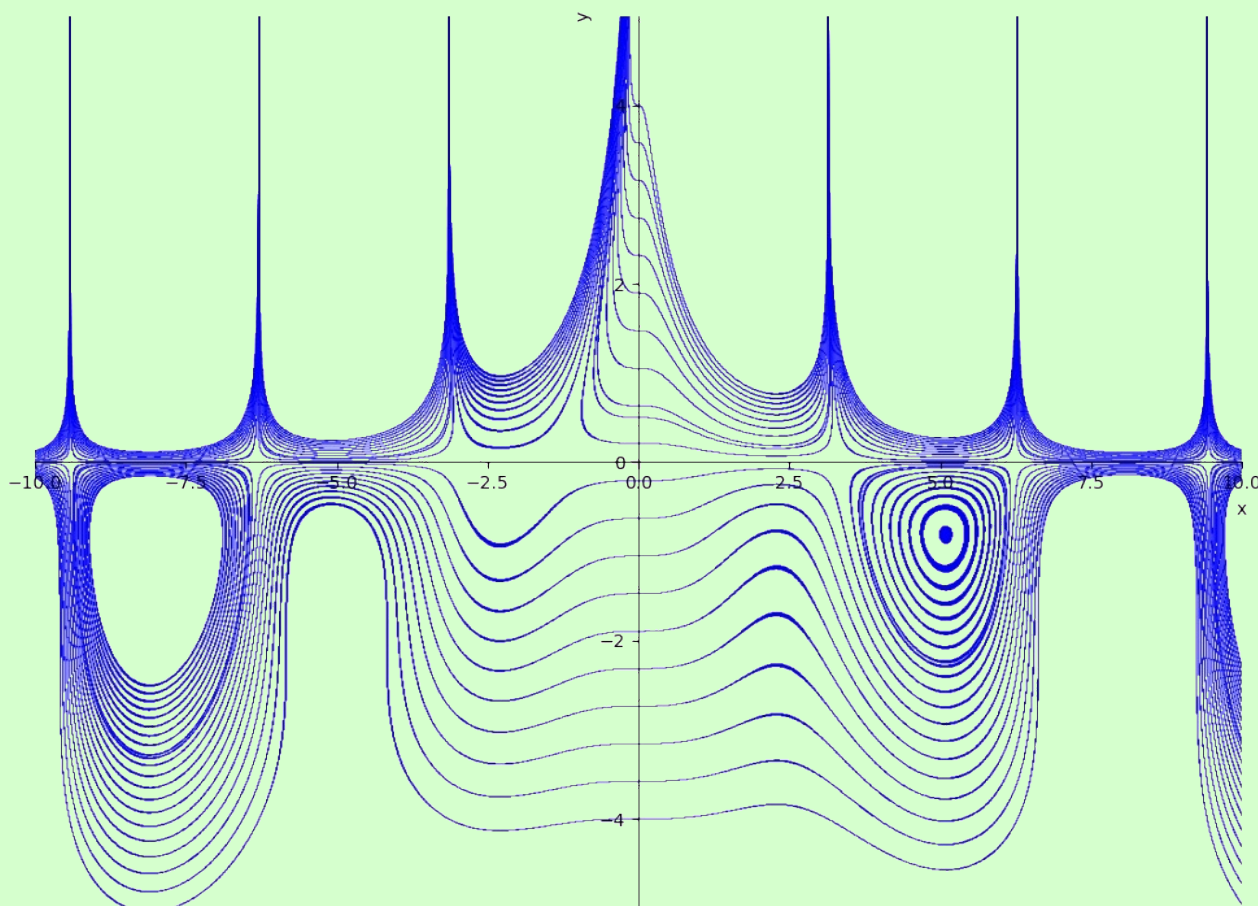

משוואות דיפרנציאליות

רצינות



Ordinary Differential Equations

מוקדש לזכרו של ד"ר רוני נחום ז"ל

1958-2020

איש בעל נפש אצילה ורוח גדולה,

מרצה למתמטיקה ומחנך,

חבר יקר



ד"ר רוני נחום

החוברת נכתבה כתרומה לקהילה וללא מטרות רווח. ניתנת בזאת רשות לכל המעוניין להוריד את החוברת למחשבו או לכל התקן אלקטרוני אחר, להדפיסה, לאכסנה במאגרי מידע כלשהם, ולהפיצה בכל אמצעי אחר (למטרות לימוד והוראה) כל עוד לא נעשה בה שימוש מסחרי שמפר זכויות יוצרים (אין לגבות תשלום בשום מצב). גירסאות ישנות של החוברת התפרסמו בעבר בכמה אתרי אינטרנט שונים (לא כולם עודכנו). ניתן להוריד את הגירסה הכי מעודכנת של החוברת על ידי לחיצה על הקישור הבא:

[!\[\]\(3211b5d1d968fc1665909b34f9f16010_img.jpg\) קישור לגירסה האחרונה של החוברת](#)

הקדמה

החוברת הנוכחית צמחה מתוך סדרת קורסים בנושא משוואות דיפרנציאליות רגילות בטכניון עבור תלמידים לפקולטות הנדסה. היא מכסה את החומר הבסיסי בנושא זה, הדרוש עבור קורסי הנדסה שונים בטכניון, ועשויה להתאים גם עבור קורסים דומים בנושא זה במוסדות אקדמיים נוספים.

הדרך הטובה, היעילה, וכמעט היחידה, ללימוד מתמטיקה היא בשינון החומר יחד עם פתרון תרגילים. בסוף כל פרק נכללה קבוצה מגוונת של תרגילים מתוך רשימה ארוכה של חוברות תירגול ומבחנים שניתנו בקורס זה במהלך השנים בטכניון ובמוסדות שונים להשכלה גבוהה. הבנה כוללת ומעמיקה של החומר תלויה מאוד בכמות התרגילים אותם פותר התלמיד.

נשמח לקבל תיקונים, רעיונות, והצעות לשיפור הספר. אין כוונה להפוך אותו לנייר או כל צורת דפוס כלשהי, אלא להמשיך להעשיר אותה בקישורים נוספים לתכנים שונים באינטרנט. אנו מניחים כי לכל התלמידים גישה למכשירים אלקטרוניים המאפשרים צפייה ואינטראקציה עם התכנים המוצגים בו.

אנו מקווים מאוד שהחומר מובא בצורה שתאפשר לך, הקורא, ללמוד אותו בצורה יעילה ומעמיקה ומאחלים לך הצלחה בנסיון זה.

החוברת מתעדכנת מידי פעם, וניתן להוריד אותה ממספר אתרים ברשת האינטרנט. האתר הרישמי שבו ניתן למצוא את העידכון האחרון הוא:

<https://www.samyzaf.com/technion/ode/ode.pdf>

.

סמי זעפרני, נובמבר 2022

תוכן עניינים

1 מבוא כללי למשוואות דיפרנציאליות רגילות	8
1.1 מהן משוואות דיפרנציאליות?	8
1.2 שימושים של משוואות דיפרנציאליות	9
מודל מתימטי לחיזוי גודל אוכלוסיה	10
מודל מתימטי לתנועת מטוטלת פשוטה	13
מודל מתימטי לנפילה חופשית עם חיכוך אווירי	15
מהירות מילוט של לוויין משדה הכבידה	17
חישוב החזר חודשי קבוע של הלוואת משכנתא	20
1.3 מיון של המשוואות הדיפרנציאליות	25
1.4 מהו פתרון של משוואה דיפרנציאלית?	26
תרגילים לפרק 1	28
2 משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון	30
2.1 שיטת גורם האינטגרציה	31
2.2 משפט הקיום והיחידות עבור משוואה ליניארית מסדר ראשון	35
2.3 ספל הקפה של ניוטון: פתרון	38
2.4 חישוב החזר חודשי קבוע של הלוואת משכנתא - פתרון	40
תרגילים לפרק 2	42
3 משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות מסדר ראשון	44
3.1 פתרון משוואות דיפרנציאליות פרידות	45
בסיס תאורטי לשיטת הפרדת המשתנים	46
3.2 שיטות הצבה	47
משוואות מטיפוס הומוגני (Homogeneous Differential Equations)	47
משוואת ברנולי (Jacob Bernoulli 1655-1705)	48
מנת קווים ישרים	52
משוואות דיפרנציאליות מהצורה $y' = F(ax + by + c)$	54



3.3	משוואת ריקאטי (Jacopo Riccati 1676-1754)	55
3.4	משוואות מדויקות	55
	גורמי אינטגרציה עבור משוואות מדויקות	58
3.5	משפחות אורתוגונליות של עקומים	66
3.6	משפט הקיום והיחידות עבור משוואות מסדר ראשון	71
3.7	שדה כיוונים של פונקציה $f(x, y)$ במישור	77
3.8	פתרונות סתומים	81
3.9	דיון סכמטי בהוכחת משפט הקיום והיחידות	82
	שלב 1: נרמול הבעיה	83
	שלב 2: מעבר למשוואה אינטגרלית	84
	שלב 3: בניית סדרת קירובים לפתרון	85
	דוגמא לשיטת הקירובים של פיקארד	86
	תחום הקיום ויחידות הפתרון	87
3.10	נספח: משפט קיום ויחידות עבור משוואה דיפרנציאלית מסדר n	90
	תרגילים לפרק 3	90
4	משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר $n > 1$	103
4.1	דיון תאורטי	105
4.2	משפט הקיום והיחידות עבור משוואות לינאריות מסדר n	106
4.3	משוואות הומוגניות ועקרון הסופרפוזיציה	107
	אופרטורים דיפרנציאליים (Differential Operators)	109
4.4	מערכת יסודית של פתרונות עבור משוואות הומוגניות	113
4.5	מציאת פתרון על ידי הורדת סדר	119
4.6	נוסחת אבל (Niels Henrik Abel, 1802-1829)	120
4.7	פתרון משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים	123
4.8	משוואות לא הומוגניות	128
	שיטת השוואת המקדמים	131
	שיטת הוריאציה של הפרמטרים	138
	משוואת אוילר (Leonhard Euler 1707-1783)	142
	תרגילים לפרק 4	146
5	פתרון משוואות באמצעות טורי חזקות	157
5.1	חזרה על נושא טורי חזקות	157
	תחום התכנסות של טור חזקות	159
	התכנסות במידה שווה של טור חזקות	160



161		גזירה ואינטגרציה של טור חזקות
163		פיתוח פונקציה לטור חזקות
165		אריתמטיקה של טורי חזקות
167		פתרון משוואות דיפרנציאליות על ידי טורי חזקות
178		תרגילים לפרק 5
181		6 התמרת לפלס
181		6.1 מהי התמרת לפלס?
187		6.2 דוגמאות יסודיות
188		6.3 התמרת לפלס הפוכה $\mathcal{L}^{-1}$
189		6.4 פתרון משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת לפלס
192		6.5 תכונות נוספות
195		6.6 משפטי הזזה
203		6.7 פתרון משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת לפלס - הרחבה
209		6.8 משפט הקונבולוציה
213		6.9 טבלת התמרות לפלס בסיסית
214		תרגילים לפרק 6
222		7 מערכות של משוואות ליניאריות
225		7.1 משפט הקיום והיחידות עבור מערכת משוואות מסדר 1
226		משפט הקיום והיחידות עבור מערכות ליניאריות של משוואות מסדר 1
226		מערכות של משוואות מסדר גבוה
227		רישום וקטורי
228		פתרון מערכת ליניארית על ידי שיטת האלימינציה
229		7.2 מערכת ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים
232		נוסחת אבל (Niels Henrik Abel 1802-1829)
235		7.3 שיטות פתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים
240		ערכים עצמיים בעלי ריבוי אלגברי וגאומטרי זהה $k > 1$
241		ערכים עצמיים מרוכבים פשוטים
244		ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 2 וריבוי גאומטרי 1
246		ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1
249		ערך עצמי מריבוי 3 בעל ריבוי גאומטרי 2
252		7.4 מערכת משוואות ליניארית לא-הומוגנית
261		תרגילים לפרק 7



8	שיטת ההפרשים הסופיים	265
8.1	מבוא כללי	265
8.2	ההתחלה: שיטת ההפרש הקדמי של אוילר (Euler)	268
8.3	נוסחת נסיגה עבור משוואה דיפרנציאלית רגילה	273
8.4	מערכת משוואות לינאריות על סריג הפרשים	274
8.5	ביבליוגרפיה	279



פרק 1

מבוא כללי למשוואות דיפרנציאליות רגילות

תודה מיוחדת לפרופסור חגי כתריאל מהמחלקה למתמטיקה במכללת אורט בראודה על כך שנתן את הרשאתו להשתמש בהרצאותיו. חלק גדול מהדוגמאות והתרגילים בשיעור זה לקוח מתוך הקישור הבא:

<https://archive.braude.ac.il/mod/folder/view.php?id=318949>

מהן משוואות דיפרנציאליות?

§1.1

- ❶ אלה הן משוואות שבהן הנעלם הוא פונקציה ממשית.
- ❷ במשוואה דיפרנציאליות מעורבת לפחות נגזרת אחת של פונקציה לא ידועה.
- ❸ **דוגמה 1:**

$$\text{א. } f'(x) = 2x$$

$$\text{ב. } f'(x) = f(x)$$

$$\text{ג. } f''(x) - f'(x) + x^2 = 5f(x)$$

$$\text{ד. } f''(x)^4 + f'(x)^2 + 1 = 0$$

$$\text{ה. } y''' + 5xy' - y \sin x = 3e^x$$

$$\text{ו. } t^3 y'''(t) - t^2 y''(t) + t y'(t) - 2y(t) = 1 + \ln t$$

$$\text{ז. } \frac{y'}{1 + yy''} = xy^3$$

ח. חוק הקירור של ניוטון

$$T'(t) = k[T(t) - C]$$



במשוואה זו, הפונקציה $T(t)$ מתארת את הטמפרטורה של כוס קפה חם בזמן t בחדר שהטמפרטורה שלו היא C (ההנחה היא שהטמפרטורה C קבועה), ו- k הוא קבוע פיזיקלי התלוי בסוג האובייקט שמתקרר.



איור 1.1: Newton's cup of coffee

בעייה: ניוטון נכנס לחדר בטמפרטורה של 25° מעלות עם כוס קפה בטמפרטורה התחלתית של 90° מעלות ($T(0) = 90$). לאחר 10 דקות טמפרטורת הקפה היתה 70° מעלות צלזיוס ($T(10) = 70$). מתי טמפרטורת הקפה תגיע ל- 30° מעלות?

פתרון: מדובר במשוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} T'(t) = k[T(t) - 25] \\ T(0) = 90 \end{cases}$$

כרגע אין לנו שום מושג איך לפתור את הבעייה. לאחר עוד שיעור או שניים נהיה יותר מוכנים לכך.

שימושים של משוואות דיפרנציאליות

§1.2

פיזיקה: חוקי תנועה של גופים וחלקיקים, אסטרונומיה, גלים, חום, דינמיקה של זרימת נוזלים וגזים, אלקטרומגנטיות, תרמודינמיקה, חיזוי מזג אוויר ורעידות אדמה, רדיואקטיביות, אנרגיה גרעינית, ועוד ...

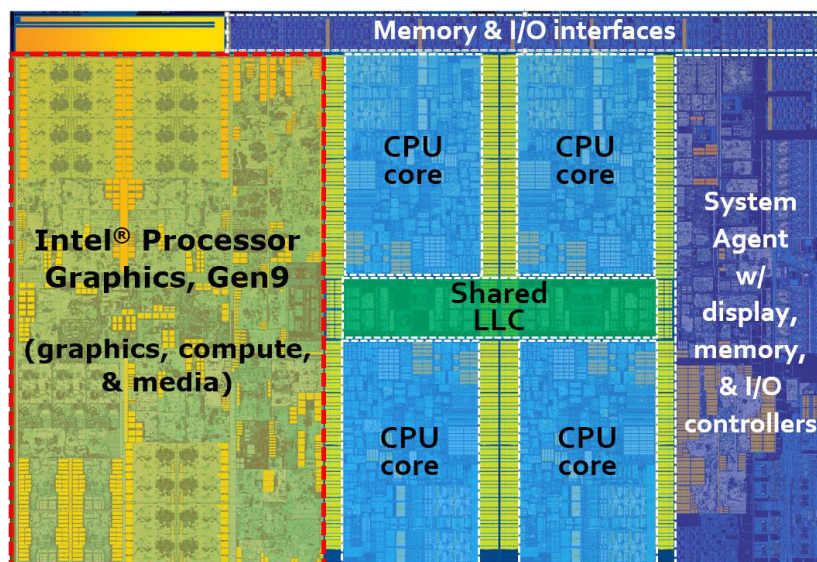
תיקשורת: עיבוד אותות, עיבוד תמונות, זרימת מידע (טלפונים סלולריים, כבלים, נתבים, טלויזיה, צגים)

אלקטרוניקה: חוקי חשמל, זרם, מתח, קיבול, השראה, אמינות (reliability)

דוגמה 2: מעבד Skylake: 4.5 מיליארד טרנזיסטורים, ובהערכה גסה בסביבות 20 מיליארד חוטי חשמל, בתוך אריזה שגודלה קטן מ-1 סמ"ר. על כל חוט מספר משוואות דיפרנציאליות (זרם, קיבול, התנגדות, השראה, חום, עמידות, השפעות סביבתיות). כיצד מתמודדים עם 20 מיליארד משוואות דיפרנציאליות מהסוג הבא?

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = V'(t)$$

C - קיבול, L - השראה, R - התנגדות, $I(t)$ - זרם בזמן t , $V(t)$ - מתח בזמן t .
זוהי מבלי לומר מילה על התלויות המסובכות ביניהם ... (כל חוט חשמלי במעבד עשוי להיות



איור 1.2: מעבד Skylake של חברת אינטל

מושפע על ידי החוטים השכנים (לו).

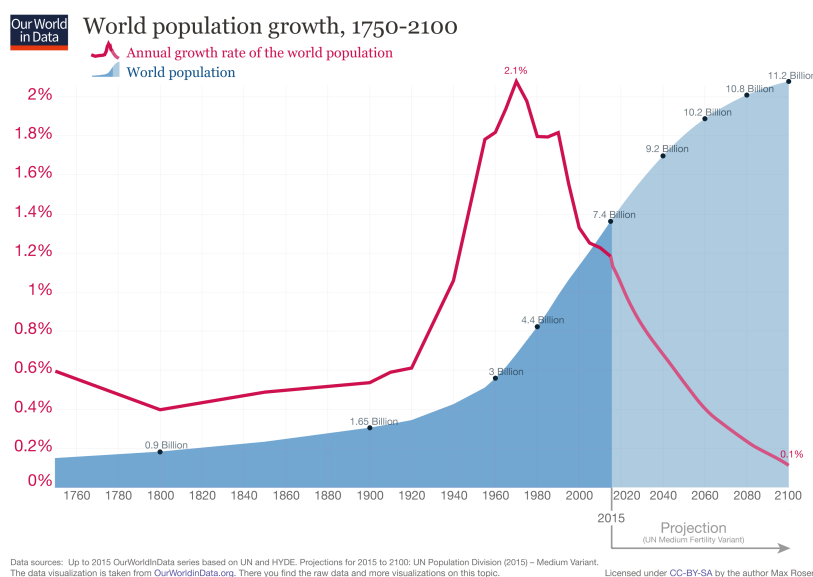
כלכלה: גידול אוכלוסיה, צמיחה, דעיכה, תימחור, אינפלציה, רמת תעסוקה ואבטלה, בנקאות, בורסה ומניות.

אקולוגיה: השפעות של שינויים אקולוגיים, גידול ודילול אוכלוסיות בעלי חיים, חיידקים, וירוסים, סוגי תאים. השפעות אקלימיות, מחלות ומגיפות, חיסונים, חיזוי מזג אוויר ושינויים אקלימיים.

זוהי רק רשימה חלקית. מידע נוסף ניתן לקבל בקלות על ידי הקלדת הנושא המבוקש בצירוף המילים "משוואה דיפרנציאלית" בחיפוש Google.

מודל מתימטי לחיזוי גודל אוכלוסיה

§1.2.1



איור 1.3: גידול אוכלוסיית העולם 1750-2100



❖ חיזוי גודל אוכלוסיה חשוב מאוד עבור תיכנון עתידי של תשתיות דיור, תחבורה, שרותי רפואה וכדומה. לכן חשוב מאוד לבנות מודל מתימטי שבאמצעותו ניתן לנבא (בקירוב טוב אם לא במדויק) את גודל האוכלוסיה בכל רגע בעתיד (לפחות הקרוב), ואם אפשר גם את פילוח האוכלוסיה לקבוצות גיל (בעייה קשה יותר).

❖ נניח שהאוכלוסיה שלנו מונה מיליון נפש, ובסוף שנת 2020 הלישכה המרכזית לסטטיסטיקה מדווחת על 21000 לידות ו-5000 מקרי מוות. בינתיים נתחיל עם מודל פשוט ולא מדויק.

❖ האם על סמך נתונים אלה נוכל למצוא פונקציה $P(t)$ שמנבאת את גודל האוכלוסיה בזמן t ? נניח כי t הוא מספר השנים החל מתחילת 2020.

❖ **שאלה 1:** מה יהיה גודל האוכלוסיה בשנת 2060?

❖ על פי הנתונים קצב הגידול של האוכלוסיה שלנו הוא

$$r = \frac{21000 - 5000}{1000000} = 0.016$$

ולכן נוסחה אפשרית לגודל האוכלוסיה בשנה n היא

$$P(n) = 1000000 \cdot (1 + r)^n$$

❖ התשובה לשאלה 1 היא לכן:

$$P(40) = 1000000 \cdot (1 + r)^{40} = 1886897.538427$$

כלומר, לאחר 40 שנה יחול גידול של קרוב ל-89% באוכלוסיה.

❖ **שאלה 2:** מה יהיה גודל האוכלוסיה לאחר חצי שנה? לאחר שליש שנה? רבע שנה? חודש? יום? שעה? ...

❖ הנוסחה הקודמת מניחה שגודל האוכלוסיה מתעדכן פעם בשנה בעוד שאנשים נולדים ומתים בכל רגע ורגע באופן רציף לאורך כל השנה. זה נקרא פתרון דיסקרטי בעוד שאנו מעוניינים בפתרון רציף שנותן תשובה לכל זמן t , כאשר t הוא מספר ממשי.

❖ משוואה שמתארת מודל יותר רציף היא

$$P(t + \Delta t) = P(t) + rP(t)\Delta t$$

או באופן שקול

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = rP(t)$$

מאחר ו- Δt עשוי להיות קטן כרצוננו, נקבל

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P'(t) = rP(t)$$



קיבלנו לכן משוואה דיפרנציאלית

$$P'(t) = rP(t)$$

הנגזרת של פונקציית האוכלוסיה $P'(t)$ היא אכן הביטוי הכי מדויק למהו **קצב גידול האוכלוסיה**

יותר מאוחר נוכיח כי הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$P(t) = Ke^{rt} \quad (*)$$

כאשר K הוא גודל האוכלוסיה בזמן $t = 0$:

$$P(0) = Ke^{r \cdot 0} = K = 1000000$$

קצב הגידול של האוכלוסיה שחישבנו קודם ($r = 0.016$) אינו מדויק כי הוא הניח מודל גידול דיסקרטי. את הקצב המדויק נוכל לחשב על ידי הצבת $t = 1$ בנוסחה (*):

$$P(1) = 1000000e^r = 1016000$$

ולכן

$$r = \ln \frac{1016000}{1000000} = 0.01587335$$

נוסחה זו מסתדרת היטב עם התשובה הקודמת לשאלה 1:

$$P(40) = 1000000e^{40r} = 1886897.538427$$

אבל עכשיו נוכל להשתמש בה גם עבור חישוב גידול אוכלוסיה לאחר חצי או רבע שנה

$$P(0.25) = 1000000e^{0.25r} = 1003976.221$$

תרגיל 1.1: שיעור הילודה בגרמניה בשנת 2014 היה 0.00842 ואילו שיעור התמותה היה 0.0129. מה צפוי לקרות לאוכלוסיית גרמניה בשנת 2050? (ומי אמור לממן את הפנסיות של המבוגרים?)

תרגיל 1.2: בהמשך לתרגיל הקודם: מתי אוכלוסיית גרמניה תגיע למחצית מגודלה בשנת 2014?

לאותה משוואה דיפרנציאלית נגיע גם בתופעות של דעיכה (התפרקות) של חומר רדיואקטיבי (מספר האטומים הרדיואקטיביים בזמן t) חישוב ריבית על הלוואות או פיקדונות בנקאיים, התפרקות של תרופה בגוף, וקצב של ריאקציה כימית (למשל ריאקציה כימית שמייצרת תרכובת C משני חומרים A, B).

תרגיל 1.3: לחומרים רדיואקטיביים יש נטיה להתפרק עקב אי-יציבות של אטומים



המכילים עודף נויטרונים בגרעין שנוטים לדחות אחד את השני. מספר האטומים שיתפרקו בכל רגע נתון פרופורציונאלי למספר של כל האטומים הכולל. אם $Q(t)$ היא כמות החומר הרדיואקטיבי בזמן t אז המשוואה הדיפרנציאלית היא

$$Q'(t) = rQ(t)$$

כאשר r הוא מקדם הדעיכה המתאים לסוג החומר הרדיואקטיבי. המונח "חצי-חיים" (half-life) מציין את פרק הזמן הדרוש להתפרקות חצי מהכמות המקורית של החומר הרדיואקטיבי. ידוע שבמקרה של החומר Carbon-14 תקופת חצי-החיים היא 5568 שנה. חשב את מקדם הדעיכה r .

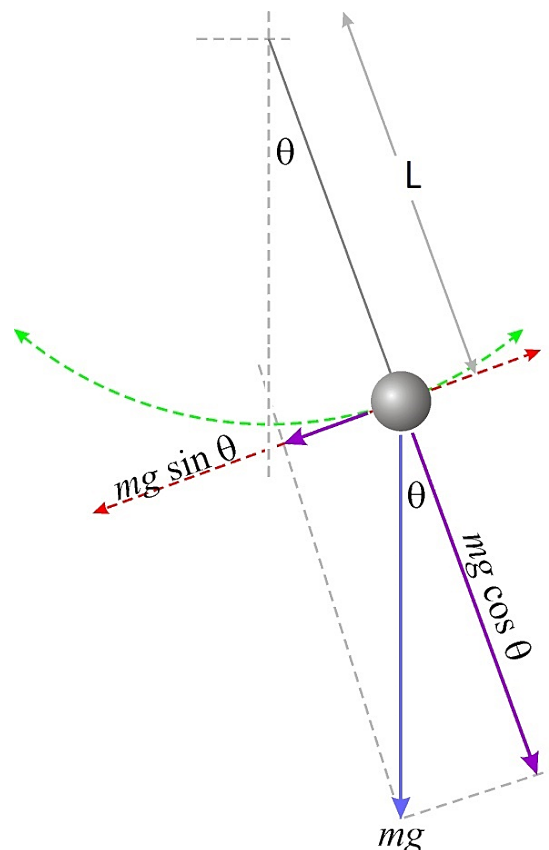
לקריאה נוספת על דעיכה רדיואקטיבית לחץ על הקישור הבא:

https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive_decay

Radioactive decay (also known as nuclear decay or radioactivity) is the process by which an unstable atomic nucleus loses energy (in terms of mass in its rest frame) by emitting radiation, such as an alpha particle, beta particle with neutrino or only a neutrino in the case of electron capture, gamma ray, or electron in the case of internal conversion. A material containing such unstable nuclei is considered radioactive. Certain highly excited short-lived nuclear states can decay through neutron emission, or more rarely, proton emission.

