולכן שורה 2 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3.
- לכן אפשר להוריד מהטבלה את שתי השורות הראשונות, אבל מסיבות של נוחות נהוג לכלול אותן
- **הכלל לקביעת k:**

אם $r = \alpha + \beta i$ הוא שורש של הפולינום האופייני, אז k הוא הריבוי האלגברי של r. אחרת $k = 0$.

- רצוי להשתמש בשורות 3, 4, אבל אם משתמשים בשורה 1, אז יש לזכור כי בשורה זו $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ולכן $r = 0 + 0i = 0$. לכן אם $r = 0$ הוא שורש של הפולינום האופייני אז k הוא הריבוי האלגברי שלו, אחרת $k = 0$.
- אם משתמשים בשורה 2, אז יש לזכור כי בשורה זו $\beta = 0$, ולכן

$$r = \alpha + 0i = \alpha$$

לכן אם $r = \alpha$ הוא שורש של הפולינום האופייני אז k הוא הריבוי האלגברי שלו, אחרת $k = 0$.

- **דוגמא 20:** מצא פיתרון כללי של המשוואה

$$y'' + y = x^2$$

פיתרון: במקרה זה ברור כי $k = 0$, כי $r = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני $r^2 + 1 = 0$. לכן צורת הפיתרון הפרטי כאן היא

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

הצבת $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית תיתן

$$y_p''(x) + y_p(x) = Ax^2 + Bx + (C + 2A)$$

ולכן

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C + 2A = 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

וקיבלנו את הפיתרון הפרטי הבא עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$y_p(x) = x^2 - 2$$

מומלץ לבדוק שזהו אכן פיתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות הצבתו במשוואה. הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא אם כן

$$y(x) = x^2 - 2 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

דוגמא 21: מצא פיתרון כללי של המשוואה

$$y'' - y = e^x$$

פיתרון: נשתמש בשורה 3 של הטבלה: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. $r = \alpha + \beta i = 1$ הוא שורש של הפולינום האופייני $r^2 - 1 = 0$, ולכן על פי הטבלה צורת הפיתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = Axe^x$$

מאחר ו־ $y = e^x$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^x + Axe^x = A(x+1)e^x \\ y_p''(x) &= A(x+2)e^x \\ y_p''(x) - y_p(x) &= 2Ae^x = e^x \end{aligned}$$

לכן $A = \frac{1}{2}$, ולכן הפיתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$$

הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y'' - y = 0$ הוא

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

לכן הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x}$$

דוגמא 22: מצא פיתרון כללי למשוואה

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

פיתרון: בכדי לנחש פיתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגנית רצוי להתחיל בפיתרון כללי של המשוואה ההומוגנית

$$y''' - 4y' = 0$$

שורשי הפולינום האופייני $r^3 - 4r = 0$ הם $r = 0, -2, 2$, ולכן הפיתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1x + c_2e^{-2x} + c_3e^{2x}$$

בשלב הבא ננחש פיתרונות פרטיים עבור שלושת המשוואות הלא-הומוגניות

הבאות

$$y''' - 4y' = x \tag{1}$$

$$y''' - 4y' = 3\cos x \tag{2}$$

$$y''' - 4y' = e^{-2x} \tag{3}$$

משוואה 1:

השורה המתאימה בטבלה היא שורה 1. במקרה הנוכחי יש לקחת $k = 1$ כי $x^0 = 1$ הוא פיתרון של המשוואה ההומוגנית. לכן הניחוש הוא

$$y_p(x) = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

נציב במשוואה (1)

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B \\ y_p''(x) &= 2A \\ y_p'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = -8Ax - 4B = x$$

לכן $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$, וקיבלנו

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{8}x^2$$

משוואה 2:

השורה המתאימה בטבלה היא שורה 3 ($\alpha = 0$, $\beta = 1$). מאחר ו־

$$r = \alpha + \beta i = i$$

אינו שורש של הפולינום האופייני, יש לקחת $k = 0$, ולכן צורת הפיתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

נציב במשוואה (2)

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -A\sin x + B\cos x \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\sin x \\ y_p'''(x) &= A\sin x - B\cos x \end{aligned}$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = 5A\sin x - 5B\cos x = 3\cos x$$