מודל מתימטי לתנועת מטוטלת פשוטה

§1.2.2



איור 1.4: מטוטלת פשוטה (קישור לויקיפדיה)

על משקולת כדורית שמסתה m פועלים בעיקרון שני כוחות

א. כוח הכבידה שגודלו mg

ב. כוח מתיחות השווה ל- $mg \cos \theta$ (מנטרל את כוח הכבידה)

ג. הכוח הפועל על m בכוון תנועת המטוטלת הוא $mg \sin \theta$

ד. בינתיים מתעלמים מכוח החיכוך באוויר שהוא זניח

נצא מההנחה המעשית כי הזווית θ היא זווית קטנה ולכן הקשת שעליה נעה המשקולת m קרובה מאוד לקו ישר.

נסמן על ידי $\theta(t)$ את גודל הזווית שבין החוט לניצב בזמן t .

נוסחת הדרך שעושה m היא לכן $L \cdot \theta(t)$, ולכן התאוצה של m היא $L\theta''(t)$.

על פי החוק השני של ניוטון

$$mL\theta''(t) = -mg \sin \theta$$

(יש לשים לב כי הכיוון החיובי של התנועה הוא משמאל לימין)

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית (מסדר 2)

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

בהנחה שהזווית θ קטנה, ההבדל בינה ובין $\sin \theta$ זניח, ולכן נוכל לפשט את המשוואה להיות ליניארית (קלה יותר לפתרון)

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \theta = 0$$

נלמד לפתור משוואות דיפרנציאליות ליניאריות בהמשך. כרגע נציין כי הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$\theta(t) = c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

נהוג לסמן $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. זהו הערך של **המחזור** (הזמן הדרוש להשלמת תנודה אחת). לכן הפתרון הכללי בצורה נוחה יותר הוא

$$\theta(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

זוהי משפחה דו-פרמטרית של אינסוף פתרונות שונים. אבל כמובן ניתן לבדוק ידנית שכל הפונקציות הללו פותרים את המשוואה על ידי הצבתם במשוואה.

שאלה: האם קיים קשר בין מספר הפרמטרים במשפחת הפתרונות לסדר המשוואה?

פינת התיכנות: לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת את התוצאות באמצעות שימוש בתוכנת

SymPy (Python):

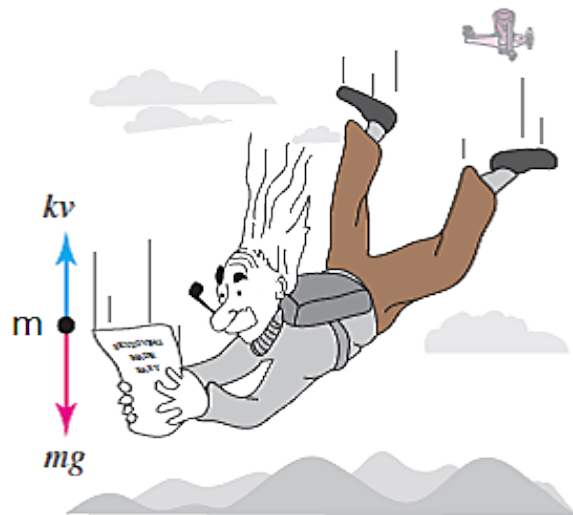
<http://live.sympy.org>

תיכנות מתימטי בשפת Python אינו חלק או דרישה בקורס אבל עשוי לסייע בהבנת החומר ובפתרון תרגילים.

```
from sympy import *
t, g, L = symbols("t g L", real=True, positive=True)
T = symbols("T", cls=Function)
de = Eq(T(t).diff(t,t) + g/L * T(t), 0)
dsolve(de, T(t))
>>> Eq(T(t), C1*sin(sqrt(g)*t/sqrt(L)) + C2*cos(sqrt(g)*t/sqrt(L)))
```

מודל מתימטי לנפילה חופשית עם חיכוך אווירי

§1.2.3



איור 1.5: נפילה חופשית עם חיכוך אווירי

- ❶ על גוף הנופל נפילה חופשית מגובה מסוים פועלים שני כוחות
 - א. כוח הכבידה הגורם לגוף לנוע לכיוון מרכז כדור הארץ
 - ב. כוח התנגדות אווירי (חיכוך) שפועל בכיוון מנוגד לכיוון הנפילה
- ❷ **הנחה:** עוצמת החיכוך נמצאת ביחס ישיר למהירות הגוף.
- ❸ כלומר: אם $y(t)$ היא פונקציית הדרך של הגוף הנופל, ואם $A(t)$ הוא גודלו של כוח החיכוך הפועל על הגוף בזמן t , אז

$$A(t) = -kv(t) = -ky'(t)$$

כאשר k הוא קבוע פיזיקאלי שעשוי להיות תלוי בסוג החומר, צורתו, ובצפיפות האוויר.



נציין כי הכיוון החיובי הוא כיוון הנפילה (כלפי מטה) ולכן התנגדות האוויר $A(t)$ פועלת בכיוון הפוך.

❖ הכוח הכולל הפועל על הגוף שמסתו m בזמן t הוא אם כן

$$F(t) = mg - ky'(t)$$

על פי החוק השני של ניוטון

$$F(t) = ma(t) = my''(t)$$

קיבלנו לכן משוואה דיפרנציאלית

$$(1.1) \quad my''(t) = mg - ky'(t)$$

אותה נלמד לפתור בהמשך.

❖ **תרגיל 1.4:** בהקשרים אחרים מקובלת יותר ההנחה שכוח החיכוך פרופורציונאלי לריבוע מהירות הגוף. מה תהיה המשוואה הדיפרנציאלית במקרה זה?

❖ **פינת התיכנות:** בינתיים ניתן לפתור את המשוואה (1.1) באמצעות שימוש בתוכנת **SymPy**:

<http://live.sympy.org>

```
from sympy import *
t, m, g, k = symbols("t m g k", real=True, positive=True)
y = symbols("y", cls=Function)
de = Eq(m*y(t).diff(t,t) - m*g + k*y(t).diff(t), 0)
dsolve(de, y(t))
>>> Eq(y(t), C1 + C2*exp(-k*t/m) + g*m*t/k)
```

תוכנת **SymPy** מציעה לנו אם כן את הפתרון הכללי הבא:

$$c_1 + c_2 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mgt}{k}$$

כצפוי, הפתרון הכללי הוא משפחה דו-פרמטרית של אינסוף פתרונות שונים. יש להצליב את התוצאה הזו עם התוצאה שנקבל בשיעור שיעסוק בפתרון משוואות ליניאריות לא הומוגניות. בהרבה מקרים ניתן ללמוד הרבה מהצלבות כאלה.



מהירות מילוט של לוויין משדה הכבידה

§1.2.4



איור 1.6: שיא הודי: שיגור של 104 לווינים באמצעות טיל יחיד

- מהירות מילוט היא המהירות ההתחלתית המינימלית הדרושה בכדי להשתחרר משדה הכבידה של כדור הארץ בכדי להיכנס למסלול קבוע סביבו (או לברוח לחלל החיצון).
- מסתבר שמהירות זו אינה תלויה במסת הגוף הנמלט אלא רק במסת הגוף המושך בלבד (כדור הארץ במקרה שלנו). מהירות המילוט עבור גוף על פני כדור הארץ היא 11.186 km/s . לתוצאה זו עלינו להגיע על ידי פתרון משוואה דיפרנציאלית כמובן.

➤ הנחות

- א. לגוף מבנה אירו-דינמי שממזער את השפעות החיכוך האווירי
- ב. תנועת הגוף בכוון ניצב לפני כדור הארץ
- ג. תנאי מזג אוויר נוחים

➤ סימונים

M ← מסת כדור הארץ

R ← רדיוס כדור הארץ

G ← קבוע הגרביטציה האוניברסלי:

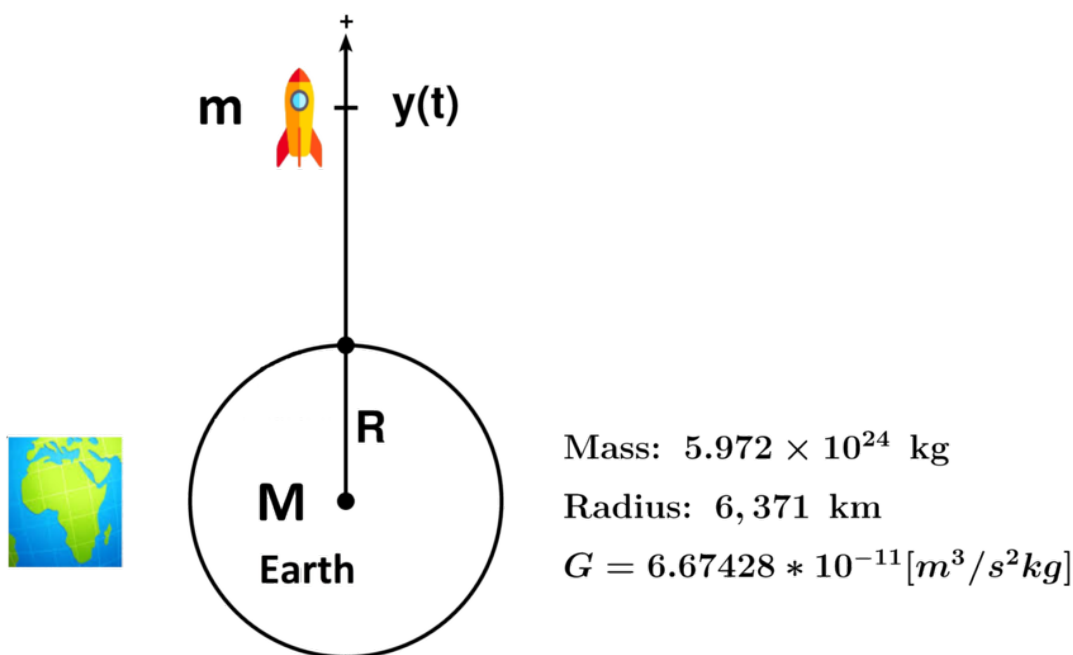
$$G = 6.67428 * 10^{-11} [m^3/s^2 kg]$$

m ← מסת הלוויין הנמלט

$y(t)$ ← המרחק בין מרכז כדור הארץ והלוויין בזמן t

$v(t)$ ← מהירות הלוויין בזמן t ($v(t) = y'(t)$)





איור 1.7

כוח הגרביטציה הפועל על גוף שמסתו m הנמצא במרחק $y(t)$ ממרכז כדור הארץ נתון על ידי הנוסחה

$$F(t) = -\frac{GMm}{y(t)^2}$$

(כיוון התנועה החיובי הוא מעלה בעוד כוח הכבידה פועל כלפי מטה!)

על פי החוק השני של ניוטון

$$F(t) = m \cdot a(t) = my''(t) = -\frac{GMm}{y(t)^2}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר 2

$$y''(t) = -\frac{GM}{y(t)^2}$$

יש לשים לב לכך שהמשוואה אינה תלויה במסת הלוויין m !

למשוואה זו יש לצרף שני תנאי התחלה

$$\begin{cases} y'' = -\frac{GM}{y^2} \\ y(0) = R \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

כאשר R הוא רדיוס כדור הארץ (המיקום ההתחלתי של הלוויין), ו- v_0 המהירות ההתחלתית של הלוויין אשר אמורה להבטיח את המילוט שלו מכוח הכבידה.

שאלה: האם יש קשר בין סדר המשוואה למספר תנאי ההתחלה?

המפתח לפתרון המשוואה הוא השוויון הבא שמאפשר לנו להוריד את סדר המשוואה מ-2 ל-1 (בהמשך נלמד טכניקות דומות להורדת סדר משוואה).

בשלב זה ניתן לדלג על פתרון המשוואה (נחזור אליו בעוד מספר שיעורים לאחר צבירת נסיון וידע נוסף)

$$y''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

שמוביל למשוואה דיפרנציאלית חדשה של פונקציית המהירות $v(y)$ (מהירות כפונקצייה של דרך!)

$$vv'(y) = -\frac{GM}{y^2}$$

שמוביל לפתרון כללי

$$v(y)^2 = \frac{2GM}{y} + C$$

הצבת $y = R$ תיתן

$$v(R)^2 = v_0^2 = \frac{2GM}{R} + C$$

ולכן ניתן לחלץ את C

$$C = v_0^2 - \frac{2GM}{R}$$

קיבלנו פתרון פרטי התלוי במהירות ההתחלתית v_0 בלבד

$$v^2 = \frac{2GM}{y} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}$$

בכדי להבטיח מהירות מילוט, יש להבטיח כי $v(y) \geq 0$ עבור כל y !

הביטוי $\frac{2GM}{y}$ הוא גודל חיובי השואף לאפס כאשר y שואף לאינסוף, לכן מספיק להבטיח כי

$$v_0^2 \geq \frac{2GM}{R}$$

הצבת הקבועים הפיזיקאליים הידועים G, M, R , מובילה לפתרון

$$v_0 \geq 11.186 [km/s]$$

מסקנה: בכדי להבטיח מילוט משדה הכבידה יש לשלוח את הלוויין במהירות התחלתית של לפחות 11.186 קילומטר לשנייה.

בינתיים אפשר להתעלם מהפתרון (שככל הנראה לא יובן בשיעור הראשון). נחזור לדוגמא זו כשנגיע לנושא של הורדת סדר (אם אשכת, נא להזכיר לי!).

חשוב החזר חודשי קבוע של הלוואת משכנתא

§1.2.5



איור 1.8

נניח שלקחנו משכנתא במיליון ש"ח בריבית של 4.2% למשך 20 שנה. מהו ההחזר החודשי הקבוע? ומהו הסכום הכולל שנחזיר לבנק בתום תקופת ההלוואה?

בינתיים אנו מתעלמים מהשפעות המדד על גודל ההחזר החודשי ומהוצאות שוליות נוספות (עמלות, דמי ניהול, וכדומה)

סימונים:

t משתנה הזמן (ביחידות של שנים)

$M(t)$ גודל ההלוואה בזמן t

r גודל הריבית כמספר ממשי בקטע $[0, 1]$ (בדוגמא הנוכחית $r = 0.042$)

P גודל ההחזר הקבוע ליחידת זמן (שנתי במקרה שלנו)

n אורך חיי המשכנתא (שנים)

הנחת העבודה שלנו היא שהריבית והחזר ההלוואה מתבצעים באופן רציף (למרות שבדרך כלל הריבית מחושבת חודשית, וגם ההחזר הוא חודשי). אי-הדיוק הנובע מכך הוא זניח (לפחות ביחס לנזק המצטבר).

בקטע הזמן העובר מ- t ל- $t + \Delta t$, יש להחסיר את ההחזר הקבוע $P \cdot \Delta t$, ולהוסיף את הריבית לתקופה Δt

$$M(t + \Delta t) = [M(t) - P\Delta t] + [M(t) - P\Delta t] \cdot r \cdot \Delta t$$

למשל, אם $\Delta t = \frac{1}{12}$ (תשלום חודשי), אז

$$M\left(t + \frac{1}{12}\right) = \left[M(t) - \frac{P}{12}\right] + \left[M(t) - \frac{P}{12}\right] \cdot \frac{r}{12}$$



לכן

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = r[M(t) - P\Delta t] - P$$

אם נשאיף את Δt לאפס נקבל משוואה דיפרנציאלית

$$M'(t) = r \cdot M(t) - P$$

שנלמד לפתור בשיעור הבא.

❶ בינתיים נציג את הפתרון הכללי ללא הוכחה:

$$M(t) = Ce^{rt} + \frac{P}{r}$$

בכדי למצוא את הפתרון הפרטי עבור הבעייה הספציפית שלנו, נשתמש בנתונים

$$r = 0.042, \quad M(0) = 1000000, \quad n = 20$$

נציב בפתרון הכללי $t = 0$ ו- $t = 20$

$$\begin{cases} M(0) = C + \frac{P}{r} = 1000000 \\ M(20) = Ce^{20r} + \frac{P}{r} = 0 \end{cases}$$

על ידי החסרת שני השוויונים נקבל מייד כי

$$C = \frac{M(0)}{1 - e^{20r}}$$

ועל ידי הצבת C בשוויון השני נקבל

$$P = \frac{rM(0)e^{20r}}{e^{20r} - 1}$$

במקרה הספציפי שלנו נקבל

$$P = \frac{0.042 \cdot 10^6 \cdot e^{20 \cdot 0.042}}{e^{20 \cdot 0.042} - 1} = 73905.996$$

זהו ההחזר הקבוע עבור כל שנה. בחישוב חודשי זה יוצא: 6158.833.

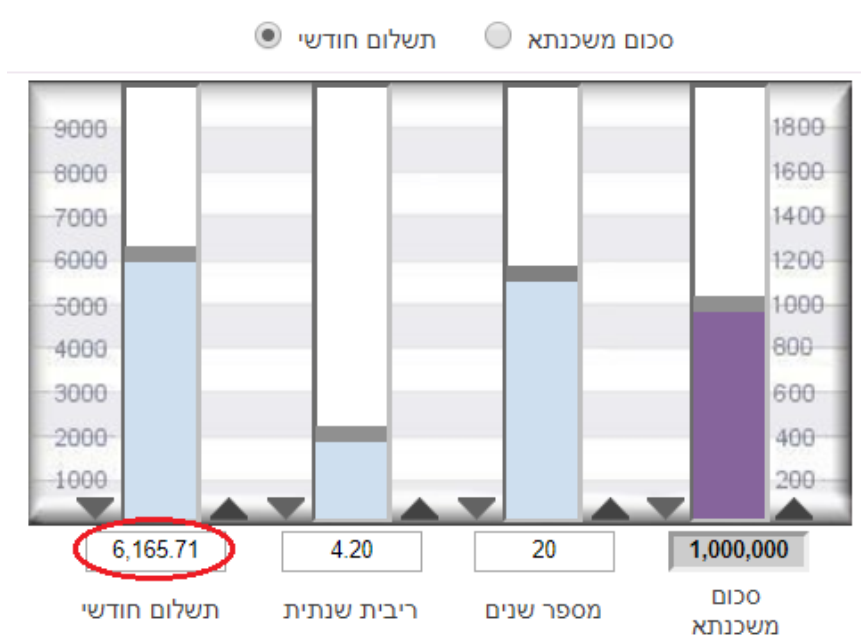
❷ ההחזר הכולל לבנק יוצא

$$20 \cdot 73905.996 = 1478119.927$$

כלומר הבנק הרויח כ-48% על השקעת כספים שאינם שלו ... (וזה עדיין ללא הצמדה למדד, עמלות, וביטוחים למיניהם)

❸ הפתרון שלנו לא כל כך רחוק מהתוצאה שנותן מחשבון המשכנתא של בנק לאומי, וככל הנראה מקור ההבדל הוא במודל הדיסקרטי (שפועל לרעת הלווה?) והמודל הרציף





איור 1.9: מחשבון המשכנתא של בנק לאומי

המחשבון של בנק טפחות נותן תוצאה דומה (ככל הנראה מעוגלת לשקלים)

חשב לפי: ☒ סכום המשכנתא (ש"ח) ☐ החזר חודשי (ש"ח)

בחר שיטת החזר: ☒ החזר קבוע (לוח שפיצר) ☐ קרן שווה ☐ בלון מלא

סכום המשכנתא (ש"ח): 1,000,000

תקופה בשנים: 20

ריבית שנתית (%): 4.2

החזר חודשי (ש"ח): 6,166

חשב

6,166

איור 1.10: מחשבון המשכנתא של בנק טפחות

נוכל להשתמש בנוסחאות שקיבלנו בכדי ליצור טבלאות תשלומים או גרפים

תרגיל 1.5: ברוך מהמכולת השכונתית נכנס לסניף הבנק שלו והעלה רעיון של משכנתא

שבה גודל ההחזר השנתי (או החודשי) הולך וקטן בקצב של 5% בשנה. למשל, אם גודל התשלום בשנה הראשונה הוא 100,000 ש"ח, אז התשלום עבור השנה השניה יהיה 95,000, ובשנה ה-20 התשלום יגיע ל-

$$100000 \cdot (0.95)^{19} = 35,848.59$$

אם הנתונים הם כמו בתרגיל הקודם, מה תהיה הפעם המשוואה הדיפרנציאלית? מהי טבלת התשלומים השנתית? ומה יהיה ההחזר הכולל לבנק בתום תקופת ההלוואה?

בהרצאותיו של פרופסור חגי כתריאל (ראה קישור בתחילת הפרק), חגי מביא את הציטוטים הבאים שבהם התלמידים מתבקשים לחוות את דעתם בנוגע לקיטעי העיתונות הבאים

טבלה 1.1: טבלת החזרים לשנים 2020-2040

Year	Payment	Mortgage
2020	73906.00	1000000.00
2021	73906.00	967414.50
2022	73906.00	933431.26
2023	73906.00	897990.32
2024	73906.00	861029.17
2025	73906.00	822482.59
2026	73906.00	782282.57
2027	73906.00	740358.19
2028	73906.00	696635.49
2029	73906.00	651037.32
2030	73906.00	603483.25
2031	73906.00	553889.37
2032	73906.00	502168.18
2033	73906.00	448228.45
2034	73906.00	391974.99
2035	73906.00	333308.57
2036	73906.00	272125.69
2037	73906.00	208318.40
2038	73906.00	141774.13
2039	73906.00	72375.47
2040	73906.00	0.00

מתוך הכתבה "נוסחת חישוב ריבית המשכנתא שלנו מגיעה לבית המשפט" מאת דרור מרמור,

גלובס, 6.1.15

<http://www.globes.co.il/news/article.aspx?did=1000998054>

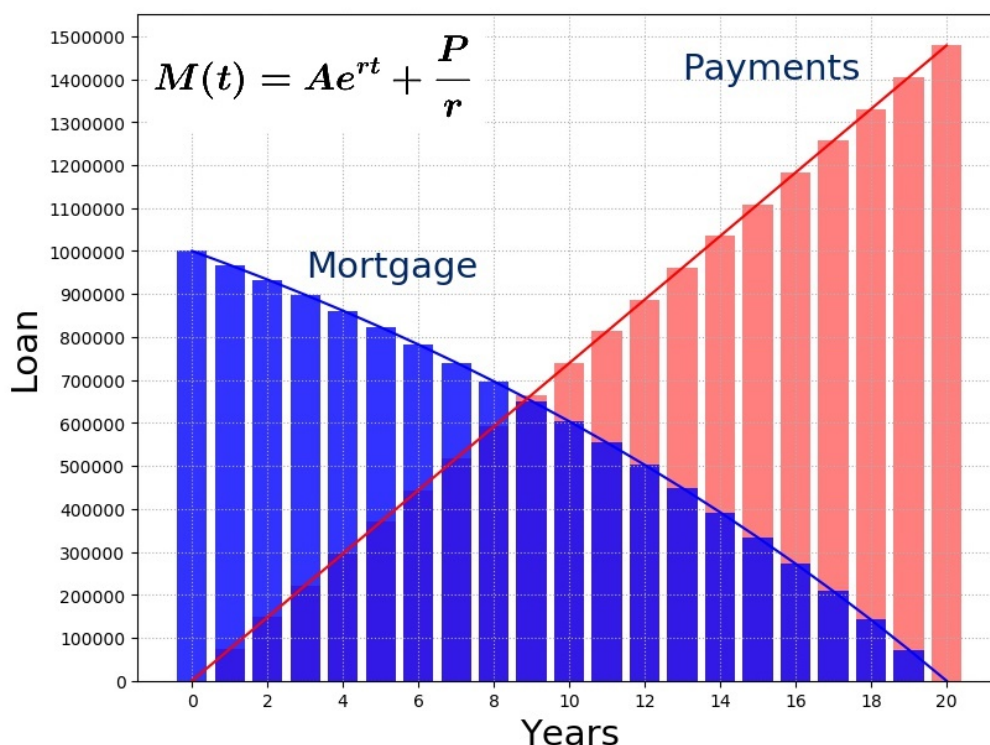
"הדרך שבה נוהגים הבנקים אינה נכונה מבחינה מתמטית, אינה נכונה מבחינה כלכלית ואינה עולה בקנה אחד עם הוראות החוק. כתוצאה מכך גובים הבנקים מהלווים ריבית גבוהה מן המותר לפי הסכמי ההלוואה. את הפצצה הזו הטיל לאחרונה פרופ' ירון זליכה, לשעבר החשב הכללי של המדינה, בחוות-דעת שנמסרה לבית משפט בבקשה לאשר תביעה ייצוגית נגד הבנקים על גביית יתר בהלוואות משכנתא.

...

בבסיס הטענה עומדת העובדה שבהסכמי ההלוואה נקבעה במפורש ריבית חוזית (נקראת גם ריבית תעריפית או ריבית נומינלית) שנתית - ולא חודשית. כך לדוגמה, המשמעות של ריבית חוזית שנתית בשיעור של 6% על הלוואה של 100 אלף שקל, היא כי הלוואה שתפרע בתשלום אחד בתום שנה תישא ריבית בסך 6,000 שקל.

מוקד הוויכוח הוא בחישוב החודשי. לטענת הבנקים, ריבית שנתית של 6% שווה לריבית חודשית של 0.5% - בחישוב פשוט של 6 חלקי 12 חודשים. "

"זו טעות והטעיה גם יחד", כותב זליכה. "ריבית שנתית וריבית חודשית הן שני דברים שונים בתכלית, אשר ההבדל ביניהן יסתכם בגובה תשלום סכום הריבית שיתבקש הלקוח לשלם. לכן, לא ניתן לקבוע בהסכם ריבית שנתית ולדרוש ריבית חודשית בשיעור השווה ל-1/12 מהריבית השנתית". על-פי החישוב של זליכה, בהינתן הדוגמה שהבאנו פה, ריבית שנתית חוזית של 6% שווה לריבית חודשית



איור 1.11: דיאגרמת עמודות עבור גודל המשכנתא וגודל ההחזר בשנים

בשיעור 0.487%, "בעוד שהיתרה העודפת מגלמת בפועל חיוב בריבית דריבית".

ביהמש דחה את הבקשה בהיעדר עילה וקבע כי תכנית שאפתנית להביא לתיקון באופן חישוב הריבית בכלל המוסדות הפיננסים צריכה להבהיר כי הפרקטיקה הנוהגת היא שגויה, וכי העובדה ששיטה מסוימת מתקבלת יותר על דעתם של המבקשים אין בה כדי להקנות לה משקל יתר אל מול שיטת החישוב של הבנקים, העולה בקנה אחד עם החוק ועם עמדת הרגולטור

🔴 **בקשתו של פרופסור ירון זליכה נדחתה על ידי בית המשפט כפי שמתואר בפסק הדין הבא:**

<http://www.takdin.co.il/Pages/article.aspx?artId=5084389>

בית המשפט המחוזי דחה בקשה לאישור תביעה ייצוגית נגד הבנקים מזרחי טפחות, לאומי למשכנתאות והפועלים, בטענה לטעות בחישוב הריבית על הלואאות הדיור שהם גובים. השופטת אסתר שטמר קבעה כי תכנית שאפתנית להביא לתיקון באופן חישוב הריבית בכלל המוסדות הפיננסים צריכה להבהיר כי הפרקטיקה הנוהגת היא שגויה, אולם המבקשים לא עמדו בנטל זה והחישוב כדרך הבנקים עולה בקנה אחד עם החוק ועם עמדת הרגולטור.

מיון של המשוואות הדיפרנציאליות

§1.3

המיון הראשוני של המשוואות הדיפרנציאליות מתבצע על פי סדר הנגזרת הכי גבוה שמופיע במשוואה.

אם סדר הגזירה הגבוה הוא n , אז המשוואה נקראת **משוואה דיפרנציאלית מסדר n** . בדרך כלל ככל שסדר המשוואה עולה, כך גם הקושי לפתור אותה עולה, ולכן המיון הראשוני הזה נדרש.

במשוואה דיפרנציאלית מעורבת לפחות נגזרת אחת של פונקציה לא ידועה שבדרך כלל נסמן על ידי $y(x)$ (או על ידי $y(t)$). הסימן y מסמן שני דברים בהקשרים שונים: שם הפונקציה כללית (נעלם), וגם את המשתנה התלוי y .

הצורה הכללית של משוואה דיפרנציאלית מסדר n מוצגת על ידי

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

בהקשרים מסוימים מותירים קבוע באגף ימין

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = C$$

צורה כללית זו נקראת גם "צורה סתומה" (implicit form).

בקורסים יסודיים בנושא מקובל להצטמצם לצורה הנורמלית (normal form) שבה ניתן לחלץ את הנגזרת הכי גבוהה כפונקציה של כל שאר הנגזרות ו- x

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

לכן הצורה הנורמלית הכללית של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון שנעסוק בה בקורס היא

$$y' = f(x, y)$$

דוגמאות למשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון בצורה נורמלית

א. $y' = xy^2$

ב. $y' = \frac{xy}{3 + x \sin xy}$

ג. $y' = y^3$

תרגיל 1.6: מצא את הסדר של כל אחת מהמשוואות הבאות והבא אותן לצורה נורמלית אם ניתן:

א. $f'(x) = 2x$



$$f'(x) = f(x)^5 \quad \text{ב.}$$

$$y'' - (y')^7 + x^2 = 5y \quad \text{ג.}$$

$$f''(x)^4 + f'(x)^2 + 1 = \ln f''(x) \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y'}{1 + y^8 y''} = xy^5 \quad \text{ה.}$$

$$5xy' - y \sin x - x^8 y''' = 3e^x \quad \text{ו.}$$

המיון השני של משוואות דיפרנציאליות מתבצע על פי האיפיון האלגברי שלה. הצורה האלגברית הכי פשוטה היא הצורה הליניארית:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

או בצורה שקולה

$$(1.2) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

משוואה שצורתה (1.2) נקראת **משוואה ליניארית מסדר n**

דוגמה 3: המשוואה

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

היא משוואה ליניארית מסדר 2.

דוגמה 4: המשוואה

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$$

אינה ליניארית!

מהו פתרון של משוואה דיפרנציאלית?

§1.4

הדבר השני שעלינו להגדיר הוא מהו פתרון של משוואה דיפרנציאלית? נתייחס לצורה המפורשת

$$(1.3) \quad y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

פונקציה $\varphi(x)$ נקראת **פתרון של המשוואה (1.3) בקטע (α, β)** אם לכל נקודה x בקטע (α, β) הפונקציה $\varphi(x)$ גזירה n פעמים ומקיימת את השוויון

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

נדגיש כי מדובר בקטע פתוח, וקצות הקטע עשויים להיות $\pm\infty$.

❖ **דוגמה 5:** הפונקציה $\varphi(x) = x^2 \ln x$ היא פתרון של המשוואה

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

בקטע $(0, \infty)$. ניתן לבדוק זאת פשוט על ידי הצבה

❖ **דוגמה 6:** הפונקציות $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$ הן פתרונות של המשוואה

$$y'' + y = 0$$

על כל הישר הממשי $(-\infty, \infty)$. למעשה, כל צירוף ליניארי של $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ פותר את המשוואה

$$\varphi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

קל לבדוק זאת על ידי הצבה. מצאנו אם כן אינסוף פתרונות שונים של המשוואה. קבוצת פתרונות כזו נקראת גם **משפחה דו-פרמטרית של אינסוף פתרונות**.

❖ בהינתן משוואה דיפרנציאלית

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

נרצה לענות על השאלות הבאות

א. האם קיים פתרון כלשהו למשוואה?

ב. אם כן, כמה פתרונות קיימים?

ג. כיצד למצוא את כל הפתרונות?

ד. במידה וקיימים אינסוף פתרונות כיצד נציג את כולם בצורה מינימלית?

❖ פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית רגילה הוא לרוב ביטוי מהצורה

$$(1.4) \quad F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

א. כאשר $c_1, c_2, \dots, c_n$, פרמטרים חופשיים.

ב. לכל בחירה שרירותית של $c_1, c_2, \dots, c_n$, מתאים פתרון ספציפי של המשוואה. הביטוי (1.4) מגדיר למעשה **משפחה n-פרמטרית** של אינסוף פתרונות.

ג. במרבית המקרים הביטוי המתקבל הוא בצורה "סתומה" ונדרש מאמץ נוסף בכדי להעביר אותו לצורה "מפורשת":

$$y(x) = G(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

משפט הפונקציה הסתומה מחדו"א 2 מבטיח קיום ויחידות של פתרון מפורש בתחום הגדרה מסוים אך לא תמיד אפשר לחלץ אותו (רוב הבעיות האלגבריות עדיין אינן

פתירות). במקרים כאלה נאלץ להסתפק בפתרונות סתומים בלבד ולהשתמש בשיטות נומריות ואחרות בכדי לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות רצויות, לגזור אותה, לשרטט אותה וכדומה.

ד. נציין שמשפחת הפתרונות (1.4) עשויה "לפספס" חלק מהפתרונות, ובמקרים מסוימים יידרשו שתי משפחות כאלה (או יותר) בכדי לבטא את כל הפתרונות למשוואה.

❶ **דוגמה 7:** פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר 2, עשוי להיראות כך

$$\sin(3x + c_1 y) + y^2 e^{c_2 x} \cos(2x + y) = 1$$

לא נראה שניתן לחלץ פתרון מפורש (לפחות לא על פי השיטות המוכרות לנו בשלב זה).

תרגילים לפרק 1

1. מהו הסדר של כל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות?

א. $f''(x) - [f'(x)]^3 + x^2 = 5f(x)$

ב. $f''(x)^4 + f'(x)^2 + 1 = 0$

ג. $y''' + 5xy' - y \sin x = 3e^x$

ד. $t^3 y'''(t) - t^2 y''(t) + t y'(t) - 2y(t) = 1 + \ln t$

ה. $\frac{y'}{1 + yy''} = xy^3$

2. לגבי כל משוואה דיפרנציאלית, קבע האם היא ליניארית?

א. $y''' + 2x = y$

ב. $y'' + 2y = \frac{1}{y} + \pi$

ג. $(x + y')^2 = (x - y')^2 + 1$

ד. $\sqrt{xy''} - (1 + x)y' + y \sin x = e^x$

3. הוכח כי $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$ פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $yy' = x$ על כל הישר הממשי

4. הוכח כי $y(x) = xe^{-x}$ פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'' + 2y' + y = 0$$

האם יש פתרונות נוספים? (נסה לכפול את הפתרון הקודם).



5. מצא פתרון כללי של המשוואות הדיפרנציאליות הבאות

א. $y' = 5$

ב. $-\infty < x < \infty, y' = 6x^2 + 1$

ג. $0 < x < \infty, \frac{y'}{x} = \frac{2}{x^2 + 1}$

ד. $(y')^2 = 8y' - 15$

ה. $-1 < x < 1, \frac{y'}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$

ו. $y'' = 1 + \sqrt{y''}$

6. פתור בעיית התחלה

$$\begin{cases} y'' = 6x + 12 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} y' = 6x^2 + 1 \\ y(3) = 1 \end{cases} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{cases} (y')^2 = 8y' - 15 \\ y(2) = 10 \end{cases} \quad \text{ט.}$$

בסעיף האחרון, וודא שקיבלת שני פתרונות שונים!



פרק 2

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון

הצורה הכללית של משוואה ליניארית מסדר ראשון היא

$$(2.1) \quad a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$

או בצורתה הנורמלית

$$(2.2) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

הנחת עבודה: $a(x)$, $b(x)$ פונקציות רציפות בקטע פתוח (α, β) .

המשוואה הליניארית הכי פשוטה היא

$$y' = g(x)$$

ופתרונה הכללי הוא

$$y(x) = \int g(x)dx + C$$

היסטוריה: נובמבר 7, 1675, לייבניץ רושם בפעם הראשונה את סימן האינטגרל: $\int y dy = \frac{y^2}{2}$

לפני שניגש לפתרון הכללי של משוואה (2.2), נדגים את הרעיון של הפתרון על ידי דוגמא

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x$$

לאחר הכפלת שני האגפים ב־ x נקבל

$$xy' + y = 3x^2$$

אגף שמאל מזכיר לנו את כלל הגזירה של מכפלת שתי פונקציות מהקורס חדו"א 1

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

במקרה שלנו: $u(x) = x$, $v(x) = y(x)$

$$[xy]' = y + xy' = 3x^2$$

ולכן

$$xy = x^3 + C$$

קיבלנו פתרון כללי (משפחה חד-פרמטרית של אינסוף פתרונות) למשוואה שלנו:

$$y(x) = x^2 + \frac{C}{x}$$

בשלב זה לא ברור אם יש למשוואה שלנו פתרונות נוספים שאינם נכללים במשפחה הזו.

שיטת גורם האינטגרציה

§2.1

הדוגמא הקודמת משרטטת את דרך הפעולה לפתרון הכללי של משוואה (2.2): נחפש פונקציה $\mu(x)$ בעלת התכונה הבאה:

$$(2.3) \quad [\mu(x)y]' = \mu(x)[y' + a(y)y]$$

פונקציה $\mu(x)$ שמקיימת את השוויון האחרון נקראת **גורם אינטגרציה** של המשוואה (2.2).

אם נצליח למצוא לפחות גורם אינטגרציה אחד (כמובן אחד יספיק לנו) אז המשוואה (2.2) תהפוך ל-

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)b(x)$$

שהיא פתירה בקלות.

נמשיך לפתח את שוויון (2.3),

$$\mu'(x)y + \mu(x)y' = \mu(x)y' + \mu(x)a(x)y$$

ולכן

$$\mu'(x)y = \mu(x)a(x)y$$

ולכן

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = a(x)$$

בכדי להמשיך את החיפוש נוסיף הנחת עבודה: $\mu(x) > 0$ בתחום (α, β) .

כאמור: מטרתנו למצוא את אחד מגורמי האינטגרציה ולא את כולם! לכן אם נצליח למצוא גורם כזה למרות הנחות העבודה המצמצמות בעייתנו תיפתר.

❖ תחת הנחת העבודה שגורם האינטגרציה שלנו חיובי בקטע העבודה (α, β) , נוכל לרשום

$$[\ln \mu(x)]' = a(x)$$

ולכן גורם האינטגרציה שלנו הוא

$$\mu(x) = e^{\int a(x) dx}$$

(שוב, לביטוי $\int a(x) dx$ יש אינסוף פתרונות אבל אחד מהם יספיק עבורנו)

❖ מהשוויון

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)b(x)$$

נובע כי

$$\mu(x)y = \int \mu(x)b(x) dx + C$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הליניארית מסדר ראשון (2.2) הוא

$$(2.4) \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C \right]$$

כל הפתרונות מוגדרים בקטע (α, β) מאחר והפונקציות $a(x)$, $b(x)$ רציפות בקטע, ובנוסף $\mu(x) > 0$ בכל הקטע. ■

❖ שאלה: האם זהו באמת הפתרון הכללי? האם ייתכן שקיימים פתרונות נוספים שלא נכללים בו שאולי ניתן להגיע אליהם באמצעות שיטות אחרות? נוכיח בהמשך שאכן הפתרון שמצאנו כללי, אך בהחלט קיימים משוואות דיפרנציאליות שבהן לשאלה זו אין תשובה, אך למרות זאת מציאת משפחה אינסופית של פתרונות היא בכל זאת משהו שאין להקל בו ראש.

❖ **דוגמה 1:** מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$xy' + y = x^3$$

פתרון: נעבור לצורה נורמלית

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

לכן $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x^2$, גורם האינטגרציה הוא

$$\mu(x) = e^{\int a(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C \right] \\
 &= \frac{1}{x} \left[\int x^3 dx + C \right] \\
 &= \frac{1}{x} \left[\frac{x^4}{4} + C \right] = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}
 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

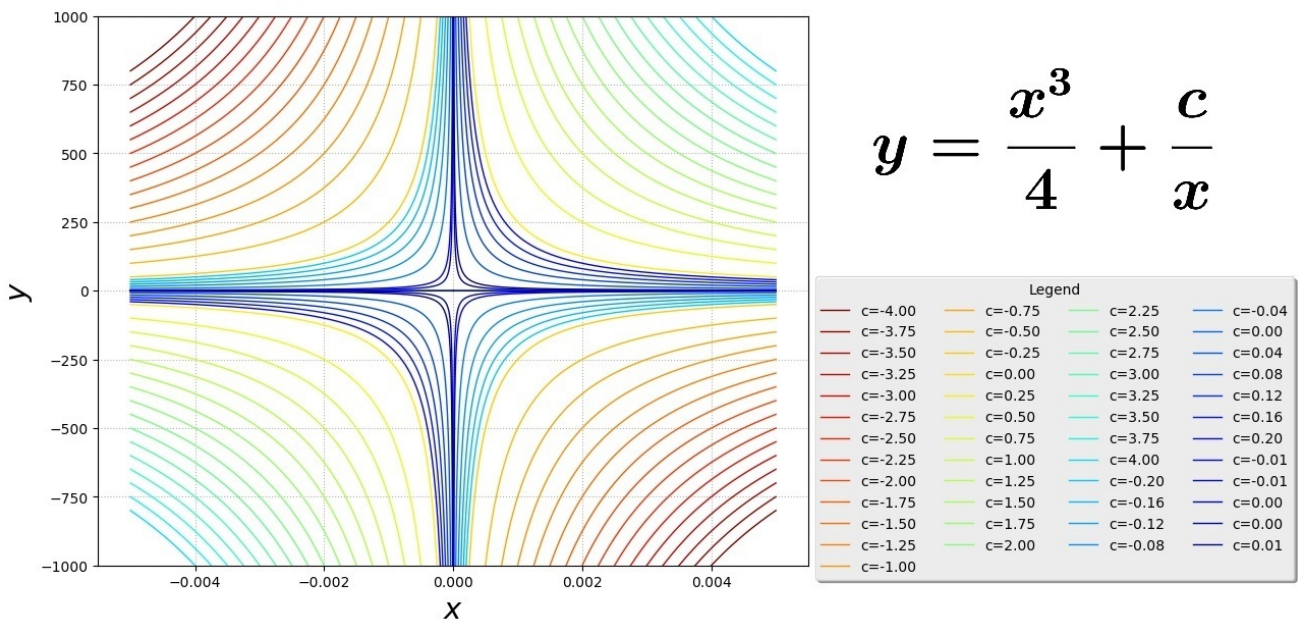
❶ מומלץ לבדוק כי הפתרון הכללי שהתקבל, אכן פותר את המשוואה על ידי הצבה פשוטה (במיוחד בבחינות).

$$y'(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{C}{x^2}$$

לכן

$$xy' + y = \left(\frac{3x^3}{4} - \frac{C}{x} \right) + \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x} = x^3$$

להלן תרשים גרפי של משפחת הפתרונות שקיבלנו

איור 2.1: משפחת הפתרונות של המשוואה $xy' + y = x^3$

❷ שאלה: מהו תחום הקיום של הפתרון הכללי?

❸ יש לשים לב לפרטים הבאים שיתבררו יותר בהמשך, כשנגיע למשפט הקיום והיחידות

א. דרך כל נקודה במישור (בתחום הקיום של המשוואה) עובר פתרון אחד

ב. כל שני פתרונות שונים אינם נפגשים בשום נקודה

ג. משפחת הפתרונות מכסה את כל המישור (פרט לנקודות שבהן המשוואה לא קיימת)

דוגמה 2: מצא פתרון פרטי עבור בעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{cases} xy' + 2y = \sin x, & (0 < x < \infty) \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

פתרון: נתחיל במציאת הפתרון הכללי של המשוואה ורק לאחר מכן ננסה למצוא את הפתרון הפרטי. צורה נורמלית

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

לכן $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = \frac{\sin x}{x}$, וגורם האינטגרציה הוא

$$\mu(x) = e^{\int a(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$$

נציב בנוסחת הפתרון הכללי (2.4)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \left[\int x \sin x dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2} [-x \cos x + \sin x + C] = \frac{1}{x^2} [\sin x - x \cos x + C] \end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x^2}$$

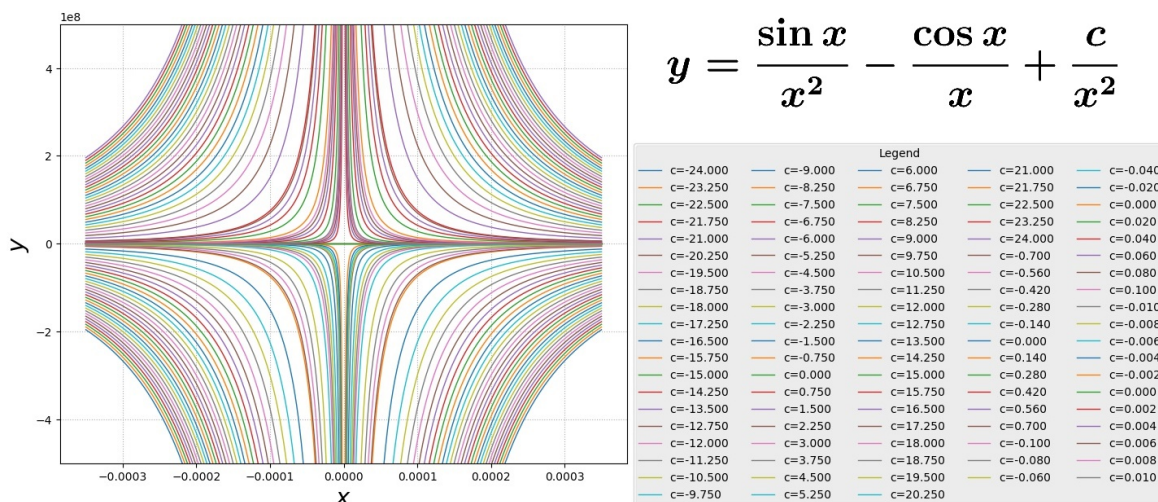
פתרון פרטי:

$$y(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi^2} - \frac{\cos \pi}{\pi} + \frac{C}{\pi^2} = 0 - \frac{-1}{\pi} + \frac{C}{\pi^2} = 0$$

לכן $C = -\pi$, ולכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\pi}{x^2}$$

להלן תרשים גרפי של משפחת הפתרונות שקיבלנו



איור 2.2: משפחת הפתרונות של המשוואה $xy' + 2y = \sin x$

משפט הקיום והיחידות עבור משוואה ליניארית מסדר ראשון

§2.2

משפט 2.1: נתונה משוואה ליניארית מסדר ראשון עם תנאי התחלה

$$(2.5) \quad \begin{cases} y' + a(x)y = b(x), & (\alpha < x < \beta) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר

א. $a(x)$, $b(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β) ב. $\alpha < x_0 < \beta$ אזי קיימת פונקציה אחת ויחידה $y(x)$ שפותרת את המשוואה בתחום (α, β) ובנוסף $y(x_0) = y_0$.**הוכחה:** את קיומו של פתרון כללי כבר הוכחנו למעלה באמצעות שיטת גורם האינטגרציה.

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C \right]$$

נתקדם לפתרון פרטי. נסמן

$$B(x) = \int \mu(x)b(x) dx$$

אזי

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} [B(x) + C]$$

נציב את הנקודה $x = x_0$ ונקבל

$$y_0 = \frac{1}{\mu(x_0)} [B(x_0) + C]$$

לכן אם נקח

$$C_0 = y_0 \mu(x_0) - B(x_0)$$

נקבל פתרון פרטי y_p שמקיים $y_p(x_0) = y_0$

$$y_p(x) = \frac{1}{\mu(x)} [B(x) + C_0]$$

נותר להוכיח את יחידות הפתרון. נניח כי $z = z(x)$ הוא פתרון נוסף של בעיית ההתחלה (2.5), שהתקבל באמצעות שיטה חדשה שלא היתה מוכרת לנו עד היום. אזי $z(x)$ חייב לקיים את השוויון

$$[\mu(x)z(x)]' = \mu(x)[z'(x) + a(x)z(x)]$$



שכן הוכחנו למעלה שגורם האינטגרציה $\mu(x)$ חייב לקיים שוויון זה עם **כל פתרון** של המשוואה $y' + a(x)y = b(x)$, ולכן בהכרח קיים קבוע C_1 כך ש-

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C_1 \right]$$

כלומר

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} [B(x) + C_1]$$

נציב את הנקודה $x = x_0$ ונקבל

$$z(x_0) = y_0 = \frac{1}{\mu(x_0)} [B(x_0) + C_1]$$

ולכן

$$C_1 = y_0\mu(x_0) - B(x_0)$$

אבל ראינו כי

$$C_0 = y_0\mu(x_0) - B(x_0)$$

ולכן $C_1 = C_0$, ולכן הפונקציה $z(x)$ זהה לפונקציה $y_p(x)$. כלומר, $y_p(x)$ הוא הפתרון היחיד לבעיית ההתחלה (2.5). ■

משפטי קיום ויחידות קיימים בעוד כמה סוגי משוואות שנפגוש בהמשך. החשיבות שלהם היא בכך שהם ראשית כל מבטיחים קיום של פתרון לבעיית נתונה, ושנית הם מבטיחים את יחידות הפתרון. בתחומים כמו פיזיקה, ביולוגיה, מזג אוויר, בונים לעיתים קרובות מודלים מתמטיים לשם חיזוי התנהגות עתידית של מערכות שונות. יחידות הפתרון עומדת בבסיס האפשרות לחיזוי וניבוי.

הבנה מדויקת של מה משפט הקיום והיחידות חשובה בכדי להימנע מנפילה מטעויות ובילבולים. נציג כמה דוגמאות.

דוגמה 3: נתבונן בבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} xy' = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

לא קשה לבדוק שיש לה אינסוף פתרונות שונים מהצורה הבאה

$$y(x) = \begin{cases} c_1 x^2, & -\infty < x \leq 0 \\ c_2 x^2, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

יש לשים לב לדברים הבאים

א. כל הפתרונות גזירים ברציפות על כל הישר הממשי!

ב. למרות שזו משוואה מסדר ראשון יש לה משפחה דו-פרמטרית של פתרונות!

ג. כל אחד מהפונקציות במשפחה זו מקיים גם את תנאי ההתחלה $y(0) = 0$, בניגוד לטענת משפט הקיום והיחידות.

ד. גם לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} xy' = 2y \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

יש אינסוף פתרונות!

$$y(x) = \begin{cases} c_1 x^2, & -\infty < x \leq 0 \\ 3x^2, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

לכאורה נראה כי דוגמא זו ממוטטת לחלוטין את משפט הקיום והיחידות, עד שרואים כי משפט הקיום והיחידות מתייחס רק למשוואות ליניאריות בצורתן הנורמלית! הצורה הנורמלית של המשוואה שלנו היא

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

הפונקציה $a(x) = -\frac{2}{x}$, אינה רציפה על כל הישר הממשי כפי שמשפט הקיום והיחידות דורש! אם נגביל את הבעייה לתחום $(0, \infty)$ או לתחום $(-\infty, 0)$ אז המשפט יתקיים במלואו. למשל, לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} xy' = 2y, & (0 < x < \infty) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

קיים פתרון אחד ויחיד והוא $y_p(x) = 3x^2$ בתחום $(0, \infty)$. נשאיר את הפרטים לתלמיד.



ספל הקפה של ניוטון: פתרון

§2.3

נחזור למשוואת חוק ההיתקררות של ניוטון שהצגנו בהרצאת המבוא

$$T'(t) = k[T(t) - C]$$

במשוואה זו, הפונקציה $T(t)$ מתארת את הטמפרטורה של ספל קפה חם בזמן t בחדר שהטמפרטורה שלו היא C (ההנחה היא שהטמפרטורה C קבועה), ו- k הוא קבוע פיזיקלי התלוי בסוג האובייקט שמתקרר.



איור 2.3: Newton's cup of coffee

הבעיה: ניוטון נכנס לחדר בטמפרטורה של 25°

מעלות עם כוס קפה בטמפרטורה התחלתית של

90° מעלות ($T(0) = 90$). לאחר 10 דקות

טמפרטורת הקפה היתה 70° מעלות צלזיוס

($T(10) = 70$). מתי טמפרטורת הקפה תגיע ל-

30° מעלות?

פתרון: בשלב הנוכחי קל לנו לראות כי מדובר במשוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר ראשון עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} T'(t) = k[T(t) - 25] \\ T(0) = 90 \end{cases}$$

רצוי לרשום את המשוואה בצורתה הנורמלית

$$\begin{cases} T'(t) - kT(t) = -25k \\ T(0) = 90 \end{cases}$$

בבעיות פיזיקאליות רגילות הקבוע הפיזיקלי k בדרך כלל ידוע מראש, אך במקרה זה ננצל את ההזדמנות להראות כיצד ניתן לגלות אותו על ידי דגימה אחת פשוטה: $T(10) = 70$. אבל ניגש קודם למציאת הפתרון הכללי: במקרה הזה, $a(t) = -k$, $b(t) = -25k$, ולכן גורם האינטגרציה שלנו הוא

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{-kt}$$

הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)b(t) dt + C \right] = e^{kt} \left[\int (-25ke^{-kt}) dt + C \right] \\ &= e^{kt} [25e^{-kt} + C] = 25 + Ce^{kt} \end{aligned}$$



הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית הוא אם כן

$$T(t) = 25 + Ce^{kt}$$

על ידי שימוש בתנאי ההתחלה $T(0) = 90$, והדגימה $T(10) = 70$, נקבל מערכת של שתי משוואות בשני הנעלמים C, k ,

$$T(0) = 25 + C = 90$$

$$T(10) = 25 + Ce^{10k} = 70$$

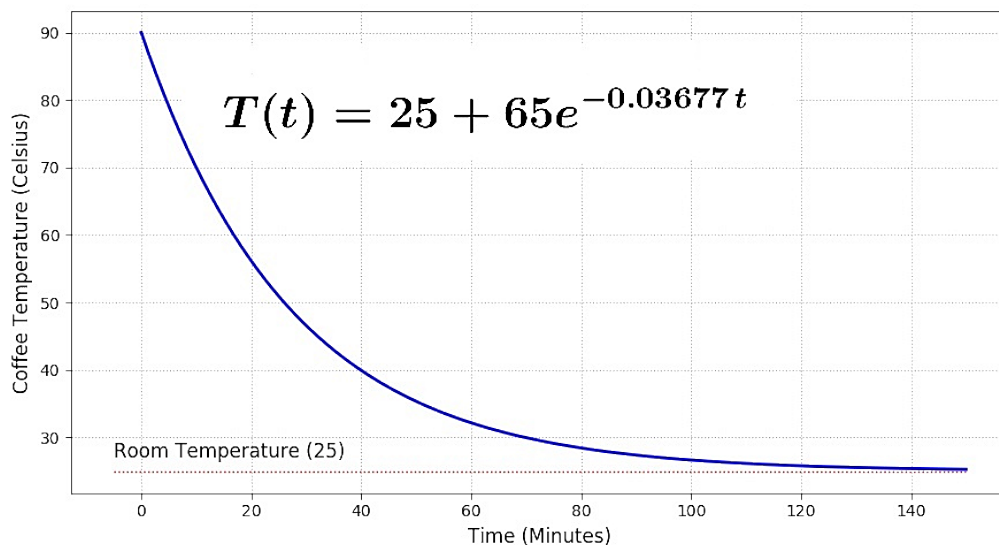
המשוואה הראשונה נותנת $C = 65$, והמשוואה השנייה תיתן

$$k = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{45}{65} = -0.03677$$

ולכן פונקציית ההתקררות של ספל הקפה היא

$$T(t) = 25 + 65e^{-0.03677t}$$

כאשר t הוא משתנה הזמן בדקות. במבט ראשון רואים כי פונקציית ההתקררות $T(t)$ יורדת באופן אסימפטוטי לטמפרטורת החדר 25° (ראה שרטוט 2.4).