לכן $A = 0$, $B = -\frac{3}{5}$, וקיבלנו

$$y_{p_2}(x) = -\frac{3}{5}\sin x$$

משוואה 3:
במקרה הזה $r = -2$ הוא שורש של הפולינום האופייני בעל ריבוי $k = 1$, ולכן צורת הפיתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = Axe^{-2x}$$

נציב במשוואה (3)

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} = A(1-2x)e^{-2x} \\ y_p''(x) &= -2Ae^{-2x} - 2A(1-2x)e^{-2x} = A(-4+4x)e^{-2x} \\ y_p'''(x) &= 4Ae^{-2x} - 2A(-4+4x)e^{-2x} = A(12-8x)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = 8Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

לכן $A = -\frac{1}{8}$, וקיבלנו

$$y_{p_3}(x) = -\frac{1}{8}e^{-2x}$$

על סמך עיקרון הסופרפוזיציה הפיתרון עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

הוא

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x - \frac{1}{8}e^{-2x} \end{aligned}$$

ולכן הפיתרון הכללי הוא

$$y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x - \frac{1}{8}e^{-2x} + c_1 x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}$$

דוגמא 23: מצא פיתרון כללי למשוואה

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x\sin x$$

פיתרון: נתחיל במציאת הפיתרון הכלל של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = 0$$

פולינום אופייני

$$\begin{aligned} r^4 - r^3 - r^2 + r &= r^3(r-1) - r(r-1) \\ &= (r^3 - r)(r-1) \\ &= r(r^2-1)(r-1) \\ &= r(r-1)^2(r+1) \end{aligned}$$

שורשים: $r = 0, -1, 1, 1$

פיתרון כללי

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 x e^{x}$$

נשתמש בשורה 4 של הטבלה. במקרה שלנו $q(x) = x\sin x$, ולכן $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $r = \alpha + \beta i = i$. מאחר ו־$r = i$ אינו שורש של הפולינום האופייני, יש לקחת $k = 0$, ולכן על פי שורה 4 בטבלה צורת הפיתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y_p(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

יש לחשב את ארבעת הנגזרות הראשונות של $y_p(x)$

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x \\
&= (A+D+Cx)\cos x + (C-B-Ax)\sin x \\
y_p''(x) &= C\cos x - (A+D+Cx)\sin x - A\sin x + (C-B-Ax)\cos x \\
&= (2C-B-Ax)\cos x - (2A+D+Cx)\sin x \\
y_p'''(x) &= -A\cos x - (2C-B-Ax)\sin x - C\sin x - (2A+D+Cx)\cos x \\
&= -(3A+D+Cx)\cos x - (3C-B-Ax)\sin x \\
y_p^{(4)}(x) &= -C\cos x + (3A+D+Cx)\sin x + A\sin x - (3C-B-Ax)\cos x \\
&= (Ax+B-4C)\cos x + (Cx+4A+D)\sin x
\end{aligned}$$

נציב את $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית ונקבל

$$\begin{aligned}
&y_p^{(4)} - y_p''' - y_p'' + y_p' = \\
&\qquad (3A-6C+D)\cos x + (2A+2C)x\cos x \\
&\qquad + (6A-2B+4C+2D)\sin x + (-2A+2C)x\sin x \\
&= x\sin x
\end{aligned}$$

נקבל מערכת ליניארית של ארבע משוואות בארבעה נעלמים

$$\begin{cases}
4A+2B-6C+2D=0 \\
2A+2C=0 \\
6A-2B+4C+2D=0 \\
-2A+2C=1
\end{cases}$$

שפיתרונה הוא

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{3}{4}$$

ולכן

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x \\ &= \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right)\sin x \end{aligned}$$

הפיתרון הכללי למשוואה הלא-הומוגנית

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x\sin x$$

הוא

$$y(x) = \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right)\sin x + c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{x} + c_4xe^{x}$$

פינת התיכנות: לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת בקלות ש־$y_p(x)$ הוא פיתרון של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות שימוש בתוכנת **SymPy** (Python):

http://live.sympy.org

(אחרת בדיקה ידנית עשויה לצרוך הרבה זמן ודיו, ובנוסף מועדת לשגיאות)