איור 2.4: פונקציית הטמפרטורה של ספל הקפה בין $t = 0$ ל- $t = 150$ (דקות)

בכדי לגלות מתי טמפרטורת הקפה תגיע ל- 30° , נפתור את המשוואה

$$30 = 65e^{-0.03677t} + 25$$

ששקולה ל: $e^{-0.03677t} = \frac{5}{65}$, ונקבל

$$t = \frac{1}{-0.03677} \cdot \ln \frac{5}{65} = 69.756$$

כלומר, ספל הקפה יגיע לטמפרטורה של 30° לאחר כ-70 דקות (מספיק זמן בכדי לשתות את

הקפה לאט ולגלות עוד חוק פיזיקאלי).

חישוב החזר חודשי קבוע של הלוואת משכנתא - פתרון

§2.4



איור 2.5: ריבית ממוצעת של משכנתא ל-20 שנה

נחזור למשוואת המשכנתא שהצגנו בהרצאת המבוא. נתאר שוב את הבעיה: נניח שלקחנו משכנתא במיליון ש"ח בריבית של 4.2% למשך 20 שנה. מהו ההחזר החודשי הקבוע? ומהו הסכום הכולל שנחזיר לבנק בתום תקופת ההלוואה?

סימונים

t משתנה הזמן (ביחידות של שנים)

$M(t)$ גודל ההלוואה בזמן t

r גודל הריבית כמספר ממשי בקטע $[0, 1]$ (בדוגמא הנוכחית $r = 0.042$)

P גודל ההחזר הקבוע ליחידת זמן (שנתי במקרה שלנו)

years אורך חיי המשכנתא (שנים)

המשוואה הדיפרנציאלית שקיבלנו בהרצאת המבוא היא

$$M'(t) = rM(t) - P$$

זוהי כמובן משוואות דיפרנציאלית ליניארית מסדר ראשון, שבשלב זה אנו מסוגלים לפתור.

ראשית כל נרשום את המשוואה בצורה נורמלית

$$M'(t) - rM(t) = -P$$

ולכן

$$a(t) = -r, \quad b(t) = -P$$

חישוב גורם אינטגרציה

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{-rt}$$

פתרון כללי

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)b(t) dt + C \right] = e^{rt} \left[\int (-Pe^{-rt}) dt + C \right] \\ &= e^{rt} \left[\frac{P}{r} e^{-rt} + C \right] = \frac{P}{r} + Ce^{rt} \end{aligned}$$

קיבלנו את הפתרון הכללי לחישוב משכנתא בזמן t (ביחידות של שנים!)

$$M(t) = Ce^{rt} + \frac{P}{r}$$

בכדי למצוא את הפתרון הפרטי לבעייה שלנו, נשתמש בנתונים

$$r = 0.042, \quad M(0) = 1000000, \quad \text{years} = 20$$

נציב בפתרון הכללי $t = 0$ ו- $t = 20$ ונקבל מערכת של שתי משוואות בשני הנעלמים P ,

C

$$\begin{cases} M(0) = C + \frac{P}{r} = 1000000 \\ M(20) = Ce^{20r} + \frac{P}{r} = 0 \end{cases}$$

על ידי החסרת שני השווינונים נקבל מייד כי

$$C = \frac{10^6}{1 - e^{20 \cdot 0.042}} = -759666.58$$

ועל ידי הצבת C בשווינון השני נקבל

$$P = \frac{rM(0)e^{20r}}{e^{20r} - 1} = \frac{0.042 \cdot 10^6 \cdot e^{20 \cdot 0.042}}{e^{20 \cdot 0.042} - 1} = 73905.996$$

זהו ההחזר הקבוע עבור כל שנה. בחישוב חודשי זה יוצא:

$$\text{Monthly Payment} = \frac{P}{12} = 6158.833$$

ההחזר הכולל של המשכנתא לאחר 20 שנה (ללא הצמדה למדד ועלויות נוספות) הוא

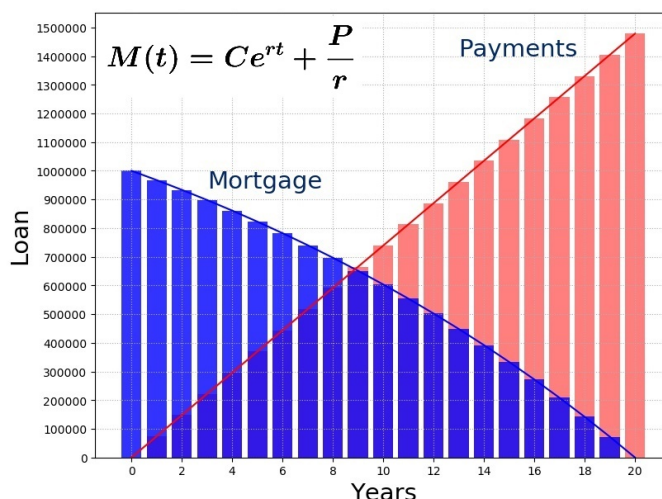
$$\text{Total return} = 20 * P = 1,478,119.93$$

החישוב של גודל המשכנתא בכל רגע נתון t (בין $t = 0$ עד לתום תקופת המשכנתא $t = 20$, באופן רציף!) יתבצע כמובן באמצעות נוסחת הפתרון הפרטי

$$M(t) = Ce^{rt} + \frac{P}{r} = -759666.58e^{0.042t} + 1759666.57$$

על סמך הנוסחה האחרונה ניתן לבנות דיאגרמות מהסוג שרואים בשרטוט [2.6](#)





איור 2.6: דיאגרמת עמודות עבור גודל המשכנתא וגודל ההחזר בשנים

קריאה מומלצת

- <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/Linear.aspx>
- Paul Dawkins, DE Complete, p. 24

תרגילים לפרק 2

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ומלאים למרבית התרגילים. אבל לפני שלוחצים על הקישור מומלץ מאוד לפתור בכוחות עצמך!

מצא פתרון כללי עבור כל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות

$$1. \quad xy' - y = -x \quad 2. \quad y' + y = e^{-x}$$

$$3. \quad xy' + y = \sin x \quad 4. \quad y' - y \cot(x) = \cot(x)$$

$$5. \quad x^2y' - 2xy = 3 \quad 6. \quad xy' - xy = (1 + x^2)e^x$$

$$7. \quad (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2 \quad 8. \quad xy' - ny = e^x x^{n+1}$$

$$9. \quad y' - \frac{y}{\sin x} = \frac{\tan x}{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$10. \quad y' + 2xy = 2x^3$$

$$11. \quad y' - y \sin x = \sin(x) \cos(x) \quad 12. \quad xy' - 2y = 2x^4$$

$$13. \quad (2x + 1)y' = 4x + 2y \quad 14. \quad y' + y \tan(x) = \sec(x)$$

$$15. \quad (xy + e^x)dx - xdy = 0 \quad 16. \quad x^2y' + xy + 1 = 0$$

$$(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y \, dy \quad .18$$

$$y = x(y' - x \cos(x)) \quad .17$$

$$(xy' - 1) \ln x = 2y \quad .20$$

$$2x(x^2 + y)dx = dy \quad .19$$

$$(2e^y - x)y' = 1 \quad .22$$

$$(x + y^2)dy = ydx \quad .21$$

$$y' = \frac{y}{3x - y^2} \quad .24$$

$$(\sin^2 y + x \cot y) y' = 1 \quad .23$$

קישור לפתרונות 

פרק 3

משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות מסדר ראשון

- ❶ מטרת הפרק לנסח תנאים מספיקים עבור קיום ויחידות פתרון של משוואות דיפרנציאליות כלליות מסדר ראשון, שאינן בהכרח ליניאריות. בנוסף לכך נציג שיטות שונות לפתרון משוואות לא-ליניאריות.
- ❷ משוואות לא-ליניאריות הן לרוב מסובכות יותר לפתרון ממשוואות ליניאריות, ולא קיימת שיטה אחידה לפתור אותם. במרבית המקרים אין בידינו שיטות אנליטיות למציאת פתרון של משוואה לא-ליניארית. לכן הדרך היחידה להתקדם בנושא היא על ידי פילוח לתתי-משפחות בעלות מאפיינים משותפים, ועל ידי פיתוח שיטות פתרון מיוחדות לכל משפחה ומשפחה.
- ❸ בתחילת הפרק נלמד לפתור מספר משפחות של משוואות לא-ליניאריות סדר ראשון שהן יחסית פשוטות: פרידות (separable), משוואות מטיפוס הומוגני, משוואות ברנולי וריקאטי, משוואות מדויקות (exact equations), ועוד מספר משפחות של משוואות שניתן לפתור באמצעות הצבות פשוטות.
- ❹ חלק ניכר מהמשוואות הלא-ליניאריות שאנו פוגשים בפיזיקה ובמדעים אחרים ניתן לפתור באמצעות שיטות מתמטיות לא מסובכות (או לפחות ניתן לקרב אותן למשוואות פתירות על ידי ויתור על דיוק מוחלט).
- ❺ נסיים את הפרק בניסוח כפול של משפט הקיום והיחידות עבור משוואות כלליות מסדר ראשון, ונדון במסקנות ובהיבטים השונים שלו. נציג גם הוכחה סכימתית לא מלאה למשפט (במידה והזמן ירשה).

פתרון משוואות דיפרנציאליות פרידות

§3.1

הגדרה 3.1: משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון $y' = f(x, y)$ נקראת משוואה **פרידה** (**separable**) אם ניתן לפרק את $f(x, y)$ למכפלת פונקציה של x עם פונקציה של y

$$y' = f(x, y) = a(x)b(y)$$

נתחיל עם כמה תרגילים להדגמת הטכניקה ולאחר מכן נציג צידוק תאורטי לטכניקה עצמה.

🔴 **דוגמה 1:** נפתור את המשוואה

$$y' = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

נעבור לשיטת הסימון של לייבניץ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

נבצע הפרדת משתנים

$$(1 + y^2)dy = x^2 dx$$

נבצע אינטגרציה

$$\int (1 + y^2)dy = \int x^2 dx$$

נקבל

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

ויתרנו על הקבוע באגף שמאל מאחר וניתן להעביר אותו לקבוע באגף ימין. קיבלנו משפחה חד-פרמטרית של פתרונות (בצורה סתומה)

$$y^3 + 3y - x^3 = C$$

🔴 **דוגמה 2:** נפתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

הפרדת משתנים

$$2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

אינטגרציה

$$(y - 1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$



במקרה הזה ניתן לקבל משפחה חד-פרמטרית של פתרונות בצורה מפורשת

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

תנאי התחלה

$$y(0) = 1 \pm \sqrt{C} = -1$$

קיבלנו פתרון פרטי מפורש

$$y_p(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

❶ **תרגיל 3.1:** פתור את בעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y + x^2 y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

פתרון: קל מאוד. הפתרון הפרטי צריך להיות:

$$y_p(x) = -\sqrt{2 \ln(1 + x^2) + 4}$$

בסיס תאורטי לשטת הפרדת המשתנים

§3.1.1

נתונה המשוואה הפרידה

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = a(x)b(y)$$

על ידי חילוק שני האגפים בביטוי $b(y)$ נגיע לצורה הבאה

$$(3.1) \quad b(y) \frac{dy}{dx} = a(x)$$

נסמן

$$B(y) = \int b(y) dy$$

נזכיר כי המשתנה y הוא למעשה פונקציה של x , ושלמעשה זהו סימון מקוצר עבור $y(x)$. לכן השוויון (3.1) שקול לשוויון

$$b(y(x))y'(x) = a(x)$$

הביטוי $b(y(x))y'(x)$ מזכיר לנו כמובן את כלל השרשרת לגזירת הפונקציה המורכבת $B(y(x))$ לפי המשתנה x

$$\frac{d}{dx} B(y) = \frac{d}{dy} B(y) \cdot \frac{dy}{dx} = B'(y) \cdot y'(x) = b(y) \cdot y'(x)$$

לכן השוויון (3.1) שקול לשוויון

$$\frac{d}{dx} [B(y)] = a(x)$$



נבצע אינטגרציה (לפי x) על שני האגפים ונקבל

$$B(y) = \int a(x) dx$$

כלומר

$$\int b(y) dy = \int a(x) dx$$

השוויון האחרון הוא השוויון שבבסיס טכניקת הפתרון של משוואה פרידה. לאחר חישוב האינטגרלים נקבל פתרון כללי (בדרך כלל בצורה סתומה). נדגיש שוב, כי אין שום ערובה לכך שמשפחה זו כוללת את כל הפתרונות של המשוואה!

שיטות הצבה

§3.2

חלק לא מבוטל מהמשוואות שפוגשים בפיזיקה ומדעים אחרים ניתן לפתור באמצעות הצבות פשוטות. נלמד על כמה מהן בסעיף זה.

משוואות מטיפוס הומוגני (Homogeneous Differential Equations)

§3.2.1

משוואות מטיפוס הומוגני הן משוואות שניתן להפוך למשוואות פרידות באמצעות ההצבה $v = \frac{y}{x}$. נדגיש כי v הוא פונקציה של x וההצבה בכתיבה המלאה היא:

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}$$

דוגמה 3: מצא פתרון כללי למשוואה

$$y' = \frac{y - 4x}{x - y}$$

פתרון: נשתמש בהצבה $v = \frac{y}{x}$ בכדי להפוך את המשוואה למשוואה פרידה

$$\frac{y - 4x}{x - y} = \frac{\frac{y}{x} - 4}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{v - 4}{1 - v}$$

נבטא את y' באמצעות v

$$y = xv \implies y' = v + xv'$$

לכן

$$v + xv' = \frac{v - 4}{1 - v}$$

ולכן

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v} - v = \frac{v^2 - 4}{1 - v}$$

הפרדת משתנים

$$\frac{(1 - v)dv}{v^2 - 4} = \frac{dx}{x}$$



ע"י שיטת הפירוק לשברים יסודיים (ראה חדו"א 1, סעיף 9.3), קל לקבל

$$\frac{(1-v)dv}{v^2-4} = \frac{-\frac{1}{4}}{v-2} + \frac{-\frac{3}{4}}{v+2}$$

אינטגרציה

$$\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{v-2} + \frac{-\frac{3}{4}}{v+2} \right) dv = \int \frac{dx}{x}$$

ולכן

$$-\frac{1}{4} \ln(v-2) - \frac{3}{4} \ln(v+2) = \ln x + C$$

פישוט

$$\ln \left[\frac{1}{(v-2)^{\frac{1}{4}}(v+2)^{\frac{3}{4}}} \right] = \ln x + C$$

לכן

$$\frac{1}{(v-2)^{\frac{1}{4}}(v+2)^{\frac{3}{4}}} = Ce^x$$

קיבלנו פתרון כללי

$$e^x \left[(v-2)^{\frac{1}{4}}(v+2)^{\frac{3}{4}} \right] = C$$

נציב $v = \frac{y}{x}$ ונקבל פתרון כללי למשוואה המקורית

$$\frac{(y-2x)^{\frac{1}{4}}(y+2x)^{\frac{3}{4}}}{x} e^x = C$$

בשרטוט 3.1 רואים את שדה הכיוונים של המשוואה בצירוף 50 קווים אינטגרליים (פתרונות).

❖ **תרגיל 3.2:** דוגמאות נוספות שמומלץ לפתור

$$\text{א. } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad \text{ב. } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$$

משוואת ברנולי (Jacob Bernoulli 1655-1705)

§3.2.2

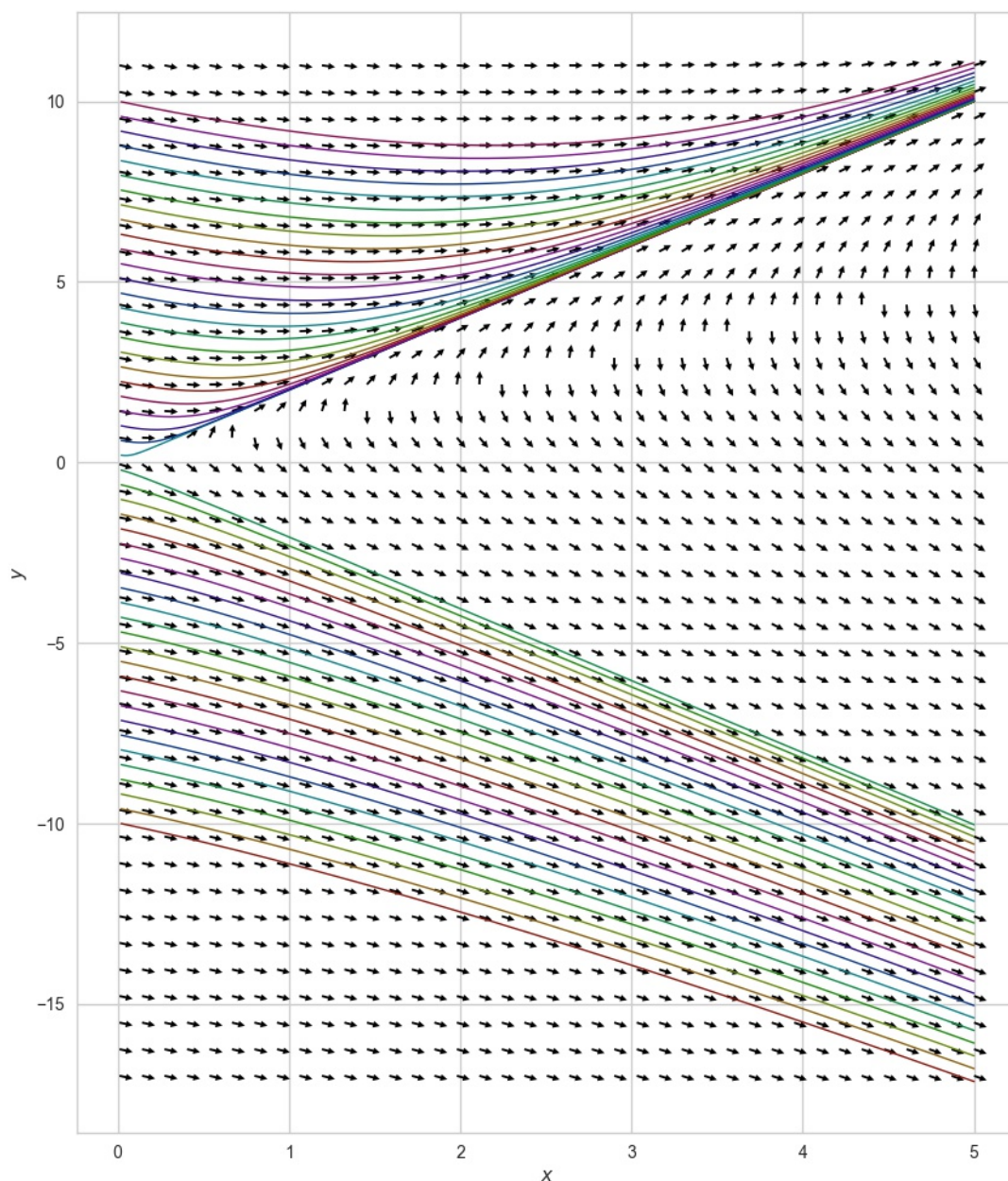
❖ הצורה הכללית של משוואת ברנולי היא

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

היא עולה בפיזיקה בהקשר למודלים מתמטיים של תנועת חלקיקים בתוך תווך עם חיכוך, ומכלילה אותם. בפיזיקה המקרים הנפוצים הם $n = 2$ או $n = 3$ אבל השיטה לפתרון משוואות ברנולי מטפלת גם בערכים לא שלמים של n . ניתן לקרוא על כך בהרחבה בקישורים הבאים

דף ויקיפדיה: משוואת ברנולי

Bernoulli Equation - HyperPhysics Concepts



איור 3.1: שדה הכיוונים של המשוואה $y' = \frac{y-4x}{x-y}$

פתרון המשוואה יתבצע על ידי חלוקה למקרים שונים. 

אם $n = 0$ אז נקבל משוואה ליניארית מסדר ראשון 

$$y' + p(x)y = q(x)$$

אותה למדנו לפתור בפרק הקודם.

אם $n = 1$ אז נקבל 

$$y' + p(x)y = q(x)y$$

ולכן

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0$$

ושוב קיבלנו משוואה ליניארית (הומוגנית) ואפילו פרידה.

אם $n \neq 0, 1$ נבצע **החלפת משתנה** שתהפוך את הבעיה לליניארית

$$v(x) = y(x)^{1-n}$$

ולכן נוכל לרשום גם

$$y(x) = v(x)^{\frac{1}{1-n}}$$

נגזור את שני האגפים

$$y'(x) = \frac{1}{1-n} \cdot v(x)^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot v'(x) = \frac{1}{1-n} \cdot v(x)^{\frac{n}{1-n}} \cdot v'(x)$$

נציב במשוואה

$$\frac{1}{1-n} v(x)^{\frac{n}{1-n}} v'(x) + p(x)v(x)^{\frac{1}{1-n}} = q(x)v(x)^{\frac{n}{1-n}}$$

נחלק את שני האגפים בביטוי $\frac{1}{1-n} v(x)^{\frac{n}{1-n}}$, ונקבל את המשוואה הליניארית

$$(3.2) \quad v'(x) + (1-n)p(x)v(x) = (1-n)q(x)$$

דוגמה 4: מצא פתרון כללי למשוואה

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$$

פתרון: לא קשה לראות כי מדובר במשוואת ברנולי עם $n = 3$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3$$

לכן ההצבה הדרושה כאן היא

$$v = y^{1-n} = \frac{1}{y^2}, \quad p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{1}{x^2}$$

נציב בנוסחה (3.2) וקיבלנו משוואה ליניארית

$$v'(x) - \frac{4}{x}v(x) = -\frac{2}{x^2}$$

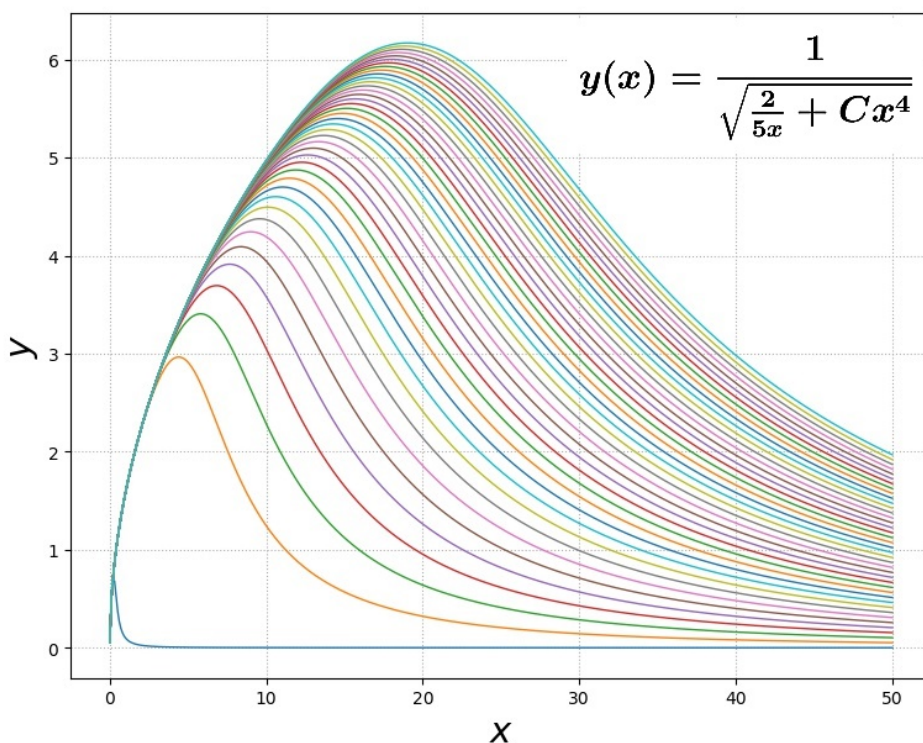
גורם האינטגרציה

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4}$$



פתרון כללי

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)b(x) dx + C \right] \\
 &= x^4 \int -\frac{1}{x^4} \cdot \frac{2}{x^2} dx = -2x^4 \int x^{-6} dx \\
 &= -2x^4 \cdot \left(\frac{x^{-5}}{-5} + C \right) = \frac{2}{5x} - Cx^4
 \end{aligned}$$



איור 3.2: משפחת הפתרונות של המשפחה $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + Cx^4}}$

הפתרון הכללי של המשוואה הליניארית הוא אם כן

$$v(x) = \frac{2}{5x} + Cx^4$$

הפתרון הכללי של המשוואה המקורית (ברנולי) הוא

$$y(x) = [v(x)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + Cx^4}}$$

נציין כי דוגמא זו מדגימה כי במקרים מסוימים הפרמטר C אינו חופשי לחלוטין, ובמקרה זה נוצר אילוץ שמחייב אותו להיות חיובי. בתרשים 3.2 ניתן לראות גרפים של 40 פונקציות ממשפחת הפתרונות.

מנת קווים ישרים

§3.2.3

הדוגמא הבאה למשפחת משוואות שבהן שיטת ההצבה עובדת הן משוואות שבהן הפונקציה $f(x, y)$ היא מנה של קווים ישרים

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

במקרים בהם $c_1 = c_2 = 0$ מקבלים משוואה הומוגנית שעבורה ההצבה $v = \frac{y}{x}$ פותרת את הבעיה. במקרים אחרים נדרשים הצבות שונות.

דוגמה 5: המשוואה הבאה היא דוגמא פשוטה למנת שני ישרים

$$y' = \frac{-x + 2y + 1}{2x - y - 2}$$

היא אינה ליניארית, אינה הומוגנית ואינה פרידה. אבל ההצבה הפשוטה $\hat{x} = x - 1$ תהפוך אותה להומוגנית

$$\frac{dy}{d\hat{x}} = \frac{-\hat{x} + 2y}{2\hat{x} - y}$$

ההצבה הקודמת לא תעבוד עבור המשוואה

$$(3.3) \quad y' = \frac{-x + 2y + 1}{2x - y - 3}$$

במקרה זה נדרשת הצבה יותר כללית

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \alpha \\ \hat{y} = y + \beta \end{cases}$$

אבל נדרש מאמץ קטנטן בכדי לבחור ערכים מתאימים של α, β .

המטרה שלנו היא להיפטר מהקבועים החופשיים:

$$-\hat{x} + 2\hat{y} = -x + 2y + 1$$

$$2\hat{x} - \hat{y} = 2x - y - 3$$

לכן

$$-x - \alpha + 2y + 2\beta = -x + 2y + 1$$

$$2x + 2\alpha - y - \beta = 2x - y - 3$$

קיבלנו מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים

$$-\alpha + 2\beta = 1$$

$$2\alpha - \beta = -3$$



שפתרונה הוא

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{5}{3} \\ \beta &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

לכן ההצבה שאנו זקוקים לה בכדי לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית (3.3) היא

$$\begin{cases} \hat{x} = x - \frac{5}{3} \\ \hat{y} = y - \frac{1}{3} \end{cases}$$

שתחתיה המשוואה (3.3) הופכת למשוואה הומוגנית

$$(3.4) \quad \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{-\hat{x} + 2\hat{y}}{2\hat{x} - \hat{y}}$$

באופן כללי, כל משוואה מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

ניתן להמיר למשוואה הומוגנית

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{a_1\hat{x} + b_1\hat{y}}{a_2\hat{x} + b_2\hat{y}}$$

וזאת בתנאי שנוכל לפתור את המערכת

$$\begin{aligned}a_1\alpha + b_1\beta &= c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta &= c_2\end{aligned}$$

מערכת זאת פתירה אם ורק אם $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ או במקרה שהמשוואות תלויות: $\frac{a_1}{a_2} =$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

השיטה תיכשל למשל בדוגמא הבאה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 2y + 1}{5x - 2y + 2}$$

מאחר וכאן תתקבל מערכת בלתי-עקבית

$$\begin{aligned}5\alpha - 2\beta &= 1 \\ 5\alpha - 2\beta &= 2\end{aligned}$$

במקרים כאלה, הצבת אחד הישרים תפתור את הבעיה

$$v = 5x - 2y + 2$$

נבטא את y'

$$\frac{dv}{dx} = 5 - 2\frac{dy}{dx}$$

ולכן

$$\frac{y}{dx} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \frac{dv}{dx}$$

לאחר הצבה במשוואה נקבל משוואה פרידה

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v}$$

❖ **מנת ישרים מקבילים:** באופן כללי, משוואה שצורתה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda ax + \lambda by + c_1}{ax + by + c_2}, \quad (c_1 \neq \lambda c_2)$$

ניתן לפתור באמצעות ההצבה

$$v = ax + by + c_2$$

המשוואה החדשה שתיתקבל תהיה פרידה

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(a+b)v + b(c_1 - c_2)}{v}$$

נשאיר לקורא להוכיח את הנוסחה. נציין רק שחשוב יותר לזכור את ההצבה.

❖ **תרגיל 3.3:** פתור את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y + 1}{8x - 2y + 1}$$

משוואות דיפרנציאליות מהצורה $y' = F(ax + by + c)$ §3.2.4

❖ באותה צורה ניתן לפתור קבוצות דומות של משוואות דיפרנציאליות מהצורה

$$y' = F(ax + by + c)$$

❖ **דוגמה 6:**

א. $y' = (x + y + 1)^2$	ב. $y' = \tan^2(x + y + 1)$
ג. $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$	ד. $y' = (x + y)[1 + \ln(x + y)] - 1$
ה. $y' = -1 + \sqrt{e^{2x+2y}}$	ו. $y' = \sin(2x + 2y) - \sin^2(x + y)$

❖ גם כאן ההצבה

$$v = ax + by + c$$

תהפוך את המשוואה לפרידה

❖ שיטות ההצבה שהוצגו בסעיף זה הן רק דוגמאות לרעיון הכללי והרחב של הצבה. יש עוד

אין-ספור טכניקות דומות, והתלמיד יידרש לפעמים למצוא את ההצבות המתאימות לבעייה גם אם לא נתקל בהן קודם.

משוואת ריקאטי (Jacopo Riccati 1676-1754)

§3.3

נסיים את הסעיף באיזכור של משוואת ריקאטי הקלאסית. מאחר והיא אינה כלולה בתוכנית הקורס, נשאיר לתלמיד המתעניין לטפל בפרטים (לא קשה).

הצורה הכללית של המשוואה היא

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

היא מתאפיינת בכך שאם ידוע פתרון פרטי שלה $y_1(x)$ ניתן למצוא פתרון כללי שלה (לא בהכרח הכי כללי) באמצעות ההצבה

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

שמובילה למשוואה ליניארית מסדר ראשון בפונקציה $v(x)$

$$v' + [b(x) + 2c(x)y_1(x)]v = c(x)$$

נשאיר לתלמיד להגיע לנוסחה זו כתרגיל.

תרגיל 3.4: מצא פתרון כללי למשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$

אם ידוע לנו הפתרון הפרטי $y_1(x) = \frac{1}{x}$.

משוואות מדויקות

§3.4

אחת הדרכים היצירתיות להתקדמות בשטח המתמטיקה היא לבצע מהלך הפוך מפתרון לבעייה (Reverse Engineering), ואז לשנות כיוון מבעייה לפתרון. נושא המשוואות המדויקות הוא דוגמא מאלפת לגישה זו.

משוואה מהצורה

$$F(x, y) = C$$

כאשר הפונקציה מקיימת תנאים מסוימים, מגדירה בצורה סתומה פונקציה $y = y(x)$

$$F(x, y(x)) = C$$

גזירה סתומה של השוויון האחרון לפי המשתנה x , תניב את משוואה הדיפרנציאלית מסדר



ראשון

$$F_x + F_y \cdot y'(x) = 0$$

לא קשה להוכיח את הטענה הבאה. (יש לבדוק את שני הכיוונים של הטענה).

❖ **טענה:** הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית

$$F_x + F_y \cdot y'(x) = 0$$

הוא $F(x, y) = C$.

❖ נוכל להסיק מטענה זו כי אם נתונה לנו משוואה דיפרנציאלית מהצורה

(3.5)

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

ואם קיימת פונקציה $F(x, y)$ כך ש-

$$F_x = A(x, y), \quad F_y = B(x, y)$$

אזי הפתרון הכללי של (3.5) הוא

$$F(x, y) = C$$

משוואה דיפרנציאלית מהסוג הזה נקראת **משוואה מדויקת**.

❖ **דוגמה 7:** המשוואה הבאה

$$(y^2 + 2xy) + (2xy + x^2)y' = 0$$

היא משוואה מדויקת, כי עבור $F(x, y) = xy^2 + x^2y$ מתקיים

$$F_x = y^2 + 2xy, \quad F_y = 2xy + x^2$$

ולכן הפתרון הכללי שלה הוא

$$xy^2 + x^2y = C$$

❖ הבעיה היא שלא תמיד קל לנחש את הפונקציה $F(x, y)$ ולכן דרוש קריטריון ברור בכדי לקבוע זאת.

משפט 3.1: יהיו $A(x, y)$, $B(x, y)$ שתי פונקציות גזירות ברציפות בתחום פשוט קשר $\mathcal{D}$ (על פי שני המשתנים). אזי המשוואה

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx}$$

מדויקת אם ורק אם $A_y = B_x$.

הוכחה: צריך לעבוד על שני כיוונים.



כוון 1: אם המשוואה מדויקת, אז על פי ההגדרה קיימת פונקציה $F(x, y)$ כך ש-

$$F_x = A(x, y), \quad F_y = B(x, y)$$

ולכן

$$A_y = F_{xy} = F_{yx} = B_x$$

השוויון $F_{xy} = F_{yx}$ נובע מהרציפות של הנגזרות השניות.

כיוון 2: נניח שמתקיים השוויון $A_y = B_x$. נוכיח קיומה של פונקציה $F(x, y)$ כך ש-

$$(1) F_x = A(x, y), \quad (2) F_y = B(x, y)$$

השוויון (1) גורר

$$F(x, y) = \int A(x, y) dx + h(y)$$

ושוויון (2) גורר

$$\begin{aligned} F_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\int A(x, y) dx + h(y) \right] \\ &= \int A_y(x, y) dx + h'(y) \\ &= B(x, y) \end{aligned}$$

הגזירה מתחת לסימן האינטגרל אפשרית בגלל רציפות הנגזרות החלקיות של $A(x, y)$. לסיום עלינו למצוא פונקציה $h(y)$ המקיימת

$$h'(y) = B(x, y) - \int A_y(x, y) dx$$

הבעייה שעשויה להתעורר עם השוויון האחרון היא שאגף שמאל היא פונקציה תלויה ב- y בלבד, בעוד שבאגף ימין מעורבות שתי פונקציות שתלויות גם ב- x . נוכיח שהפונקציה באגף ימין אינה תלויה ב- x כי נגזרתה לפי x מתאפסת:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[B(x, y) - \int A_y dx \right] = B_x - A_y = 0$$

לכן הפונקציה $h(y)$ קיימת, וקיומה מוכיח שהמשוואה מדויקת. ■

🔴 הוכחת המשפט גם מתווה את השיטה לחישוב $F(x, y)$ אם המשוואה מדויקת.

🔴 **דוגמה 8:** הוכח כי המשוואה

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0$$

מדויקת ומצא את פתרונה הכללי.

פתרון: בדוגמא זו

$$A(x, y) = y \cos x + 2xe^y, \quad B(x, y) = \sin x + x^2e^y + 2$$

ולכן

$$A_y = \cos x + 2xe^y, \quad B_x = \cos x + 2xe^y$$

קיבלנו כי $A_y = B_x$ ולכן על פי המשפט, המשוואה מדויקת.

נחשב את $F(x, y)$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int A(x, y) dx \\ &= \int (y \sin x + x^2 e^y) dx \\ &= y \sin x + x^2 e^y + h(y) \end{aligned}$$

נשאר לחשב את $h(y)$

$$F_y = \sin x + x^2 e^y + h'(y) = B(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$$

לכן $h'(y) = 2$, ולכן $h(y) = 2y$ (הקבוע לא נחוץ מאחר וממילא הוא נכלל בפתרון הכללי). קיבלנו לכן את הפתרון הכללי למשוואה

$$y \sin x + x^2 e^y + 2y = C$$

הסיכויים לחלץ פתרון מפורש עבור $y(x)$ ממשוואה זו כנראה קלושים, אבל קיימות שיטות נומריות לחישוב שלהם וגם לשירטוטם באמצעות תוכנות מתמטיות מתקדמות (כגון Matlab, Mathematica או Python/Sympy)

תרגיל 3.5: בדוק אם המשוואה

$$(2x^3 - 5y^4)y' = -3x^2 + 1$$

מדויקת, ואם כן מצא את פתרונה הכללי.

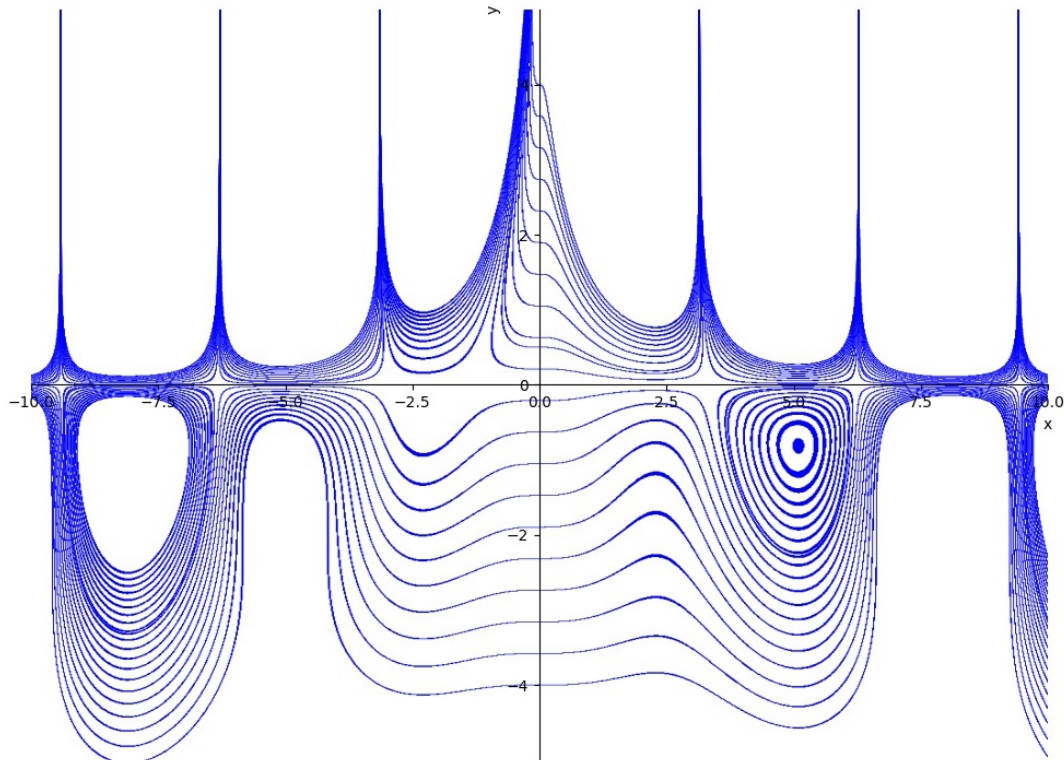
פתרון: המשוואה מדויקת. הפתרון הכללי הוא

$$x^3 y^2 + x - y^5 = C$$

גורמי אינטגרציה עבור משוואות מדויקות

§3.4.1

בשלב הקודם ביצענו מהלך הפוך מפתרון כללי למשפחת המשוואות המדויקות. עכשי ננסה לבצע מהלך חוזר של התקדמות בכדי להרחיב את משפחת המשוואות שניתן לפתור בצורה דומה



איור 3.3: קווים אינטגרליים של $y \sin x + x^2 e^y + 2y = C$ בקטע $[-10, 10]$ (Python/Sympy tools)

בדרך כלל רוב המשוואות מהצורה

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

אינן מדויקות. השאלה שנדרשת: האם ניתן להפוך אותן למדויקות באמצעות הכפלתן בגורם כלשהו?

הרעיון: ננסה למצוא פונקציה $\mu(x, y)$ כך שהמשוואה

$$\mu(x, y)A(x, y) + \mu(x, y)B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

תהיה מדויקת. במידה וקיימת פונקציה כזו, היא נקראת **גורם אינטגרציה** של המשוואה הדיפרנציאלית שלנו.

גורם אינטגרציה חייב לקיים את השוויון

$$(\mu A)_y = (\mu B)_x$$

לאחר הפעלת כלל המכפלה נקבל

$$\mu_y A + \mu A_y = \mu_x B + \mu B_x$$

או בצורה שקולה

$$(3.6) \quad (A\mu_y - B\mu_x) + (A_y - B_x)\mu = 0$$

המשוואה האחרונה היא **משוואה דיפרנציאלית חלקית** (יש קורס נפרד על משוואות כאלה), שהיא בדרך כלל יותר קשה לפתרון מהמשוואה המקורית. לכן נוכל לפתור אותה רק עבור מקרים מיוחדים.

שני מקרים מיוחדים כאלה הם כאשר הפונקציה $\mu(x, y)$ תלויה רק באחד המשתנים, ואז המשוואה (3.6) תהפוך להיות משוואה דיפרנציאלית רגילה. אבל נתחיל דוקא בדוגמא פשוטה שבה μ תלויה בשני משתנים.

דוגמה 9: המשוואה

$$(3.7) \quad (y^2 + 6x^2y) + (yx \ln x - 2xy)y' = 0$$

אינה משוואה מדויקת כי

$$A_y = 2y + 6x, \quad B_x = y(\ln x + 1) - 2y$$

וברור לחלוטין כי $A_y \neq B_x$. אם נכפיל את המשוואה בגורם האינטגרציה

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$$

נקבל משוואה מדויקת

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\ln x - 2)y' = 0$$

שפתרונה

$$F(x, y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx = y \ln x + 3x^2 + h(y)$$

$$F_y = \ln x + h'(y) = \ln x - 2$$

ולכן $h(y) = -2y$. הפתרון הכללי הוא

$$y \ln x + 3x^2 + 2y = C$$

זהו מקרה נדיר שבו ניתן לחלץ פתרון מפורש

$$y(x) = \frac{C - 3x^2}{2 + \ln x}$$

המקרים היותר שכיחים שבהם לא קשה למצוא גורם אינטגרציה הם כאשר μ תלוי במשתנה יחיד. למשל אם $\mu = \mu(x)$ אז

$$(\mu A)_y = \mu A_y$$

$$(\mu B)_x = \mu B_x + B\mu'(x)$$

ולכן מהשוויון $(\mu A)_y = (\mu B)_x$ שנדרש עבור גורם אינטגרציה, נובע

$$\mu A_y = \mu B_x + B\mu'(x)$$

קיבלנו את המשוואה

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{A_y - B_x}{B}$$

התנאי לכך ש- $\mu(x)$ קיימת הוא שהביטוי $\frac{A_y - B_x}{B}$ יהיה תלוי ב- x בלבד! במידה והתנאי מתקיים, נוכל לסמן

$$g(x) = \frac{A_y - B_x}{B}$$

והפתרון של המשוואה

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(x)$$

הוא

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx} = e^{\int \frac{A_y - B_x}{B} dx}$$

אם התנאי לא מתקיים (וקיימת סבירות גבוהה לכך) אפשר לנסות למצוא גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(y)$. לא תמיד אחד משניהם קיים, ואז מציאת גורם אינטגרציה הופכת למשימה קשה יותר.

דוגמה 10: מצא גורם אינטגרציה $\mu(x)$ עבור המשוואה הדיפרנציאלית

$$\frac{y}{2} + (x + \sqrt{x} \sin y) y' = 0$$

לא קשה לבדוק שהמשוואה אינה מדויקת. אבל

$$\begin{aligned} \frac{A_y - B_x}{B} &= \frac{\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin y}{x + \sqrt{x} \sin y} = \frac{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin y\right)}{x + \sqrt{x} \sin y} \\ &= \frac{-\frac{1}{2x} (x + \sqrt{x} \sin y)}{x + \sqrt{x} \sin y} = -\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

בכדי לגלות את $\mu(x)$ יש לפתור את המשוואה

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{2x}$$

כמו במקרה של מד"ר ליניארית מסדר 1, גם כאן נניח כי $\mu(x) > 0$, ולכן אחרי אינטגרציה של שני האגפים נקבל

$$\ln \mu(x) = -\frac{1}{2} \ln x + C = \ln \frac{1}{\sqrt{x}} + C$$

ולכן

$$\mu(x) = C e^{\ln \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

נקח את הפתרון $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. לאחר הכפלת המשוואה בגורם זה נקבל משוואה מדויקת

$$\frac{y}{2\sqrt{x}} + (\sqrt{x} + \sin y) y' = 0$$

שפתרונה לא קשה.

באופן דומה, תנאי הכרחי לקיום גורם אינטגרציה $\mu(y)$ הוא

$$\mu_y A + \mu A_y = \mu B_x$$

לכן

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{B_x - A_y}{A} = g(y)$$

התנאי לקיום $\mu(y)$ הוא שהביטוי $\frac{B_x - A_y}{A}$ יהיה תלוי במשתנה y בלבד, שסימננו על ידי $g(y)$. במידה והתנאי מתקיים, והפתרון של המשוואה

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(y)$$

הוא

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{\int \frac{B_x - A_y}{A} dy}$$

במידה ולא נמצא גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x)$ או $\mu(y)$, אפשר לנחש גורמי אינטגרציה מכל מיני צורות כגון $\mu(x, y) = x^m y^n$, $\mu(x, y) = \frac{x^m}{y^n}$, וכדומה.

תרגיל 3.6: בדוק ש- $\mu(x, y) = (xy)^2$ הוא גורם אינטגרציה של המשוואה

$$\left(3 + \frac{2y^3}{x}\right) + \left(\frac{2x}{y} + 5y^2\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

תרגיל 3.7: מצא תנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = x^m y^n$, כאשר m, n , מספרים שלמים, ולאחר מכן פתור את המשוואה

$$(x^3 y^2 - y) + (x^2 y^4 - x) \frac{dy}{dx} = 0$$

באמצעות גורם אינטגרציה מסוג זה.

פתרון: יש לבדוק את תנאי לקיום השוויון

$$(x^m y^n A)_y = (x^m y^n B)_x$$

לאחר ביצוע גזירות נקבל

$$n x^m y^{n-1} A + x^m y^n A_y = m x^{m-1} y^n B + x^m y^n B_x$$

נמשוך גורמים משותפים

$$x^m y^n \left(\frac{n}{y} A + A_y \right) = x^m y^n \left(\frac{m}{x} B + B_x \right)$$

לכן התנאי לקיום גורם אינטגרציה מהצורה $x^m y^n$ הוא קיום מספרים שלמים m, n , אשר



עבורם מתקיים השוויון הבא

$$\frac{nA}{y} + A_y = \frac{mB}{x} + B_x$$

נבדוק אם למשוואה שלנו יש גורם אינטגרציה כזה

$$(x^3y^2 - y) + (x^2y^4 - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

במקרה זה

$$\begin{aligned} A &= x^3y^2 - y, & B &= x^2y^4 - x \\ A_y &= 2x^3y - 1, & B_x &= 2xy^4 - 1 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{nA}{y} + A_y &= n(x^3y - 1) + 2x^3y - 1 = (n+2)x^3y - n - 1 \\ \frac{mB}{x} + B_x &= m(xy^4 - 1) + 2xy^4 - 1 = (m+2)xy^4 - m - 1 \end{aligned}$$

לכן השוויון הבא חייב להתקיים לכל הערכים של y, x

$$(n+2)x^3y - n - 1 = (m+2)xy^4 - m - 1$$

וזה יכול לקרות רק עבור $m = n = -2$! לכן גורם האינטגרציה שלנו הוא $\mu = x^m y^n = x^{-2} y^{-2}$. נכפול את המשוואה בגורם האינטגרציה ונקבל

$$\left(x - \frac{1}{x^2y}\right) + \left(y^2 - \frac{1}{xy^2}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

בדיקה פשוטה מוכיחה שזו אכן משוואה מדויקת, והמשך הפתרון שלה שגרת.

❖ **תרגיל 3.8:** באמצעות אותה שיטה, הוכח שגם למשוואה הבאה יש גורם אינטגרציה

מהצורה $x^m y^n$

$$x^2y^3 + (x + xy^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

מצא את גורם האינטגרציה ופתור את המשוואה.

❖ **תרגיל 3.9:** נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

הוכח שאם הביטוי

$$\frac{B_x - A_y}{xA - yB}$$

הוא פונקציה של xy , אז למשוואה קיים גורם אינטגרציה מהצורה

$$\mu(x, y) = g(xy)$$

מצא גורם אינטגרציה מהסוג הזה עבור המשוואה

$$(y^2 + 6x^2y) + (yx \ln x - 2xy)y' = 0$$

ומצא עבורה פתרון כללי.

פתרון: נציין כי הביטוי $g(xy)$ הוא סימון מקוצר עבור פונקציה מורכבת $g(u)$, $u = xy$ (כלומר g היא למעשה פונקציה של משתנה יחיד). לאחר הכפלת המשוואה בגורם האינטגרציה נקבל

$$g(xy)A(x, y) + g(xy)B(x, y)y' = 0$$

על פי המשפט למעלה, התנאי לכך שהמשוואה מדויקת הוא

$$\frac{\partial}{\partial y} [g(xy)A(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [g(xy)B(x, y)]$$

נשתמש בכללי הגזירה של פונקציה מורכבת

$$(\mu A)_y = g'(xy)xA + g(xy)A_y \quad (\mu B)_x = g'(xy)yB + g(xy)B_x$$

לכן בכדי שהמשוואה תהיה מדויקת צריך להתקיים השוויון

$$g'(xy)xA + g(xy)A_y = g'(xy)yB + g(xy)B_x$$

לכן

$$g'(xy)xA - g'(xy)yB = g(xy)B_x - g(xy)A_y$$

לכן

$$(3.8) \quad \frac{B_x - A_y}{xA - yB} = \frac{g'(xy)}{g(xy)}$$

נבדוק אם למשוואה הבאה יש גורם אינטגרציה כזה

$$(y^2 + 6x^2y) + (yx \ln x - 2xy)y' = 0$$

ראשית כל נרשום את הביטויים להם אנו זקוקים

$$\begin{aligned} A &= y^2 + 6x^2y, & B &= xy \ln x - 2xy \\ A_y &= 2y + 6x^2, & B_x &= y + y \ln x - 2y \end{aligned}$$

נציב בשוויון (3.8) ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{B_x - A_y}{xA - yB} &= \frac{(y + y \ln x - 2y) - (2y + 6x^2)}{x(y^2 + 6x^2y) - y(xy \ln x - 2xy)} \\ &= \frac{y + y \ln x - 2y - 2y - 6x^2}{6x^3y - xy^2 \ln x + 3xy^2} \\ &= \frac{y \ln x - 3y - 6x^2}{-xy(y \ln x - 3y - 6x^2)} \\ &= -\frac{1}{xy}\end{aligned}$$

על פי שוויון (3.8) יש למצוא פונקציה g המקיימת

$$\frac{g'(xy)}{g(xy)} = -\frac{1}{xy}$$

נציב $u = xy$ ונקבל משוואה דיפרנציאלית שגרתית

$$\frac{g'(u)}{g(u)} = -\frac{1}{u}$$

שפתרונה

$$\begin{aligned}\ln g(u) &= -\ln u = \ln \frac{1}{u} \\ g(u) &= \frac{1}{u}\end{aligned}$$

ולכן גורם האינטגרציה שלנו הוא $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$. הבדיקה והפתרון של המשוואה כבר עשינו למעלה (ראה משוואה (3.7) למעלה).

תרגיל 3.10: על סמך הנוסחה הקודמת, בדוק שלמשוואה הבאה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = g(xy)$, מצא את גורם האינטגרציה, ומצא פתרון כללי למשוואה

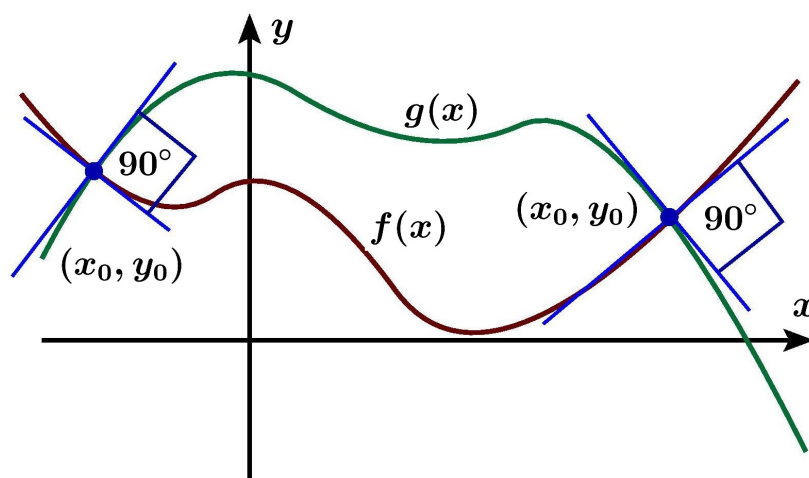
$$\left(3 + \frac{2y^3}{x}\right) + \left(\frac{2x}{y} + 5y^2\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

משפחות אורתוגונליות של עקומים

§3.5

הגדרה 3.2:

- א. שני עקומים הנחתכים בנקודה (x_0, y_0) נקראים **אורתוגונליים בנקודה** (x_0, y_0) (ניצבים) אם הם נחתכים בנקודה (x_0, y_0) והישרים המשיקים לשני העקומים בנקודה (x_0, y_0) ניצבים אחד לשני (ראה שרטוט 3.4).
- ב. שני עקומים נקראים **אורתוגונליים** אם הם אורתוגונליים בכל נקודות החיתוך שלהם.