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
yp = (-x/4 + 1/2)*cos(x) + (x/4 + 3/4)*sin(x)
yp1 = diff(yp, x)
yp2 = diff(yp1, x)
yp3 = diff(yp2, x)
yp4 = diff(yp3, x)
simplify(yp4 - yp3 - yp2 + yp1)
```

תרגיל 4.6: מצא פיתרון כללי למשוואה

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = e^{x}$$

תשובה סופית: $y(x) = \frac{x^2}{4}e^x + c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^x + c_4xe^x$

שיטת הוריאציה של הפרמטרים

§4.8.2

- עד עכשיו עסקנו במשוואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים. שיטת הוריאציה של הפרמטרים נועדה לפיתרון משוואות ליניאריות לא-הומוגניות בעלות מקדמים משתנים

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

כאשר ידוע לנו הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

- נניח כי ידוע לנו הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

- שיטת הוריאציה של הפרמטרים מניחה כי קיים פיתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגניות שצורתו היא

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

כאשר $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ הן n פונקציות שעלינו לגלות (ומכאן נגזר שמה של השיטה: הפרמטרים c_1, ..., c_n, הופכים למקדמים משתנים).

- נדגים את השיטה באמצעות משוואה מסדר שני

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

נניח שיש בידנו פיתרון כללי $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ עבור המשוואה ההומוגנית

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

נחפש פיתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

- הנגזרת של $y_p(x)$ היא

$$y_p'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

- קיימת דרגת חופש גדולה בבחירת $c_1(x)$, $c_2(x)$ שמאפשרת הוספת אילוץ נוסף

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

ולכן נוכל לרשום

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

- הנגזרת השנייה של $y_p(x)$ היא

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

- נציב את y_p, y_p', y_p'' במשוואה הלא הומוגנית

$$\begin{aligned}
&y_p'' + p_1(x)y_p' + p_0(x)y_p \\
&\qquad = (c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'') + p_1(c_1y_1' + c_2y_2') + p_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\qquad = c_1(y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1) + c_2(y_2'' + p_1y_1' + p_0y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
&\qquad = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
&\qquad = c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
&\qquad = q(x)
\end{aligned}$$

- לסיכום, קיבלנו את המערכת הבאה

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

על פי כלל קרמר לפיתרון מערכת משוואות ליניאריות

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}$$

קיבלנו נוסחאות פשוטות לחישוב הנגזרות $c_1'(x)$, $c_2'(x)$

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)} \\ c_2'(x) &= \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)} \end{aligned}$$

- כמובן אינטגרציה פשוטה תיתן את $c_1(x)$, $c_2(x)$.
- נוסחאות דומות מתקבלות גם עבור משוואות מסדר 3 ומעלה.
- לחילוק בורונסקיאן $W(x)$ אין שום השפעה על תחום הקיום של הפיתרונות מאחר שנתון לנו כי $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית ולכן הורונסקיאן אינו מתאפס בתחום הקיום של המשוואה (α, β).
- **דוגמא 24:** מצא פיתרון כללי של המשוואה

$$y'' + y = \tan x, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

פיתרון: ראשית כל נציין כי למרות שמקדמי המשוואה קבועים, לא ניתן לפתור את המשוואה באמצעות שיטת השוואת המקדמים. כזכור, הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y''+y=0$ הוא

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

ולכן צורת הפיתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית היא

$$y_p(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

יש לפתור את המערכת

$$\begin{cases}\cos x\cdot c_1'(x)+\sin x\cdot c_2'(x)=0\\ -\sin x\cdot c_1'(x)+\cos x\cdot c_2'(x)=\tan x\end{cases}$$

נשתמש בכלל קרמר לפיתרון מערכת משוואות ליניאריות

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \tan x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{-\sin x\cdot\tan x}{1}=-\sin x\cdot\tan x$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \tan x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{\cos x\cdot\tan x}{1}=\sin x$$

ברור כי $c_2(x) = -\cos x$. בכדי לקבל את $c_1(x)$ יש צורך לבצע אינטגרציה

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx \\ &= \sin x - \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \sin x - \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} \\ &= \sin x - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\sin x - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right) \cos x - \cos x \cdot \sin x \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

ולכן הפיתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

- **פינת התיכנות:** לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת בקלות ש־$y_p(x)$ הוא פיתרון של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות שימוש בתוכנת **SymPy** (Python):

http://live.sympy.org

(אחרת בדיקה ידנית עשויה לצרוך הרבה זמן ודיו, ובנוסף מועדת לשגיאות)

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
yp = -0.5*cos(x) * ln((1+sin(x))/(1-sin(x)))
yp1 = diff(yp, x)
yp2 = diff(yp1, x)
simplify(yp + yp2)
```