איור 3.4: שני עקומים אורתוגונליים

- מההגדרה משתמעת הדרישה שלשני העקומים יש שיפוע (נגזרת) בנקודה (x_0, y_0) .
- מקרה קצה בו אחד העקומים יש שיפוע אינסופי מחייב קיום נגזרת אינסופית משני צידי הנקודה.
- ייתכנו מצבים בהם שני עקומים אורתוגונליים בכמה נקודות חיתוך.
- טענה 3.2:** הגרפים של הפונקציות $y = f(x)$, $y = g(x)$ אורתוגונליים בנקודה (x_0, y_0) אם ורק אם

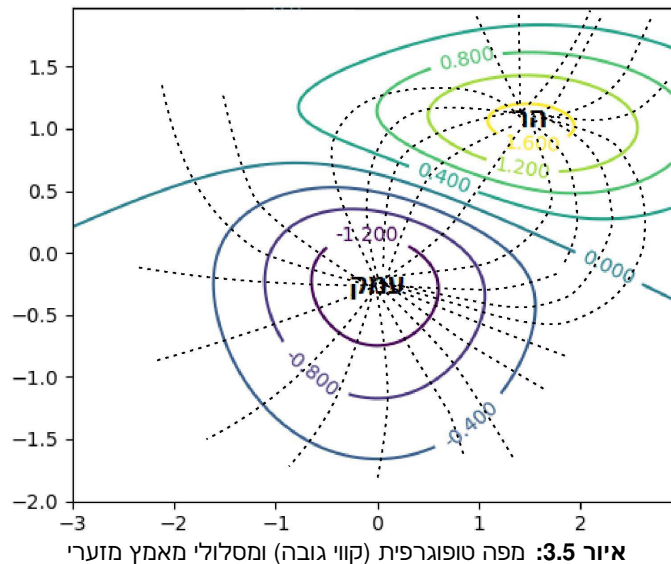
$$f'(x_0)g'(x_0) = -1$$

- במקרה ש- $f'(x_0) = 0$ או $g'(x_0) = 0$, הנגזרת של הפונקציה השניה צריכה להיות $\pm\infty$.
- דרישה:** דרך כל נקודה במישור, קיימת לכל היותר עקומה אחת מכל משפחה שעוברת דרכה. נקודה שבה עוברים כמה עקומים מאותה משפחה נקראת **סינגולרית**.

הגדרה 3.3: משפחות אורתוגונליות של עקומים הן שתי משפחות של עקומים כך שכל עקום מהמשפחה הראשונה אורתוגונלי לכל עקום מהמשפחה השניה.



- משפחות אורתוגונליות של עקומים נפוצות בהקשרים פיזיקליים, גאוגרפיים, ותחומים שונים.
- במפות טופוגרפיות (מפות קווי גובה) למשל, המשפחה האורתוגונלית מציינת מסלולי טיפוס או גלישה אופטימליים. מיים הזורמים מראש הר לתחתיתו יזרמו לאורכו של עקום אורתוגונלי לקווי הגובה של ההר



נקודת ראש ההר ונקודת השפל של העמק הן נקודות סינגולריות.

- בעייה גאומטרית:** נתונה משפחת הפרבולות $y = kx^2$, כאשר k מספר ממשי כלשהוא (עבור $k = 0$ נקבל ישר). מצא את המשפחה האורתוגונלית.

פתרון:

תהי (x, y) נקודה במישור שדרכה עוברת פרבולה $y = kx^2$. אזי $k = \frac{y}{x^2}$ והשיפוע של הפרבולה בנקודה זו הוא $2kx = \frac{2y}{x}$. לכן השיפוע של העקום האורתוגונלי בנקודה (x, y) הוא $-\frac{x}{2y}$. לכן המשפחה האורתוגונלית היא הפתרון הכללי של המשוואה הפרידה

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

קל להגיע לפתרון הכללי שלה

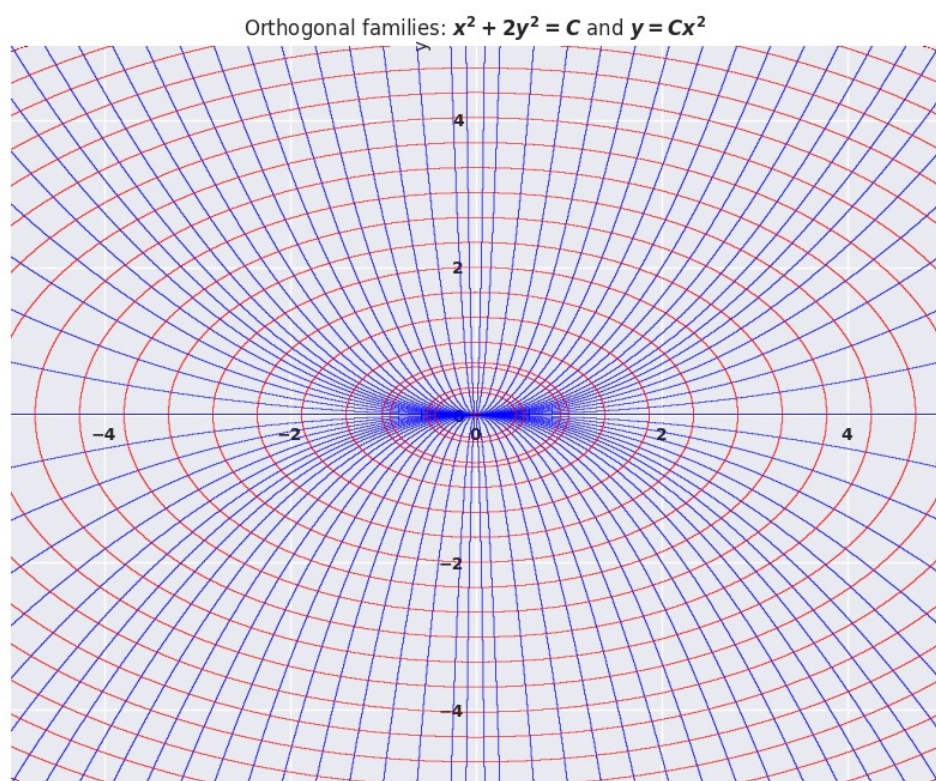
$$x^2 + 2y^2 = C$$

שהיא משפחת אליפסות כפי שרואים בתרשים 3.6.

- דוגמה 11:** נתונה משפחת המעגלים $(x-k)^2 + y^2 = k^2$. מצא את המשפחה האורתוגונלית.

פתרון: תהי (x, y) נקודה כלשהי השייכת למשפחה. כלומר קיים k כך ש-

$$(x - k)^2 + y^2 = k^2$$



איור 3.6: משפחת האליפסות $x^2 + 2y^2 = C$ אורתוגונלית למשפחת הפרבולות $y = kx^2$

יש לבטא את k באמצעות x, y

$$x^2 - 2kx + k^2 + y^2 = k^2$$

ולכן

$$k = \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

בכדי לקבל את השיפוע נבצע גזירה סתומה

$$2(x - k) + 2yy' = 0$$

ולכן

$$y' = \frac{k - x}{y} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{2x} - x}{y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

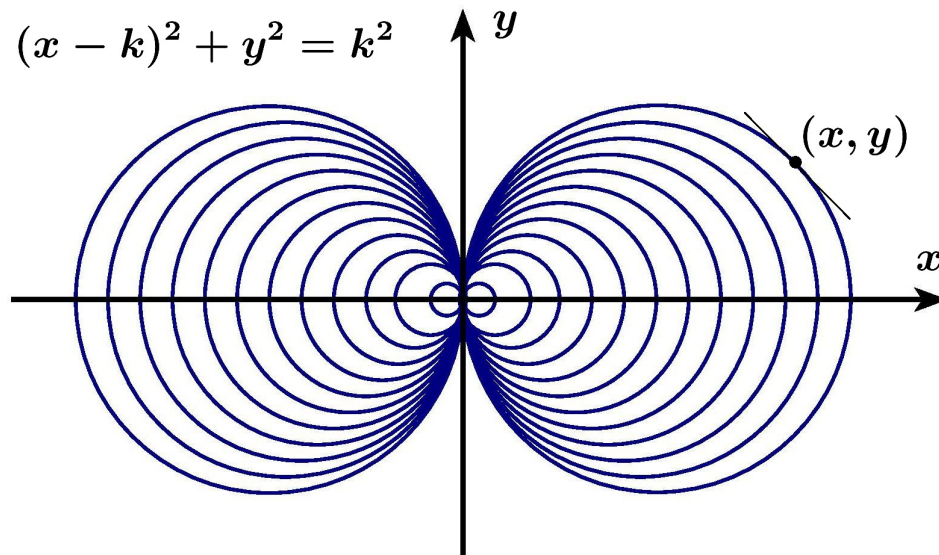
המשוואה הדיפרנציאלית עבור המשפחה האורתוגונלית היא

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

זוהי משוואה הומוגנית. ההצבה $v = \frac{y}{x}$ תיתן

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{2v}{1 - v^2}$$

$$\frac{1 - v^2}{v^3 + v} dv = \frac{dx}{x}$$



איור 3.7: משפחת המעגלים $(x - k)^2 + y^2 = k^2$

$$\frac{1 - v^2}{v^3 + v} = \frac{1 + v^2}{v^3 + v} - \frac{2v^2}{v^3 + v} = \frac{1}{v} - \frac{2v}{v^2 + 1}$$

ולכן

$$\int \left[\frac{1}{v} - \frac{2v}{v^2 + 1} \right] dv = \ln \frac{v}{v^2 + 1} = \ln x + C$$

פתרון כללי

$$\frac{v}{v^2 + 1} = Cx$$

נציב $v = \frac{y}{x}$ ונקבל את המשפחה האורתוגונלית

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = Cx$$

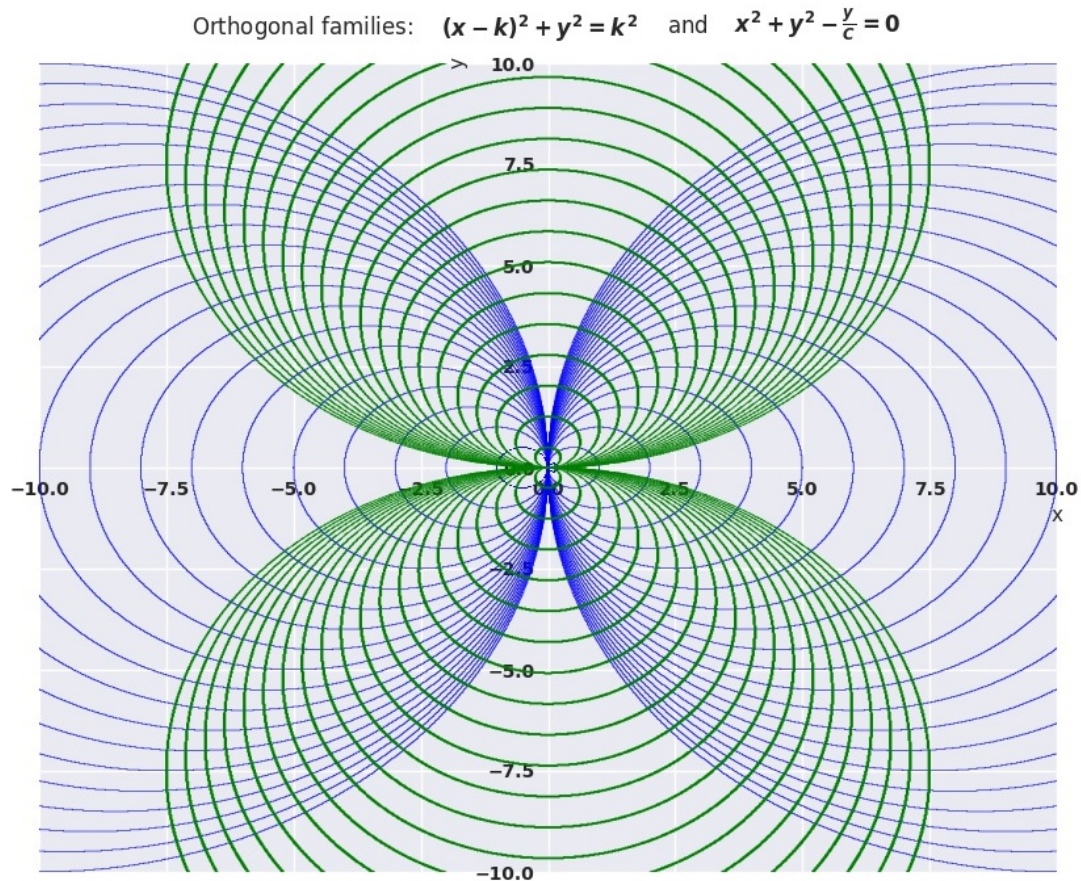
או יותר פשוט

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{C} = 0$$

אם נחליף את $\frac{1}{C}$ בביטוי $2c$ אז נקבל תאור שקול

$$x^2 + (y - c)^2 = c^2$$

זוהי כמובן משפחת מעגלים שמרכזם על ציר- y והמשיקים לציר- x .



איור 3.8: משפחת המעגלים $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ אורתוגונלית למשפחת המעגלים $(x - k)^2 + y^2 = k^2$

תרגיל 3.11: נתונה משפחת מעגלים $x^2 + y^2 = k^2$. מצא משפחת עקומים שחותכת את

המשפחה הקודמת בזווית של 45° .

הדרכה: אם שיפועי שני ישרים הם m_1, m_2 , אז הזווית שביניהם θ מקיימת

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

זה נובע מהנוסחה

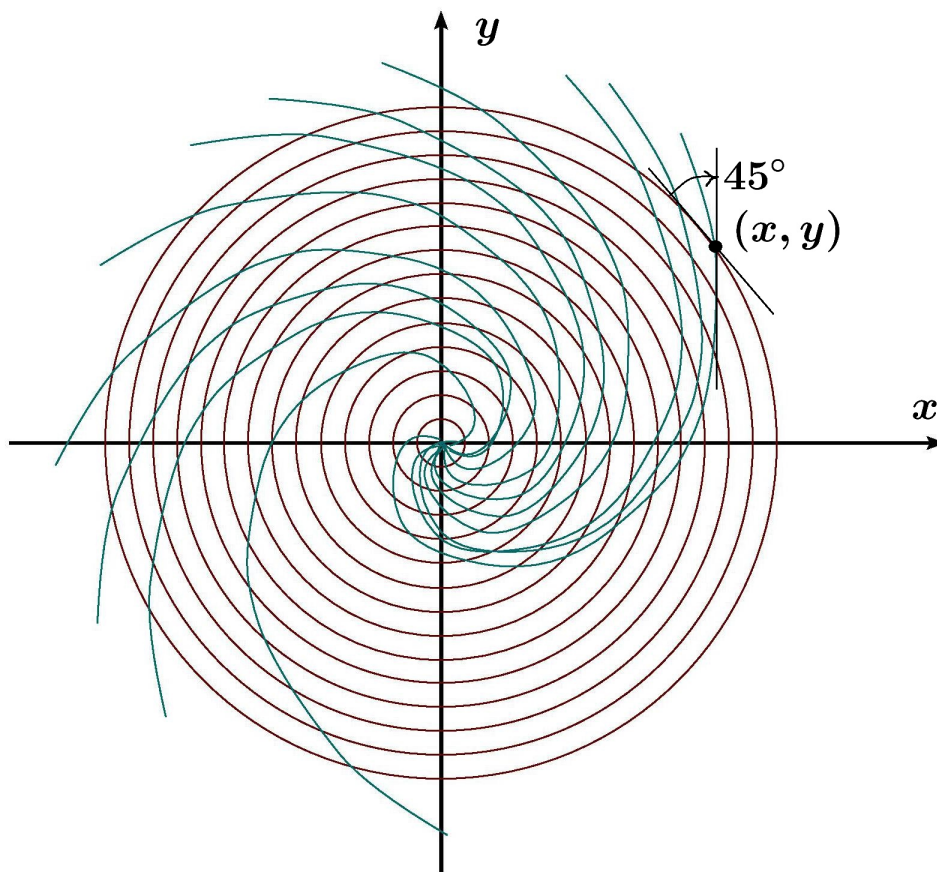
$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

כאשר α, β הן הזוויות של הישרים ביחס לציר ה- x .

לאחר עיבוד הנתונים נקבל משוואה מטיפוס הומוגני עבור המשפחה החותכת

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

אשר פתרונה יניב את המשפחה "האורתוגונלית" שרואים בשרטוט 3.9.



איור 3.9: משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = k^2$ ומשפחת העקומים שחותכת אותה בזווית של 45°

משפט הקיום והיחידות עבור משוואות מסדר ראשון

§3.6

דוגמה 12: למשוואה הדיפרנציאלית

$$(1 + y')^2 + y^2 = -5$$

לא קיים שום פתרון משום שאגף שמאל יהיה תמיד חיובי בלא תלות במהי הפונקציה $y(x)$.

דוגמה 13: למשוואה הדיפרנציאלית

$$(y')^2 + y^2 = 0$$

קיים פתרון אחד ויחיד: $y(x) \equiv 0$ (פונקציית האפס). בניגוד למצב השכיח שללא תנאי התחלה יש בדרך כלל אינסוף פתרונות.

דוגמה 14: למשוואה הדיפרנציאלית

$$(y')^2 + y^2(y - 1)^2 = 0$$

יש בדיוק שני פתרונות שונים: $y = 1$, $y = 0$.

כאמור חקירה של משוואות בצורה הכללית הסתומה $F(x, y, y') = 0$ חורגת ממסגרת

הקורס. נגביל את עצמנו לצורה הנורמלית בלבד.

❖ הצורה הנורמלית הכללית של בעיית התחלה מסדר ראשון היא

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר על $f(x, y)$ אין שום אילוץ אלגברי ועשויה להיות פונקציה מורכבת מאוד.

משפט 3.3: נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

$$(3.9) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם הפונקציות $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ רציפות בתוך מלבן נתון במישור:

$$\alpha < x < \beta, \quad \gamma < y < \delta$$

שמכיל את הנקודה (x_0, y_0) , אזי קיים תת-קטע $(x_0 - h, x_0 + h)$ של הקטע (α, β) שבו קיים פתרון $\phi(x)$ **אחד ויחיד** של בעיית ההתחלה שלנו. כלומר,

$$\begin{cases} \phi'(x) = f(x, \phi(x)), & (x_0 - h < x < x_0 + h) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

❖ נזכיר כי הביטוי $f_y(x, y)$ מציין את **הנגזרת החלקית** של $f(x, y)$ על פי המשתנה y , ולפעמים מסמנים אותה גם על ידי $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

❖ בדרך כלל הגודל h עשוי להיות קטן יותר מהגודל $\min\{x_0 - \alpha, \beta - x_0\}$, אך במקרים אחרים עשוי להיות אפילו ∞ . קיימות שיטות לקבל הערכה של הגודל h שנציג בהמשך.

❖ הוכחה חלקית של המשפט, שמבליטה את הרעיון הכללי, תוצג בהמשך (במידה ויהיה לכך זמן). ההוכחה המלאה חורגת ממסגרת הקורס וניתן למצוא אותה בספרות העשירה בנושא.

❖ חשוב לא לשכוח שהמשפט מבטיח לנו קיום ויחידות של פתרון בסביבת הנקודה x_0 , אך אינו נותן שום דרך למציאתו (אפילו לא רמז!). אכן ברוב המקרים לא קיימות דרכים אנליטיות למציאת פתרון. אנו נסתפק בלימוד כמה שיטות ידועות לפתרון בעיות שכיחות בתחומים מדעיים.

❖ **דוגמה 15:** לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2 y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

יש אינסוף פתרונות שונים:

$$(3.10) \quad y(x) = \frac{x}{1 + Cx}$$

קל לוודא זאת על ידי הצבה פשוטה. זה לא עומד בניגוד למשפט הקיום והיחידות כי המשוואה בצורתה הנורמלית

$$y' = f(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}$$

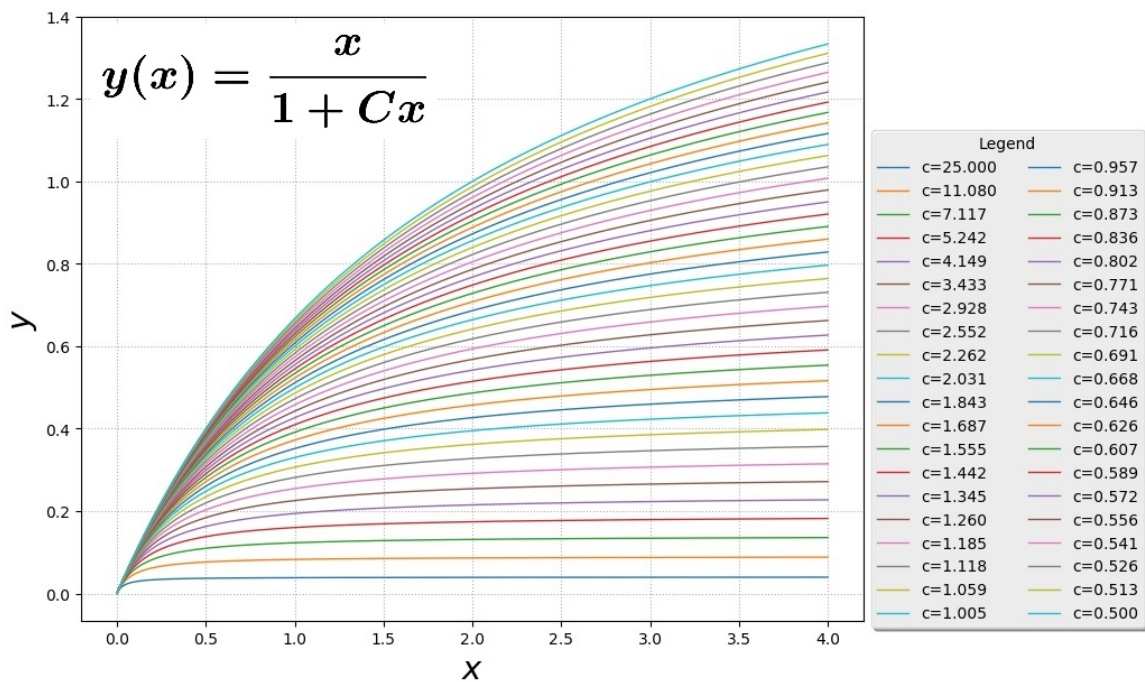
אינה מקיימת את תנאי המשפט סביב הנקודה $x_0 = 0$.

❶ **דוגמה 16:** לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2 y' = y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

יש פתרון טריביאלי שקל לנחש: $y(x) \equiv 0$. הוכח שלא קיים פתרון נוסף לבעיית ההתחלה זו.

❷ שים לב כי בבעיית הקודמת, הפתרון $y(x) \equiv 0$ אינו כלול בפתרון הכללי שלה (3.10). כלומר, מציאת משפחה אינסופית של פתרונות למשוואה דיפרנציאלית אינה ערובה לכך שהיא כוללת את כל הפתרונות לבעיית ההתחלה! למרות זאת, מבט קצר בתרשים הגרפי של הפתרון הכללי מגלה כי הפונקציה $y(x) \equiv 0$ היא פונקציה גבולית של משפחת הפונקציות כאשר $C \rightarrow \infty$.



איור 3.10: משפחת הפתרונות של המשוואה $x^2 y' = y^2$

❸ הפתרון הנוסף שלא נכלל במשפחה נקרא לפעמים "מעטפת". אך אין שום ערובה לכך שכל הפתרונות שלא נכללים הן מהסוג הזה.

❶ **דוגמה 17:** לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

יש שני פתרונות שונים בקרן $[0, \infty)$:

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} \\ \phi_2(x) = 0 \end{cases}$$

זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות כי לפונקציה $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ אין נגזרת חלקית לפי y בנקודה $(0, 0)$ (למעשה f_y לא קיימת בנקודה זו).

קיים נוסח שני של משפט הקיום והיחידות שמאפשר להעריך את הגודל של הפרמטר h . ❖

דוגמה 18: בעייה שניתנה בבוחן אמצע סמסטר אביב תשמ"ד (30.3.1984) ❖

א. מצא את כל הפתרונות של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{y}}{e^{\sqrt{y}}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ב. הסבר בפירוט מדוע חוסר היחידות של הפתרון אינו סותר את משפט הקיום והיחידות?

פתרון: מדובר במשוואה פרידה שפתרונה שיגרתי

$$\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy = x dx$$

פתרון כללי

$$2e^{\sqrt{y}} = \frac{x^2}{2} + C$$

על פי תנאי ההתחלה $y(0) = 0$, נקבל $C = 2$, ולכן

$$e^{\sqrt{y}} = \frac{x^2}{4} + 1$$

לכן

$$\sqrt{y} = \ln\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)$$

קיבלנו פתרון ראשון

$$y = \ln^2\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)$$

הפתרון השני "נעלם" לנו בשלב שבו חילקנו את שני האגפים ב- $\sqrt{y}$. חילוק כזה מניח כי $y \neq 0$ ולכן יש לבדוק את הפונקציה $y = 0$ בנפרד. הבדיקה מראה כי גם $y = 0$ הוא פתרון לבעיית ההתחלה, ולכן קיבלנו שני פתרונות לבעיית ההתחלה, בניגוד למסקנת משפט הקיום והיחידות. אם קוראים שוב את המשפט היטב, אז רואים כי הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{x\sqrt{y}}{e^{\sqrt{y}}}$$

אינה מקיימת את תנאי המשפט בנקודה $(0,0)$, מאחר ואינה מוגדרת בצד השמאלי של הנקודה $y = 0$ (המשפט דורש קיום הפונקציה בסביבה מלבנית שבמרכזה הנקודה $(0,0)$). גם אם $f(x,y)$ מקיימת את תנאי המשפט ובנוסף יש לה תכונות נפלאות (כמו אינסוף נגזרות רציפות, דיפרנציאביליות, וכדומה) לא תמיד ניתן למצוא את הפתרון המפורש שמשפט הקיום והיחידות מבטיח לנו. בהרבה מקרים יש צורך בשימוש בשיטות נומריות בכדי להתקרב לפתרון ברמות דיוק שונות (שנלמד בפרק החמישי של הקורס ועוד שיטות רבות שנלמדות בקורסים של אנליזה נומרית).

משפט 3.4: (משפט הקיום והיחידות גרסה 2)

נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

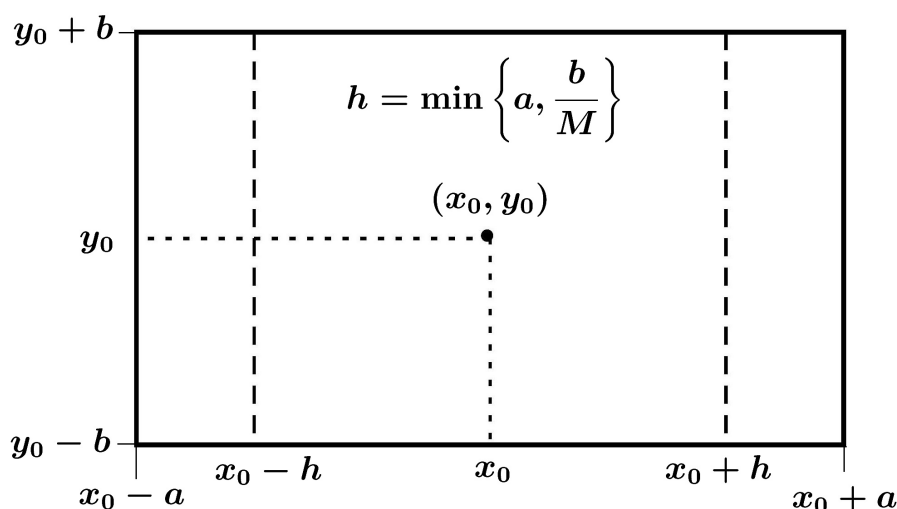
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם הפונקציות $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ רציפות בתוך מלבן סימטרי סביב הנקודה (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x_0 - a < x < x_0 + a \\ y_0 - b < y < y_0 + b \end{cases}$$

ובנוסף לכך קיים קבוע ממשי M כך ש- $|f(x, y)| \leq M$ בכל המלבן, אזי קיים פתרון אחד ויחיד בתת-קטע $(x_0 - h, x_0 + h)$, כאשר

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$



איור 3.11: תחום ההגדרה של הפתרון היחיד

המלבן הסימטרי עשוי להיות "רצועה אינסופית" אם $a = \infty$ או $b = \infty$. אם $a = \infty$ וגם

$b = \infty$ אז המלבן הוא כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$. ראה שרטוט 3.11.

- בפועל, במקרים רבים, הערך של h עשוי להיות גדול יותר ממה שהמשפט מבטיח. במקרה ש- $a = \infty$ וגם $b = \infty$ הערך של h הוא $h = \infty$, ולכן הנוסח הזה של משפט הקיום והיחידות מאפשר לנו להסיק קיום ויחידות של פתרון על כל הישר הממשי (מה שקודם לא התאפשר לנו).

דוגמה 19: לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{1+x^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

קיים פתרון אחד ויחיד על כל הישר הממשי כי

א. הפונקציה $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ מוגדרת ורציפה על כל המישור הממשי $\mathbb{R}^2$.

ב. הנגזרת f_y מוגדרת ורציפה על כל המישור

לכן נוכל לקחת את $a = b = \infty$

ג. לכל נקודה $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{1+x^2+y^2} \right| < M = 1$$

ד. ולכן

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \infty$$

תרגיל 3.12: האם קיים פתרון של המשוואה

$$y' = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

שמקיים $y(0) = 0$ וגם $y(2) = 2$?

תרגיל 3.13: הוכח שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

לא קיים שום פתרון. האם עובדה זו סותרת את משפט הקיום והיחידות?

תרגיל 3.14: הוכח שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

יש שני פתרונות שונים שמוגדרים על כל הישר הממשי

$$y_1(x) = -1, \quad y_2(x) = -\cos x$$

האם עובדה זו סותרת את משפט הקיום והיחידות?
הערה: הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y = \sin(x + c)$, אבל יש שני פתרונות "מעטפת" $y = 1$, $y = -1$.

❖ **תרגיל 3.15:** הוכח באמצעות משפט הקיום והיחידות שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

יש פתרון יחיד בקטע $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

❖ לפני שניגש להוכחה החלקית של משפט הקיום והיחידות, נציג את מושג שדה הכיוונים שמסייע מאוד בהבנת ההתנהגות של פתרונות למשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

שדה כיוונים של פונקציה $f(x, y)$ במישור

§3.7

(Directions Field)

❖ אחד המושגים הפרקטיים שמסייע בהבנה וניתוח של פתרון משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (לא קיים משהו דומה עבור סדר גבוה יותר), הוא מושג **שדה כיוונים** (directions field).

❖ בהינתן משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר ראשון בצורה נורמלית

$$y' = f(x, y)$$

יכולה להתפרש גאומטרית כתאור של מהו השיפוע (או הכיוון) של פתרון בנקודה (x, y) . הביטוי $y'(x)$ מציין את השיפוע הגאומטרי של הפתרון בנקודה (x, y) . במילים אחרות: ניתן לפרש את הביטוי $y' = f(x, y)$ ככלל האומר לנו "לאיזה כוון יש ללכת בכדי להישאר על הגרף שפותר את המשוואה".

❖ ניתן לשרטט וקטור כיוון עבור כל נקודה (x, y) במישור (שבה הפונקציה f מוגדרת), ולקבל "מפת כיוונים" או **שדה כיוונים** כפי שמקובל יותר לקרוא לזה, שמציין לאן צריך להתקדם בכל נקודה ונקודה בכדי להימצא על פתרון של המשוואה.

❖ מסיבות נוחות, הוקטור יהיה בגודל קבוע (לאפשר שירטוט נוח וקריא), אבל השיפוע שלו יהיה שווה $f(x, y)$. זווית הוקטור $\theta = \arctan f(x, y)$ תהיה תמיד בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, וכיוון החץ תמיד יפנה לצד החיובי של ציר ה- x . לכן כיוון הזרימה הוא תמיד משמאל לימין.

❖ **קו אינטגרלי** (integral line) הוא קו המתקבל כתוצאה מבחירת נקודה (x_0, y_0) במישור ה- xy וזרימה לאורך הוקטורים בשדה הכיוונים. לא קשה לראות כי קו אינטגרלי שקול למציאת פתרון לבעיית ההתחלה.



דוגמה 20: הצורה הנורמלית של המשוואה הדיפרנציאלית שפתרנו קודם

$$xy' + y = x^3$$

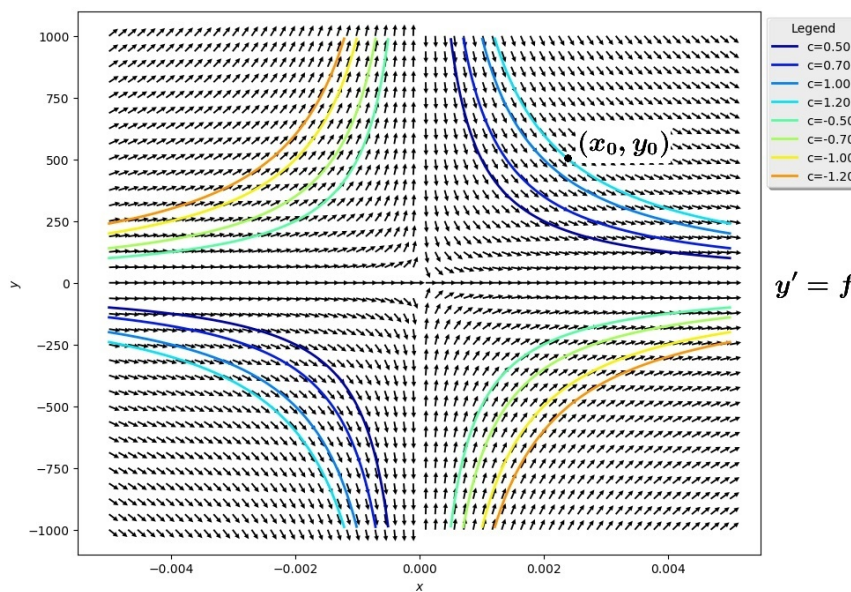
היא

$$y' = -\frac{y}{x} + x^2$$

קיימות שיטות נומריות פשוטות מאוד בכדי לשרטט את שדה הכיוונים של

$$f(x, y) = -\frac{y}{x} + x^2$$

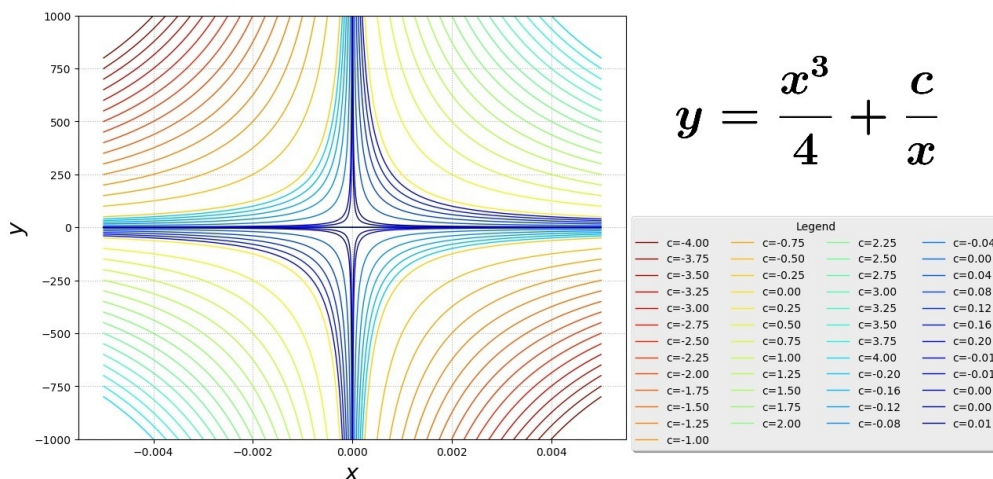
המאפשרות הצצה לצורה הגאומטרית של הפתרונות כפי שניתן ללמוד משרטוט 3.12.



$$y' = f(x, y) = -\frac{y}{x} + x^2$$

איור 3.12: שדה הכיוונים עבור המשוואה $y' = -\frac{y}{x} + x^2$

באופן ציורי ניתן לומר: בכדי למצוא את הפתרון היחיד שעובר דרך הנקודה (x_0, y_0) , יש לעמוד על נקודה זו "ולזרום בכיוון" הוקטורים בשדה. כך נראית משפחת הפתרונות החד-פרמטרית של המשוואה



איור 3.13: משפחת הפתרונות של המשוואה $xy' + y = x^3$

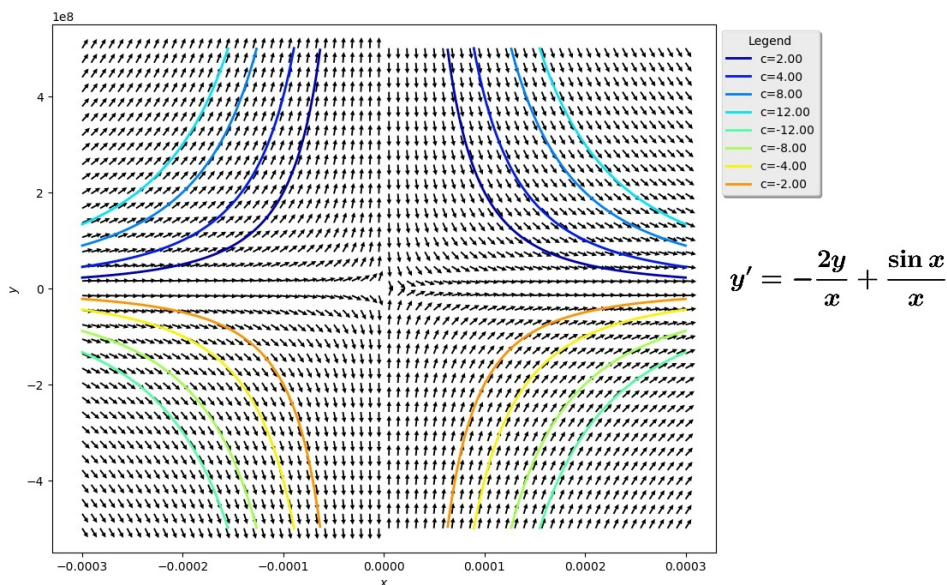
דוגמה 21: הצורה הנורמלית של המשוואה הדיפרנציאלית

$$xy' + 2y = \sin x$$

היא

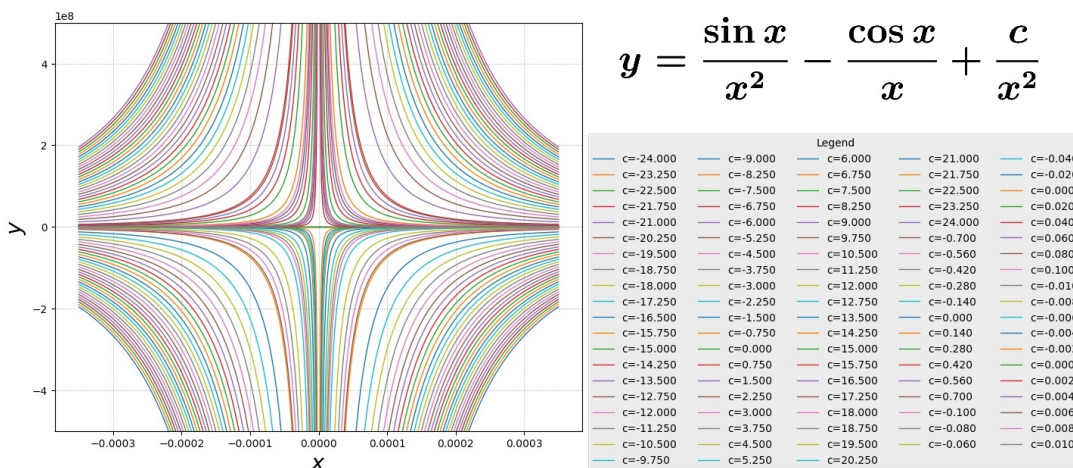
$$y' = -\frac{2y}{x} + \frac{\sin x}{x}$$

שדה הכיוונים של $f(x, y) = -\frac{2y}{x} + \frac{\sin x}{x}$ נראה כך



איור 3.14: שדה הכיוונים עבור המשוואה $y' = -\frac{2y}{x} + \frac{\sin x}{x}$

כך נראית משפחת הפתרונות החד-פרמטרית של המשוואה



איור 3.15: משפחת הפתרונות של המשוואה $xy' + 2y = \sin x$

בשתי הדוגמאות הקודמות, יש לשים לב לשני הדברים הבאים

א. אין נקודה משותפת בין כל שני פתרונות. כל הפתרונות זרים אחד לשני.

ב. אם (x, y) נקודה כלשהי במישור ($x \neq 0$) אז קיים בדיוק פתרון יחיד שעובר דרכה.

דוגמה 22: מצא פתרון לבעיית ההתחלה, ומצא מהו תחום ההגדרה המקסימלי שמשפט הקיום והיחידות מסוגל להבטיח עבור הפתרון שמצאת

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

מדובר במשוואה פרידה קלה. יש את הפתרון היחיד: $y(x) = \frac{1}{1-x}$  

הנקודה $x = 1$ היא נקודה סינגולרית למרות שאין לכך שום סימן או רמז בבעייה עצמה, ולכן הפתרון אינו קיים על כל הישר הממשי, למרות שהפונקציה $f(x, y) = y^2$ והנגזרת החלקית שלה לפי y קיימות ורציפות על כל המישור $\mathbb{R}^2$?! 

זה לא עומד בסתירה למשפט הקיום והיחידות מאחר והפונקציה $f(x, y)$ אינה חסומה מעל $\mathbb{R}^2$ כפי שנדרש במשפט 

הסימנים לבעייה מתגלים כשמנסים להפעיל את משפט הקיום והיחידות בכדי לקבל פתרון יחיד בתחום קיום מקסימלי ככל הניתן. הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x, y) = y^2$ במלבן $(-a, a) \times (1-b, 1+b)$ הוא $M = (1+b)^2$. לכן ככל שנגדיל את b , נקטין את h : 

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ a, \frac{b}{(1+b)^2} \right\}$$

נוכל לבחור ערך של a גדול כרצוננו, אך ככל שהערך של b יגדל, הערך של $\frac{b}{(1+b)^2}$ ישאף לאפס ויקטין את h בצורה דראסטית. קל לבדוק שהערך המקסימלי של הביטוי $\frac{b}{(1+b)^2}$ הוא $\frac{1}{4}$, ולכן הערך הכי גדול של h שנוכל לקבל הוא $h = \frac{1}{4}$.

תחום הקיום הכי גדול שמובטח לנו על ידי משפט הקיום והיחידות הוא אם כן $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. 

אם נשנה טיפה את תנאי ההתחלה 

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

נקבל את הפתרון: $y(x) = \frac{1}{1-2x}$

הפעם הנקודה הסינגולרית זהה ל- $x = \frac{1}{2}$, וגם לזה אין שום סימן או רמז בבעייה עצמה. 

דוגמה 23: נחזור שוב לבעיית ההתחלה הקודמת

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ראינו שיש לה פתרון יחיד $y_p(x) = \frac{1}{1-x}$ בתחום הקיום $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, שהוא הגדול ביותר שמשפט הקיום והיחידות היה מסוגל לספק לנו. למרות זאת, הפונקציה $y_p(x)$ פותרת את המשוואה על כל הקרן $(-\infty, 1)$ וקשה לשער שיש פתרון נוסף בקרן $(-\infty, 1)$ המקיים $y(0) = 1$. האם יש דרך להוכיח השערה זו?



הדרכה: הנח בשלילה שקיים פתרון נוסף $z(x)$ לבעיית ההתחלה השונה מ- $y_p(x) = \frac{1}{1-x}$, המוגדר בתחום $(a, 1)$, $a < 0$. נסמן

$$x_1 = \sup \left\{ x \mid a < x < 0, z(x) \neq \frac{1}{1-x} \right\}$$

על פי הגדרת הסופרמום נובע שקיימות נקודות x_2, x_3 בתוך הקטע $(a, 1)$ כך ש-

$$\begin{cases} x_2 \leq x_1 \leq x_3 \\ |x_2 - x_3| < \frac{1}{4} \\ z(x_2) \neq \frac{1}{1-x} \\ z(x_3) = \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

השתמש במשפט הקיום והיחידות להוכחה ש- $\frac{1}{1-x}$ הוא פתרון יחיד בקטע $(x_3 - \frac{1}{4}, x_3 + \frac{1}{4})$ וקבל סתירה לכך ש- $z(x_2) \neq \frac{1}{1-x}$.

פתרונות סתומים

§3.8

כפי שראינו בדוגמאות קודמות, שיטות הפתרון של משוואות דיפרנציאליות לא תמיד מובילות לפתרון מפורש, ואנו נאלצים במקרים רבים להסתפק בפתרונות סתומים שאין לנו שום דרך לחלץ מהם פתרון מפורש.

❖ **דוגמה 24:** משפחת הפתרונות של המשוואה

$$y' = -\frac{2xy}{(1+2y^2)}$$

נתון על ידי

$$ye^{x^2+y^2} = C$$

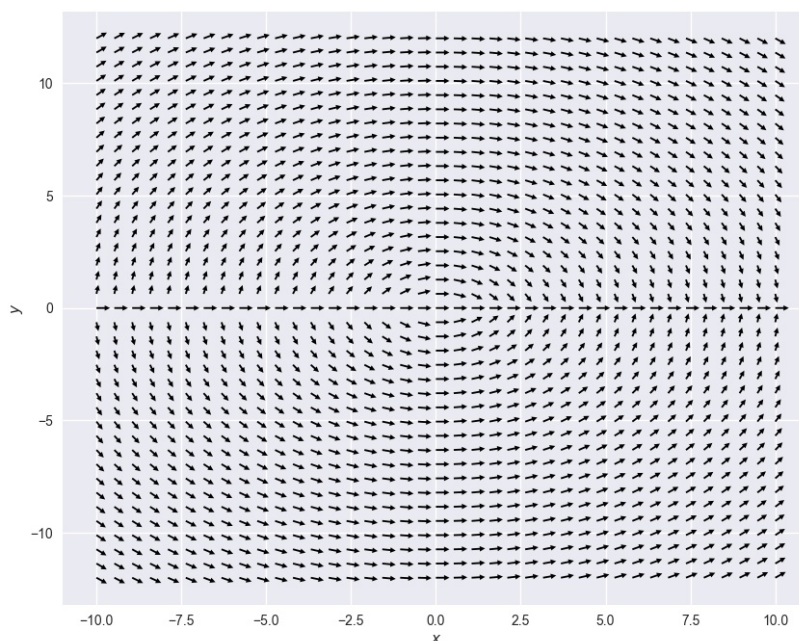
קל לבדוק זאת על ידי גזירה סתומה של השוויון.

❖ למרות שאין בידינו פתרון מפורש, ניתן ללמוד עליו ועל נגזרותיו לא מעט באמצעות גזירה סתומה (גם מסדר גבוה) ומשפטים מתמטיים מתאימים. קיימות שיטות נומריות המתבססות על שדה הכיוונים של המשוואה בכדי לחשב ערכים רצויים של הפתרונות ברמות דיוק גבוהות מאוד.

❖ שדה הכיוונים של המשוואה שלנו שורטט באמצעות תוכנת Python של פחות מ-20 שורות קוד. הוא מאפשר לנו לקבל רושם מסוים על צורת הפתרונות על ידי התבוננות בכיווני הזרימה.

❖ כמו-כן קל מאוד היום לכתוב ולהריץ קוד לשם חישוב ציור קווים אינטגרליים ועל ידי כך לחשב כל ערך רצוי של פתרון בכל רמת דיוק דרושה.





איור 3.16: שדה הכיוונים של $\frac{-2xy}{1+2y^2}$

דיון סכמטי בהוכחת משפט הקיום והיחידות שיטת הקירובים של פיקארד (Picard)

§3.9

נזכיר שוב את המשפט

משפט 3.3: (משפט הקיום והיחידות גרסה 2)

נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

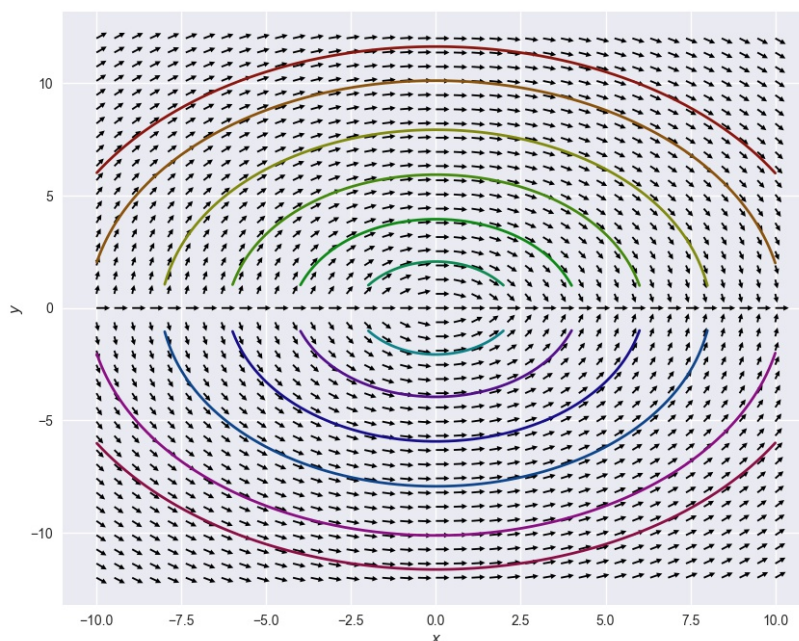
אם הפונקציות $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ רציפות בתוך מלבן סימטרי סביב הנקודה (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x_0 - a < x < x_0 + a \\ y_0 - b < y < y_0 + b \end{cases}$$

ובנוסף לכך קיים קבוע ממשי M כך ש- $|f(x, y)| \leq M$ בכל המלבן, אזי קיים פתרון אחד ויחיד בתת-קטע $(x_0 - h, x_0 + h)$, כאשר

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

נציג תיאור סכימטי לשיטת הקירובים של המתמטיקאי Émile Picard שהוכיח את משפט הקיום והיחידות באמצעותה.



איור 3.17: קווים אינטגרליים בשדה הכיוונים של $\frac{-2xy}{1+2y^2}$

שלב 1: נירמול הבעיה

§3.9.1

לשם פשטות ונוחות נניח כי בעיית ההתחלה שלנו היא סביב הנקודה (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ניתן לעשות זאת על ידי הזזת משתנים

$$\begin{cases} \hat{x} = x - x_0 \\ \hat{y} = y - y_0 \end{cases}$$

לכן נוכל להסתפק בהוכחת משפט הקיום והיחידות מצומצם לנקודה $(0, 0)$ שיראה כך:

משפט הקיום והיחידות מצומצם לנקודה $(0, 0)$:

נתונה בעיית התחלה מסדר ראשון

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

אם הפונקציות $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ רציפות בתוך מלבן סימטרי:

$$\begin{cases} -a < x < a \\ -b < y < b \end{cases}$$

ובנוסף לכך קיים קבוע ממשי M כך ש- $|f(x, y)| \leq M$ בכל המלבן, אזי קיים פתרון **אחד ויחיד** בתת-קטע $(-h, h)$, כאשר

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

שלב 2: מעבר למשוואה אינטגרלית

§3.9.2



איור 3.18: Charles Émile Picard 1856-1941

בשלב השני, אמיל פיקארד הפך את המשוואה למשוואה אינטגרלית כשהסתבר לו שהטיפול בה יהיה הרבה יותר נוח מהמשוואה הדיפרנציאלית. נניח כי קיימת פונקציה $\phi(t)$ שפותרת את הבעיה מעל קטע מסוים $(-h, h)$, כלומר

$$\begin{cases} \phi'(t) = f(t, \phi(t)), & -h < t < h \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$$

הפונקציה המורכבת $f(t, \phi(t))$ תלויה במשתנה t בלבד ולכן נוכל לרשום

$$\int_0^x \phi'(t) dt = \int_0^x f(t, \phi(t)) dt$$

אבל על פי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

$$\int_0^x \phi'(t) dt = \phi(x) - \phi(0) = \phi(x) - 0 = \phi(x)$$

ואנו מקבלים משוואה אינטגרלית

$$\phi(x) = \int_0^x f(t, \phi(t)) dt$$

ברור שכל פתרון של משוואה זו יהיה גם פתרון למשוואה הדיפרנציאלית המקורית שלנו.

- ❖ **מסתבר שיותר פשוט להוכיח את קיומו של פתרון יחיד למשוואה האינטגרלית מאשר למשוואה הדיפרנציאלית.**

שלב 3: בניית סדרת קירובים לפתרון

§3.9.3

- ❖ **נבנה סדרת פונקציות $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ שאמורה להתכנס לפתרון $\phi(x)$.**

- ❖ **הפונקציה הראשונה בסדרה היא פונקציית האפס**

$$\phi_0(x) = 0, \quad -h < x < h$$

הפונקציה $\phi_0(x)$ מקיימת את תנאי ההתחלה $\phi_0(0) = 0$ אבל לא בהכרח את המשוואה האינטגרלית (אחרת התהליך מסתיים בהצלחה!).

- ❖ **אם $\phi_0(x)$ אינה פותרת את המשוואה, אז מגדירים את הפונקציה הבאה בסדרה**

$$\phi_1(x) = \int_0^x f(t, \phi_0(t)) dt$$

ושוב ברור כי תנאי ההתחלה מתקיים $\phi_1(0) = 0$, ובמידה ו- $\phi_1(x)$ פותרת את המשוואה, סיימנו.

- ❖ **שלב האינדוקציה: אם עבור n מסוים התהליך מסתיים בהצלחה ($\phi_n = \phi_{n-1}$), סיימנו.**

אחרת נגדיר את האיבר הבא בסדרה $\phi_{n+1}(x)$ על ידי

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f(t, \phi_n(t)) dt$$

- ❖ **בכל אחד מהשלבים יש לשים לב לחמשת הדברים הבאים:**

א. האם בכלל הפונקציה $\phi_n(x)$ קיימת? שהרי לא מובטח שהאינטגרל שמגדיר אותה קיים!?