- באותו האופן בדיוק נוכל למצוא פיתרון פרטי עבור משוואה דיפרנציאלית

ליניארית לא-הומוגנית מסדר 3

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

אם הפיתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ידוע לנו

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$$

אז צורת הפיתרון של הפיתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית תהיה

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

לאחר גזירה והוספת שני אילוצים נקבל את המערכת

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) = q(x) \end{cases}$$

ובאמצעות שימוש בכלל של קרמר נקבל נוסחאות מתאימות עבור $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $c_3'(x)$. לדוגמא, הנוסחה עבור $c_1'(x)$ היא

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y_2'(x) & y_3'(x) \\ q(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}} = \frac{q(x)[y_2(x)y_3'(x) - y_3(x)y_2'(x)]}{W(x)}$$

תרגיל 4.7: מצא פיתרון כללי למשוואה

$$y''' - y' = x$$

הדרכה: ניתן לפתור את הבעייה על ידי שיטת השוואת המקדמים וגם על ידי הורדת סדר פשוטה ($v = y'$). מומלץ בכל זאת לפתור את התרגיל בכדי לתרגל את נושא הוריאציה של הפרמטרים. הפיתרון הסופי שצריך להתקבל הוא

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + c_1 + c_2e^{-x} + c_2e^{x}$$

תרגיל 4.8: מצא פיתרון כללי למשוואה

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$$

הדרכה: התשובה הסופית היא

$$y(x) = 29\sin^2 x - 15\sin 2x + \frac{23}{312}e^{2x}\cos^2 x + c_1 + c_2e^{-x}$$

משוואת אוילר (Leonhard Euler 1707-1783) §4.8.3

- אחת המשוואות הליניאריות הידועות היא **משוואת אוילר**

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = q(x), \quad (0 < x < \infty)$$

- משוואת אוילר חשובה עבור פיתרון משוואת לפלס (אלקטרומגנטיות, חשמל, חום, נוזלים), אבל יש לה גם חשיבות מתודית עקב היותה דוגמא פשוטה לנקודות סינגולריות רגולריות.

נקודות סינגולריות רגולריות (קישור לויקיפדיה)

- ההצבה

$$x = e^t, \qquad t = \ln x \qquad (0 < x < \infty)$$

הופכת את משוואת אוילר למשוואה ליניארית בעלת מקדמים קבועים.
נדגים זאת על משוואה מסדר 3

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right] = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \\ y''' &= \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy^2}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] \end{aligned}$$

לאחר הצבת תוצאות אלה במשוואת אוילר, ברור שכל החזקות x^k יתבטלו, ונקבל משוואה ליניארית בפונקציה $y(t)$, בעלת מקדמים קבועים.

- ניתן להוכיח באמצעות אינדוקציה מתימטית את הנוסחה האופרטורית הבאה

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-n+1\right)[y]$$

- בתחום $-\infty < x < 0$ ההצבה היא $x = -e^t$.
- **דוגמא 25:** מצא פיתרון כללי עבור משוואת אוילר הבאה

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \qquad (0 < x < \infty)$$

פיתרון: נעבור למשתנה t באמצעות ההצבה $x = e^t$

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] - 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} + 2y(t) \\ &= \frac{dy^2}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה חדשה במשתנים y, t

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$$

שכמובן ניתן לפתור על ידי שיטת השוואת המקדמים

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + c_1e^t + c_2e^{2t}$$

נחזור למשתנים המקוריים $y = y(x)$, ונקבל

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2x^2$$

- יוצא שהפיתרונות היסודיים של משוואת אוילר ההומוגנית הם תמיד מהצורה $y = x^r$, ולכן מעתה ואילך לא נשתמש שוב בהצבה $x = e^t$, אלא נחפש ישירות את הפיתרונות היסודיים על ידי הצבת $y = x^r$ בביטוי

$$L[y] = a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = 0$$

שנותנת

$$L[x^r] = x^rP(r)$$

כאשר $P(r)$ פולינום ממשי ממעלה n.

- למשל עבור משוואת אוילר מסדר 2

$$\begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= rx^{r-1} \\ y'' &= r(r-1)x^{r-2} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} L[y] &= a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y \\ &= a_2x^2r(r-1)x^{r-2} + a_1xrx^{r-1} + a_0x^r \\ &= a_2r(r-1)x^r + a_1rx^r + a_0x^r \\ &= x^r[a_2r(r-1) + a_1r + a_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שכאשר $n = 2$

$$P(r) = a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

- השוויון האחרון נקרא **המשוואה האינדיציאלית** או **המשוואה האופיינית** של משוואת אוילר ההומוגנית.
- במקרה של משוואה הומוגנית מסדר 3, המשוואה האינדיציאלית תהיה

$$P(r) = a_3 r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

- אם לפולינום האינדיציאלי $P(r)$ יש n שורשים ממשיים שונים

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n$$

אז בסיס למרחב הפיתרונות של המשוואה ההומוגנית יהיה

$$x^{r_1}, \quad x^{r_2}, \quad \ldots, \quad x^{r_n}$$

- אם r הוא שורש ממשי בעל ריבוי אלגברי k, אז יתאימו לו k פיתרונות בלתי תלויים

$$x^r, \quad x^r \ln x, \quad x^r (\ln x)^2, \quad \ldots, \quad x^r (\ln x)^{k-1}$$

- אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים פשוטים של $P(r)$, אז יתאימו להם 2 פיתרונות בלתי תלויים

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), \qquad x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

- אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים של $P(r)$ בעלי ריבוי אלגברי

k, אז יתאימו להם $2k$ פיתרונות בלתי תלויים

$$\begin{array}{ll} x^\alpha \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\ x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x) \\ x^\alpha (\ln x)^2 \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^2 \sin(\beta \ln x) \\ \vdots & \vdots \\ x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x) \end{array}$$

תרגילים: מצא פיתרון כללי עבור כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $x^2y'' - xy' + y = x^5$

ב. $2x^2y'' + 5xy' + y = 3x + 2$

ג. $x^2y'' - 6y = 1 + \ln x$

ד. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 1$

ה. $3(x+6)^2y'' + 25(x+6)y' - 16y = 0$, $\quad -6 < x < \infty$

תשובות סופיות:

א. $y(x) = \frac{x^4}{16} + c_1x + c_2 \ln x$

ב. $y(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$

ג. $y(x) = -\frac{\ln x}{6} - \frac{1}{9} + c_1x^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} + c_2x^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

ד. $y(x) = -\frac{1}{2}c_1x + c_2x\ln x + c_3x^2$

ה. $y(x) = c_1(x+6)^{-8} + c_2(x+6)^{\frac{2}{3}}$

תרגילים

1. מצא פיתרון כללי

א. $y'' - 25y = 0$

ב. $y'' - 2y' + 2y = 0$

ג. $y'' - 5y' + 6y = 0$

ד. $y''' - y = 0$

ה. $y^{(4)} - y = 0$

ו. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$

ז. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

ח. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

ט. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

2. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א.
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

ג.
$$\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

3. מצא פיתרון כללי

י. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

יא. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$

יב. $y'' - y = -x^2$

יג. $y'' + 3y' - 4y' = xe^{-x}$

יד. $y'' - y' + y = x^3 + 6$

טו. $y'' - 8y' + 7y = 14$

טז. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

יז. $y'' - y = 2e^x$

יח. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$

יט. $y'' - 4y' + 3y = 2 - \cos(2x) + 35\sin(2x)$

כ. $y'' + y' - 2y == 11\cos\frac{x}{2} - 7\sin\frac{x}{2}$

כא. $y'' + 5y' + 6y = -50\sin 4x$

כב. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x\cos\frac{x}{2}$

כג. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$

כד. $y'' + 4y = 12\cos 2x$

כה. $y'' + 9y = -18\cos 3x$

כו. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + e^2x + \sin 2x$

כז. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$

כח. $y'' - y = 2x - 1 - 3e^x$

כט. $y''' + y'' = 3xe^x + x^2 + 1$

ל. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$

לא. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$

לב. $y'' + 3y - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

4. נתונה משוואה משוואה דיפרנציאלית לינארית לא הומוגנית בעלת מקדמים קבועים

$$L[y] = q(x)$$

נתון כי שורשי הפולינום האופייני של המשוואה הם

$$\begin{aligned} &r_1 = -2, \; r_2 = -2, \; r_3 = -2, \quad r_4 = 0, \quad r_5 = 3, \\ &r_6 = 3, \quad r_7 = 5i, \quad r_8 = -5i, \; r_9 = 6i, \; r_{10} = -6i \end{aligned}$$

רשום את צורת הפיתרון הפרטי עבור כל אחד מהמקרים הבאים

א. $q(x) = x^2e^{3x}$

ב. $q(x) = 7xe^{-2x}$

ג. $q(x) = 11$

ד. $q(x) = 2\cos 4x - \sin 4x$

ה. $q(x) = \sin 5x$

ו. $q(x) = 4e^{3x} - x + \cos 6x + e^{-x}$

5. בנה משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים שפיתרונה הכללי הוא

$$y(x) = c_1x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$$

6. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases} y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y'' + y = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y''' - y' = 3(2 - x^2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 50 \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

ז. $\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

7. נתון כי $y_1(x)$, $y_2(x)$, פיתרונות פרטיים של המשוואה

$$y'' + 4y' + 8y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$.

א. הוכח כי $\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_2(x)$.

ב. נתון כי $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח כי $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2})$.

8. נתון ששלושת הפונקציות

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = 2x, \quad y_3(x) = 3$$

הן פיתרונות של המשוואה

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

מהו הפיתרון הכללי של המשוואה?

9. נתונה המשוואה

$$y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 3e^{\alpha x}$$

וידוע ששורשי הפולינום האופייני הם

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = -3$$

מצא את צורת הפיתרון הפרטי.

10. נתונה המשוואה $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. מצא את הפיתרון המקיים $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

11. נתונה המשוואה $y'' + 4y = 0$. מצא את הפיתרון המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12. מצא את הפיתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

לג. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$

לד. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$

לה. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$

לו. $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$

לז. $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$

לח. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

לט. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

מ. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \tan x)$

מא. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$

מב. $y^{(5)} + 4y' = x + 1 + \cos 2x$

13. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

א. $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 13y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$

14. מצא את הפיתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

מג. $y'' + y = \cot x$

מד. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

מה. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$

מו. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

מז. $y''' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

מח. $y''' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

מט. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

נ. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$

נא. $x^2y'' - xy' + y = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}$

נב. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

נג. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$

נד. $x^3y''' + xy' - y = 0$

נה. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$

נו. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$

15. ידוע שלמשוואה הבאה יש פיתרון פרטי בצורת פולינום ממשי ממעלה 1. מצא את הפיתרון הכללי

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$$

16. נתון שהפונקציה $y(x) = x^4 + x^4\ln x$ היא פיתרון פרטי של המשוואה הדיפרנציאלית

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

מצא את המקדמים a_0, a_1.

17. נתונים שני פיתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ של המשוואה

$$y'' - y' + ye^{2x} = 0$$

ידוע שהורונסקיאן שלהם מקיים $W(0) = 1$. מצא את $W(x)$.

18. ידוע ששלושת הפונקציות

$$\begin{cases} y_1(x) &= (x+4)\sin x \\ y_2(x) &= (x+5)\sin x \\ y_3(x) &= x\sin x + 3\cos x \end{cases}$$

הן פיתרונות של המשוואה

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q(x)$, רציפות על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$. מצא פיתרון

$y(x)$ של המשוואה המקיים

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

והסבר מדוע פיתרון זה יחיד על כל הישר.

19. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית והומוגנית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, פונקציות רציפות בקרן $[0, \infty)$.
יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פיתרונות של המשוואה, כך ש־ $y_1(x) > 0$ בכל התחום, ו־ $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח או הפרך את כל אחת מהטענות הבאות

א. אם $y_1(3) = y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

ב. אם $y_1(3) < y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

ג. אם $y_1(3) > y_2(3)$, אז $y_1(x) > y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

הדרכה: חקור את הפונקציה $h(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$. העזר בורונסקיאן ובמשפט ערך הביניים של רול.

20. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית ליניארית הומוגנית ממעלה 3

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, פונקציות רציפות בקטע (α, β), ונתונים שלושה פיתרונות של המשוואה

$$y_1(x) = xe^x, \quad y_2(x) = (x+1)e^x, \quad y_3(x) = x - 3$$

בקטע (α, β).

א. איזה נקודה מבין הנקודות הבאות <u>אינה</u> שייכת לקטע (α,β)?

$$x=1, \quad x=2, \quad x=3, \quad x=4, \quad x=5$$

ב. ידוע שהפונקציה $p_2(x)$ מתאפסת בנקודה $x=x_0$, $\alpha<x_0<\beta$. מצא את הנקודה x_0.

הדרכה: השתדל להקדיש לבעייה לפחות 10 דקות מחשבה בכיוון הורונסקיאן לפני קריאת ההדרכה ...

א. בדוק באיזה נקודות הורונסקיאן של שלושת הפיתרונות מתאפס? הורונסקיאן של שלושת הפונקציות צריך לצאת $W(x)=(5-x)e^{2x}$

ב. לאחר חישוב מפורש של הורונסקיאן $W(x)$, יש להשתמש בנוסחה

$$\frac{W'(x)}{W(x)}=-p_{n-1}(x)$$

בכדי לחשב את x_0. $p_{n-1}(x)$ הוא המקדם של $y^{(n-1)}$.

21. נתונה המשוואה

$$x(x+1)y''-2y'-2y=0$$

א. הראה שהפונקציה $y_1(x)=\frac{1}{x-1}$ היא פיתרון של המשוואה.

ב. מצא פיתרון $y_2(x)$ של המשוואה המקיים $y_2'(1)=\frac{3}{2}$.

22. נתונה המשוואה

$$y^{(4)}+ay'''+by''+cy'+ky=0$$

כאשר a, b, c, k, קבועים ממשיים. נתון ש־$y_1(x)=5x+3\sin x$ הוא פיתרון של המשוואה. הוכח או הפרך את הטענות הבאות

א. $c=0$, $k=1$

ב. $c=1$, $k=1$

ג. $c=0$, $k=0$

ד. $k = a + b + c$

ה. $c = a + b$

23. הסבר מדוע הורונסקיאן של המשוואה

$$y''' - (e^{3x} + \cos 5x)y' + x^7 y = 0$$

הוא קבוע?

24. נתון כי $y(x)$ הוא הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \\ y(0) = \ln(4) \\ y'(0) = \ln(8) \end{cases}$$

חשב את $y(1)$.

25. נתונה משוואה ליניארית בתוספת פיתרון פרטי ידוע $y_1(x)$. מצא את הפיתרון הכללי.

$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\quad y_1(x) = x$

$x^2(x+1)y'' - 2y = 0$, $\quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$xy'' + 2y' - xy = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{e^x}{x}$

$y'' - 2(1+\tan^2 x)y = 0$, $\quad y_1(x) = \tan x$

$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, $\quad y_1(x) = x$, $\quad y_2(x) = \frac{1}{x}$

$xy'' - y' + 4x^3 y = 0$, $\quad y_1(x) = \sin(x^2)$

$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$

26. ידוע כי $y_1(x) = e^x$ הוא פיתרון של המשוואה $(x-1)y'' - xy' + y = 0$. עשה שימוש בפיתרון זה ובנוסחת Abel בכדי למצוא פיתרון שני שאינו תלוי ב־ $y_1(x)$.

27. ידוע כי $\sin x$ הוא פיתרון של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} - 2y''' + 3y'' - 2y' + 2y = 0$$

מצא את הפיתרון הכללי שלה.

28. למשוואה $6x^3y''' - 24x^2y'' + 48xy' - 48y = 0$ ידועים שני פיתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x^2, \qquad y_2(x) = x, \qquad 0 < x < \infty$$

מצא את הפיתרון הכללי.

29. למשוואה

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0, \qquad 0 < x < \infty$$

ידוע הפיתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפיתרון הכללי.

30. למשוואה $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ ידועים שני פיתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = e^x$$

מצא את הפיתרון הכללי.

הדרכה: מלבד שיטת ההצבה ($y_3(x) = v(x)y_1(x)$) להורדת סדר, ניתן להשתמש בורונסקיאן ובנוסחת אבל למציאת פיתרון שלישי בלתי תלוי.

31. נתונה המשוואה: $x^2y'' - 2y = 21\sqrt{x}$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפיתרון $y(x) = x^2$. מצא את הפיתרון הכללי של המשוואה.

32. נתונה המשוואה: $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפיתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפיתרון הכללי של המשוואה.

33. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, רציפות על כל הישר. ידוע כי

$$y_1(x) = (x+3)\cos x, \qquad y_2(x) = x\cos x, \qquad y_3(x) = 3\sin x$$

הן שלושה פיתרונות של המשוואה.

א. מצא את הפיתרון הכללי למשוואה.

ב. חשב את $p_1(x)$.

34. ידוע שהפונקציה $y(x)$ היא הפיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' = x\cos x, \quad 0 < x < \infty \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

חשב את הערך של $y(\pi)$.

35. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, ארבעה פיתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} + \frac{1}{x}y''' + \frac{1}{x^2}y'' + \frac{1}{x^3}y' + \frac{1}{x^4}y = 0$$

ידוע כי $W[y_1,y_2,y_3,y_4](1) = 8$. חשב את $W[y_1,y_2,y_3,y_4](2)$.

הדרכה: השתמש בנוסחה $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_{n-1}(t)dt}$.

הבחירה של הנקודות x_0, x, לא קשה ...

36. בדוק האם קיים פיתרון $y(x)$ עבור המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(4)} - y''' = 3e^{-x}$$

המקיים $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$?

37. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y''-2y=x^2 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=1 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפיתרון?

38. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+9y=12\sin(3\ln x) \\ y(1)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפיתרון שמצאת?

39. רשום את צורת הפיתרון הפרטי על פי שיטת השוואת המקדמים (אין צורך למצוא קבועים) עבור המשוואה

$$y'''-4y'=3x+10\cos(x)$$

40. למשוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים $L[y]=0$ יש את הפולינום האופייני

$$P(r)=r^2(r^2+4)^2(r^2+3r-4)$$

מצא את צורת הפיתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y]=\sin 2x+xe^x+2e^{-4x}+5$$

41. יהי $y(x)$ פיתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

מצא את $y'''(6)$.

42. נתון שהפונקציה $y(x) = 3xe^x \sin(2x)$ היא פיתרון של המשוואה

$$y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

כאשר a_0, a_1, a_2, a_3, הם מקדמים ממשיים קבועים. חשב את a_1, a_2.

43. ידוע שהפונקציות $y_1(x) = \dfrac{\sqrt{\pi} + 3\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ הן שני פיתרונות של המשוואה

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = q(x), \quad 0 < x < \infty$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה בקרן $(0, \infty)$. מצא את הפיתרון הפרטי עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = q(x), \quad 0 < x < \infty \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

44. רשום צורה כללית של פיתרון פרטי עבור המשוואה

$$x^3 y''' + xy' - y = (x + \sqrt{x}) \ln x$$

45. באמצעות שיטת הוריאציה של הפרמטרים, מצא נוסחה לפיתרון הכללי של

המשוואה

$$y'' + y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ היא פונקציה רציפה כלשהי בקטע נתון.

46. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית ההומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות על כל הישר הממשי. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, שני פיתרונות בלתי תלויים ליניארית של המשוואה. לגבי כל טענה, אם היא נכונה הוכח אותה, ואם לא, הפרך אותה על ידי דוגמא מתאימה

א. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, אף פעם אינם נחתכים

ב. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך, אך אינם יכולים להשיק זה לזה

ג. אם $y_1(x) > 0$ לכל x ממשי, אז הגרפים של שני הפיתרונות נחתכים לכל היותר פעם אחת

ד. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך אינסוף פעמים