ב. האם סדרת הפונקציות $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת?

ג. אם הסדרה מתכנסת לפונקציה גבולית $\phi(x)$ האם היא פותרת את הבעיה?

ד. אם הגבול של הסדרה $\phi(x)$ הוא אכן פתרון לבעיה, האם הוא הפתרון היחיד?

ה. מהו תחום ההגדרה של הפתרון? הוא עשוי להתכווץ במהלך העבודה.

- ❖ **נשתדל לבחון את הנקודות הנ"ל באמצעות דוגמא ספציפית פשוטה יחסית, שגם מדגימה**

כיצד לתכנן אלגוריתם למציאת הפתרון. את ההוכחה המלאה למשפט הקיום והיחידות

ניתן למצוא בספרו של אורי אליאש (סעיפים 3.3, 3.4) או בספר של Boyce/Diprima.



דוגמא לשיטת הקירובים של פיקארד

§3.9.4

נפתור את בעיית ההתחלה הבאה באמצעות שיטת הקירובים של פיקארד

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = 3x^2(y + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כאמור, הקירוב הראשון בסדרה היא פונקציית האפס

$$\phi(x) = 0, \quad -h < x < h$$

קירוב זה אינו פתרון לבעייה, ולכן צריך להתקדם לקירוב הבא.

הקירוב השני בסדרה הוא

$$\phi_1(x) = \int_0^x f(t, \phi_0(t)) dt = \int_0^x f(t, 0) dt = \int_0^x 3t^2 dt = x^3$$

קיבלנו

$$\phi_1(x) = x^3$$

זה עדיין לא פותר את המשוואה. נתקדם לקירוב הבא.

הקירוב השלישי בסדרה הוא

$$\phi_2(x) = \int_0^x f(t, \phi_1(t)) dt = \int_0^x f(t, t^3) dt = \int_0^x 3t^2(t^3 + 1) dt = x^3 + \frac{1}{2}x^6$$

קיבלנו

$$\phi_2(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^6$$

גם כאן לא מקבלים פתרון

הקירוב הרביעי בסדרה הוא

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \int_0^x f(t, \phi_2(t)) dt = \int_0^x f(t, t^3 + \frac{1}{2}t^6) dt \\ &= \int_0^x 3t^2(1 + t^3 + \frac{1}{2}t^6) dt = \int_0^x (3t^2 + 3t^5 + \frac{3}{2}t^8) dt \\ &= x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\phi_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9$$

שכצפוי, לא פותר את הבעייה.



על ידי שימוש באינדוקציה ניתן להוכיח כי לכל n טבעי

$$\phi_n(x) = \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + \cdots$$

קל לבדוק כי הטור מתכנס על ידי מבחן המנה עבור טורי חזקות, ורדיוס ההתכנסות שלו הוא כל הישר הממשי. נסמן את הפונקציה הגבולית שלו על ידי $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

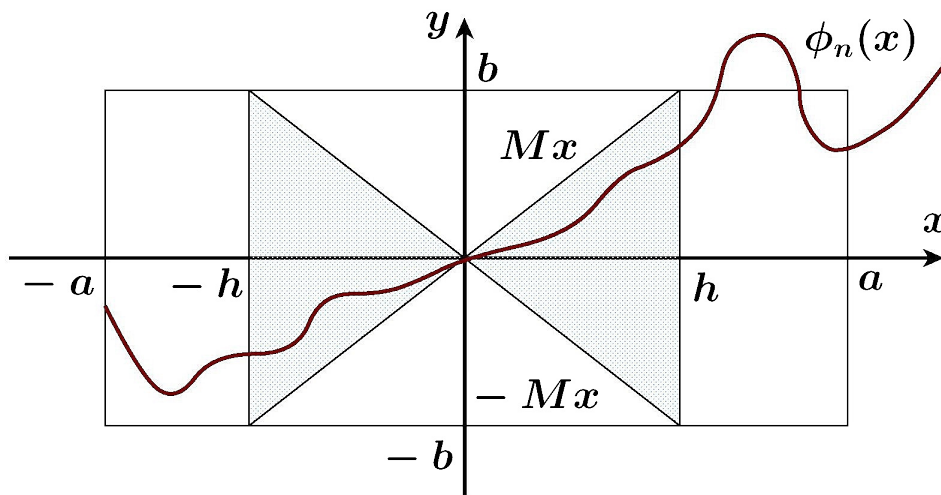
מהיכרות עם טור החזקות של הפונקציה $y = e^x$, לא קשה להוכיח כי

$$\phi(x) = e^{x^3} - 1$$

בדיקה פשוטה מוכיחה כי $\phi(x)$ היא אכן פתרון לבעיה.

תחום הקיום ויחידות הפתרון

§3.9.5



איור 3.19: תחום ההגדרה של $\phi_n(t)$ מול תחום ההגדרה של $f(x, y)$

בסיור למעלה לא ממש התייחסנו לתחום ההגדרה של הפתרון ולמה הפתרון יחיד? מבלי להיכנס לכל הפרטים (שאותם ניתן לקרוא בספרי הלימוד שציינו קודם), ננסה לתת את הרעיונות הכלליים.

נתחיל בהתייחסות לנקודה א': התרחיש הגרוע שעשוי להתרחש בשלב מסוים של התהליך הוא שהערך של $\phi_n(t)$ יחרוג מגבולות המלבן (שהוא למעשה תחום ההגדרה של $f(x, y)$), למשל אם עבור t מסוים בקטע $(-a, a)$ יתקיים $\phi_n(t) > b$, כפי שרואים בתרשים 3.19. אם זה קורה, אז הביטוי $f(t, \phi_n(t))$ לא מוגדר, ולכן גם הביטוי $\int_0^x f(t, \phi_n(t))$ לא מוגדר! ולכן התהליך ייתקע, ולא נוכל להתקדם לקירוב הבא בסדרה.

בכדי למנוע אפשרות של תרחיש מסוג זה נצטרך להצטמצם לקטע קטן יותר $(-h, h)$ שבו $f(x, \phi_n(x))$ אינה חורגת מגבולות המלבן (ראה תרשים 3.19).

לשם כך נשתמש בנתון שהפונקציה $f(x, y)$ חסומה במלבן על ידי M . לכן בכל שלב n בתהליך הקירוב $\phi_n(x)$ יקיים

$$|\phi'_{n+1}(x)| = |f(x, \phi_n(x))| \leq M$$

כלומר שיפוע הפונקציה $\phi_n(x)$ חסום על ידי M ולכן הפונקציה חסומה על ידי הישרים $y = -Mx$ ו- $y = Mx$ כפי שרואים בתרשים 3.19

$$|\phi_n(x)| \leq Mx$$

מסיבה זו, אם נצטמצם לקטע $(-h, h)$ עבור $h = \frac{b}{M}$ אז נקבל $|f(x, \phi_n(x))| \leq b$ לכל x בקטע $(-h, h)$. אם קורה ש- $a < \frac{b}{M}$ אז כמובן נצטרך לקח $h = a$ בכדי לא לחרוג מגבולות המלבן. לכן ההגדרה המדויקת של h היא

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

הוכחת ההתכנסות של סדרת הקירובים בקטע $(-h, h)$ מתבצעת על ידי החלפת סדרה הפונקציות $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בטור הפונקציות

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)]$$

תוך שימוש במבחן M של וויארשטראס, שלמעשה מבטיח התכנסות במידה שווה.

הוכחת התכנסות הטור מושגת באמצעות הוכחת אי-השוויון

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq 2bM^n \frac{x^n}{n!} \leq \frac{M^n h^n}{n!}$$

מאחר והטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n h^n}{n!}$ הוא טור מתכנס, ממבחן M של וויארשטראס נובע שגם טור הפונקציות שלנו מתכנס. הפרטים המלאים בספרים של אורי אליאש ושל Boyce/Diprima.

יחידות הפתרון: אם $\phi(x)$ ו- $\psi(x)$ שני פתרונות של המשוואה האינטגרלית

$$y(t) = \int_0^x f(t, y(t)) dt$$

כלומר לכל x בקטע $(-h, h)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^x f(t, \phi(t)) dt \\ \psi(x) &= \int_0^x f(t, \psi(t)) dt \end{aligned}$$

אזי

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x [f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))] dt$$

על פי משפט ערך הביניים (חדו"א 1) קיים ערך ביניים $\hat{y}(t)$ בין $\phi(t)$ ו- $\psi(t)$ כך ש-

$$f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t)) = f_y(t, \hat{y}(t)) \cdot [\phi(t) - \psi(t)]$$

לכן

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x f_y(t, \hat{y}(t)) \cdot [\phi(t) - \psi(t)] dt$$

לכן

$$0 \leq |\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |f_y(t, \hat{y}(t))| \cdot |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

מהרציפות של f_y נובע כי f_y חסומה על ידי K מסוים, ולכן

$$0 \leq |\phi(x) - \psi(x)| \leq K \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

נסמן

$$g(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)| dt$$

אזי $| \phi(x) - \psi(x) | = g'(x)$, ובנוסף $g(0) = 0$. אי השוויון שלנו הופך להיות

$$0 \leq g'(x) \leq Kg(x)$$

כלומר, $g(x)$ היא פתרון של בעיית אי-השוויון הדיפרנציאלי הבא

$$\begin{cases} g'(x) - Kg(x) \leq 0, & -h < x < h \\ g(x) \geq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

כופלים את אי-השוויון בגורם האינטגרציה e^{-Kx}

$$[e^{-Kx}g(x)]' = e^{-Kx}[g'(x) - Kg(x)] \leq 0$$

ומבצעים אינטגרציה על שני אגפי האי-שוויון בקטע $[0, x]$:

$$\int_0^x e^{-Kt}[g'(t) - Kg(t)] dt = e^{-Kx}g(x) \leq 0$$

קיבלנו כי $g(x) \leq 0$. אבל ידוע לנו גם כי $g(x) \geq 0$. לכן בהכרח $g(x) = 0$ לכל x בקטע $(-h, h)$. כלומר $\phi(x) = \psi(x)$ לכל x בקטע $(-h, h)$, ולכן הפתרון למשוואה הדיפרנציאלית המקורית שלנו הוא יחיד.

נספח: משפט קיום ויחידות עבור משוואה דיפרנציאלית מסדר n

§3.10

להשלמת התמונה נסיים את הפרק בניסוח של משפט הקיום והיחידות למשוואות מסדר כלשהו.

משפט 3.5: נתונה משוואה דיפרנציאלית מנורמלת מסדר n , בצירוף של n תנאי התחלה

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ y''(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

כאשר $f(x, z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ פונקציה רציפה של $n+1$ משתנים, בעלת n נגזרות חלקיות רציפות $f_{z_0}, f_{z_1}, \dots, f_{z_{n-1}}$, בסביבת הנקודה $(x_0, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. אזי קיימת סביבה $(x_0 - h, x_0 + h)$ שבה קיים פתרון יחיד $y(x)$ עבור המשוואה וכל תנאי ההתחלה, כך שכל הנגזרות $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ קיימות ורציפות בסביבה $(x_0 - h, x_0 + h)$.

תרגילים לפרק 3

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ו/או מלאים לחלק קטן של התרגילים. אבל לפני שלוחצים על הקישור מומלץ מאוד לפתור בכוחות עצמך! פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן. נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. מצא פתרון כללי

א. $xy' - y = y^3$

ב. $xyy' = 1 - x^2$

ג. $y' \tan x = y$

ד. $y' - xy^2 = 2xy$

ה. $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$

ו. $y' = 10^{x+y}$

ז. $(x+1)dx + (y-1)dy = 0$

ח. $\cos \sqrt{x} dx - \sqrt{x} dy = 0$

ט. $\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$

י. $e^x(1+e^y)dx + e^y(1+e^x)dy = 0$

יא. $xy^3y' = x^4 + y^4$



2. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} (xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y' \sin x + y \ln y = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} 2xyy' + x^2 - y^2 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} xy' + y - e^x = 0 \\ y(a) = b \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{cases} y' - 2y = -x^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} xy' + y = 2x + 1, \quad x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{cases} (x - 2)dx + (y - 1)dy = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases} \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} (1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad \text{י.}$$

$$\begin{cases} y'\sqrt{1-x^2} = x \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{יא.}$$

$$\begin{cases} y' \tan x = 1 + y \\ y(\frac{\pi}{6}) = -0.5 \end{cases} \quad \text{יב.}$$

3. מצא פתרון כללי

$$xy' - y = x \tan \frac{y}{x} \quad \text{ב.} \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{א.}$$

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x} \quad \text{ג.}$$

$$(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad \text{ד.}$$

$$x(y' - y) = e^x \quad \text{ה.} \quad y' - \frac{y}{x} = x$$

$$xy' - 2y = x^3 + x \quad \text{ו.} \quad xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x} \quad \text{ז.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad \text{ח.} \quad y' \sin x - y \cos x = 1 \quad \text{ט.}$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad \text{י.}$$

4. מצא פתרון כללי

$$xy dy = (y^2 + x)dx \quad \text{ב.} \quad xy^2 y' = x^2 + y^2 \quad \text{א.}$$

$$y' + y = xy^3 \quad \text{ג.} \quad x^2 y' = y(x + y) \quad \text{ד.}$$

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2 \quad \text{ה.} \quad y' + x^3 \sqrt{y} = 3y \quad \text{ו.}$$

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0 \quad \text{ז.}$$

$$2(1 + \sqrt{x^2 - y})xdx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0 \quad \text{ח.}$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad \text{ט.}$$

$$xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{י.} \quad \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0 \quad \text{יא.}$$

$$\left(y + \frac{1}{1 + x^2}\right) dx + \left(x - \frac{1}{1 + y^2}\right) dy = 0 \quad \text{יב.}$$

$$xy^2 y' = x^2 + y^3 \quad \text{יג.} \quad xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y \quad \text{יד.}$$

$$(x + 1)(yy' - 1) = y^2 \quad \text{טו.}$$

5. מצא פתרון כללי למשוואות הבאות על ידי מציאת גורם אינטגרציה מהצורה $\mu = \mu(x)$ או מהצורה $\mu = \mu(y)$.

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad \text{א.}$$

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0 \quad \text{ב.}$$

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0 \quad \text{ג.}$$

$$(x^2 y - 1)dx + (x^3 + x^2 \cos y)dy = 0 \quad \text{ד.}$$



$$(2xy \ln y + y^2 \cos x)dx + (x^2 + y \sin x)dy = 0 \quad \text{ה.}$$

6. פתור את המשוואה הבאה באמצעות גורם אינטגרציה מהצורה

$$\mu(x, y) = f(xy)$$

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2 y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} + \frac{2}{xy^2} + \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

7. מצא פתרון כללי

$$(x + y)y' = y \quad \text{א.}$$

$$(x - 2)y' = y^2 \quad \text{ב.}$$

$$y' = 2xy + x \quad \text{ג.}$$

$$(x^2 + 2xy^3)dx + (y^2 + 3x^2y^2)dy = 0 \quad \text{ד.}$$

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x \quad \text{ה.}$$

$$(2e^x + y^4)dy - ye^x dx = 0 \quad \text{ו.}$$

$$\tan x \cdot \frac{dy}{dx} - y = a \quad \text{ז.}$$

$$(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)dy = 0 \quad \text{ח.}$$

$$0 < x < \infty, \quad \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0 \quad \text{ט.}$$

$$x(y^4 - x^2)dy + y(y^4 + x^2)dx = 0 \quad \text{י.}$$

$$(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0 \quad \text{יא.}$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^3} \quad \text{יב.}$$

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1} \quad \text{יג.}$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos(y - x) \quad \text{יד.}$$

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0 \quad \text{טו.}$$

$$3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy \quad \text{טז.}$$

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{יז.}$$



$$y^2 dx - (xy + x^3) dy = 0 \quad \text{יח.}$$

$$y^2 dx + (xy + \tan(xy)) dy = 0 \quad \text{יט.}$$

$$\frac{2}{3} xy y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2 \quad \text{כ.}$$

$$x^3 dy - y(x^2 + y^2) dx = 0 \quad \text{כא.}$$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{כב.}$$

$$(y + \sqrt{xy}) dx = x dy \quad \text{כג.}$$

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \quad \text{כד.}$$

$$(2x - 4y + 6) dx + (x + y - 3) dy = 0 \quad \text{כה.}$$

$$(2x + y + 1) dx - (4x + 2y - 3) dy = 0 \quad \text{כו.}$$

$$x - y - 1 + (y - x + 2) y' = 0 \quad \text{כז.}$$

$$(y + 2) dx = (2x + y - 4) dy \quad \text{כח.}$$

$$y' = 2 \left(\frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2 \quad \text{כט.}$$

$$y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \tan \frac{y - 2x}{x + 1} \quad \text{ל.}$$

$$2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2} \quad \text{לא.}$$

$$2y' + x = 4\sqrt{y} \quad \text{לב.}$$

$$y + y' \ln^2 y = (x + 2 \ln y) y' \quad \text{לג.}$$

$$y' = \frac{1}{x - y^2} \quad \text{לד.}$$

$$x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y} \quad \text{לה.}$$

$$(x + y)^2 y' = 1 \quad \text{לו.}$$

$$2x^3 y y' + 3x^2 y^2 + 7 = 0 \quad \text{לז.}$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x \right) dy \quad \text{לח.}$$



$$\text{לט. } xy' = e^y + 2y'$$

$$\text{נ. } dy + (xy - xy^3)dx = 0$$

$$\text{מא. } \frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$$

$$\text{מב. } (xy^4 - x)dx + (y + yx)dy = 0$$

$$\text{מג. } (y + \sin x)dy + (y \cos x - x^2)dx = 0$$

$$\text{מד. } yy' + y^2 \cot x = \cos x$$

$$\text{מה. } (e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0$$

$$\text{מו. } y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$$

$$\text{מז. } y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$$

$$\text{מח. } (x \cos y + \sin 2y)y' = 1$$

$$\text{מט. } (4xy - 3)y' + y^2 = 1$$

$$\text{נ. } (2x - 2y - 1)dx - (y - x - 1)dy = 0$$

$$\text{נא. } y' = \frac{1}{x \tan(y) + e^{5 \sin y}}$$

$$\text{נב. } 0 < x < \infty, (x^4 - x^4y + x)y' = 3$$

8. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} y' = 2 + \sqrt{9 - (y - 2x - 1)^2} \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \\ y(2) = -2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} xy' - 3y = x^4 e^x \\ y(1) = e \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' - xy = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} xy' - 2y = x^3 e^x \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{cases} y' \sin x - y \cos x = 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} xy' - 4y = x^2 \sqrt{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} y' - y \tan x = \sec x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ט.}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (2x-1)dy = (y+1)dx \\ y(5) = 0 \end{array} \right. . \quad \left\{ \begin{array}{l} y' - y \tan x = y^4 \cos x \\ y(\pi) = -1 \end{array} \right. . \text{ט.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0 \\ y(1) = 1 \end{array} \right. . \text{יב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ y(0) = 1 \end{array} \right. . \text{יא.}$$

9. האם הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \sin x(y-1) \\ y(2) = 1 \end{array} \right.$$

חותך את ציר- x ? נמק.

רמז: נסה לנחש פתרון קבוע למשוואה.

10. נתונה בעיית ההתחלה הבאה

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \sin xy(y-2) \\ y(5) = 1 \end{array} \right.$$

א. הוכח כי הפתרון של הבעיה חיובי בכל תחום ההגדרה שלו

ב. הוכח כי הפתרון של הבעיה חסום על ידי $M = 2$ בכל תחום ההגדרה שלו

רמז: נחש שני פתרונות קבועים לבעיה

11. נתונה משפחת העקומים $\cos y = ke^{x^2}$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

12. נתונה משפחת העקומים $y^3 = -3 \ln(kx)$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

13. נתונה משפחת העקומים $y^2 = ke^x + x + 1$.

מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

14. נתונה משפחת העקומים $x^2 + y^2 = ky$, $-\infty < k < \infty$.

א. מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.

ב. מצא את העקומים משתי המשפחות שנחתכים בנקודה $(1, 2)$.

15. נתונה משפחת העקומים $x^2 + (y+k)^2 = k^2 - 1$, $|k| > 1$.

א. מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה הנתונה.



ב. מצא את המשפחה האורתוגונלית למשפחה:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = Cy \\ -\infty < C < \infty \end{cases}$$

ג. מצא את העקומים משתי המשפחות האורתוגונליות שנחתכים בנקודה (1, 2).

16. במשפחה האורתוגונלית למשפחת העקומים

$$x^2 + y^2 = 18 \ln |y| + k$$

קיים מעגל אחד ויחיד. מצא את משוואתו והסבר את דרך הפתרון.

17. מצא עקום מישורי העובר דרך הנקודה (1, 1) וניצב לכל העקומים במשפחה

$$(x + k)y + kx - 1 = 0, \quad -\infty < k < \infty$$

18. נתונה משפחת האליפסות הקנוניות

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

אשר רוחבן (בכיוון x) גדול פי שלושה מגובהן (בכיוון y). מצא את משוואת העקום האורתוגונלי למשפחה זו ועובר דרך הנקודה (2, 1).

19. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' + \frac{\ln^2 x}{\sin^2 x} = 0 \\ y(4) = 0 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפתרון שמצאת?

20. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - 1}{y} \cdot \sin(x^3) \\ y(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

א. הוכח כי הפתרון שמצאת חסום מעל תחום ההגדרה שלו

ב. מהם תחומי העליה והירידה של הפתרון?

הדרכה: שים לב כי $y = -1$ וגם $y = 1$ הם שני פתרונות של המשוואה. העזר בתכונת הזרות של משפחת הפתרונות (תחת תנאי משפט הקיום והיחידות כמובן).

21. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' - 2x = \sqrt[3]{(y - x^2 - 2)^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

א. מצא שני פתרונות שונים לבעיה

ב. הסבר מדוע תוצאה זו אינה סותרת את משפט הקיום והיחידות?

הדרכה: השתמש בהצבה $v(x) = y(x) - x^2 - 2$. בדוק פתרונות סינגולריים.

22. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' + y(4y - 8)e^{4xy} = 7x^5 \sin(\pi y) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

הוכח כי הפתרון $y(x)$ של הבעיה חסום (מלמעלה ומלמטה) מעל כל תחום ההגדרה שלו.
הדרכה: מצא שני פתרונות קבועים למשוואה.

23. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = \frac{x}{y} + \ln[1 + (y - x)^2] \cdot \ln\left[1 + \left(y - \sqrt{x^2 + 3}\right)^2\right]$$

מבלי לפתור את המשוואה, ענה על שתי השאלות הבאות

א. נחש שני פתרונות שונים $y_1(x)$, $y_2(x)$ למשוואה

ב. יהי $\phi(x)$ פתרון של המשוואה בקרן $(0, \infty)$ המקיים $\phi(1) = \frac{3}{2}$. הוכח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = 1$$

הדרכה: בדוק מתי פונקציית $\ln$ מתאפסת?

24. נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = (2 - \sin^2 x)(y^2 - y^5) \\ y(0) = 0.25 \end{cases}$$

א. האם קיים פתרון לבעיה? אם כן, האם הוא יחיד?

ב. אם יש פתרון, האם קיים עבורו $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$?

25. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה בצירוף תנאי התחלה

$$\begin{cases} (16 - y^2) \cos(y) dx + (y^2 + 5y - 15) dy = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

הוכח כי פתרונה חסום על כל תחום ההגדרה שלו.

הדרכה: נסה לנחש שני פתרונות קבועים. השתמש במשפט הקיום והיחידות.

26. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y' = (x^3 + y^3)(2 \cos y - 1)$.
הוכח שכל פתרון שלה מתכנס לגבול סופי כאשר x שואף לאינסוף.
הדרכה: נסה לנחש אינסוף פתרונות קבועים ...

27. יהי $y(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \left(y - \sqrt{2x^2 + 1}\right)^2 \left(y - \sqrt{2x^2 + 5}\right)^2 + \frac{2x}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$.

- הדרכה:** יש להשתמש במשפט הקיום והיחידות. בדוק פתרונות סינגולריים.

28. נתונה המשוואה $y' = 2\sqrt{y - 2x - 1} \cdot e^{-\sqrt{y - 2x - 1}} + 2$.
מצא שני פתרונות מפורשים (כלומר בצורה $y = f(x)$) של המשוואה המקיימים את תנאי ההתחלה $y(3) = 7$, והסבר מדוע זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות?

29. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{x}, \quad 0 < x < \infty$$

- מצא שני פתרונות של המשוואה המקיימים $y(1) = 1$ והסבר מדוע זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות?

30. יהי $y(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{4y} + \left(2y - \sqrt{x^2 + 1}\right)(2y - x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

ידוע כי $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x}$.

31. מצא למשוואה

$$ydx - (x^2 + y^2 + x)dy = 0$$

- גורם אינטגרציה מהצורה $f(x^2 + y^2)$. פתור את המשוואה ובטא את הפתרון שמצאת בצורה $x = x(y)$.

32. מצא למשוואה

$$xdx + (y + 4y^3x^2 + 4y^5)dy = 0$$



גורם אינטגרציה מהצורה $f(x^2 + y^2)$. מצא את פתרונה הכללי.

33. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$xdy + ydx - 3x^3y^2dy = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$. מצא את גורם האינטגרציה.

34. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$x^3y^3(2ydx + xdy) - (5ydx + 7xdy) = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$. מצא את α, β , ומצא פתרון פרטי העובר דרך הנקודה $(1, 1)$.

35. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$. מצא את α, β .

36. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$(-x + y - 2)dx + (-5x - 3y - 6)dy = 0$$

ידוע כי למשוואה יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x, y) = \mu(x + 3y)$. מצא את גורם האינטגרציה.

37. יהיו $y_1(x), y_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = F(x, y)$$

בקטע (α, β) , כאשר $F(x, y)$ וגם $F_y(x, y)$ מוגדרות ורציפות על כל המישור. הוכח שאם קיימת נקודה x_0 בקטע (α, β) שעבורה $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ אז $y_1(x) < y_2(x)$ לכל נקודה x בקטע.

38. בלון אוויר שרדיוסו ההתחלתי R מאבד אוויר בקצב של $-3V(t)$ סמ"ק לשנייה, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t . לאחר כמה שניות נפח הבלון יגיע לשמינית מנפחו ההתחלתי?

39. במיכל מיים בגודל של 500 ליטרים מיים הומסו 2 ק"ג מלח באופן אחיד. לתוך המיכל



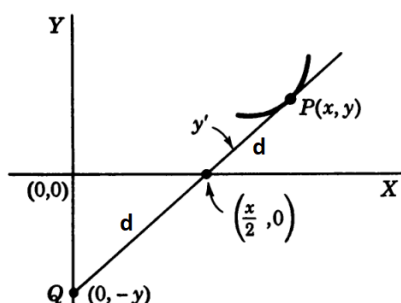
מוזרמים מיים מלוחים בריכוז של 0.1 ק"ג מלח לליטר בקצב של 25 ליטרים לדקה, ובאותו הזמן אותה כמות נוזל מנוקזת מחוץ למיכל (דרך פתח אחר). חשב את ריכוז המלח לאחר 10 דקות.

40. קצב הגידול של אוכלוסיית העולם בשנים 1975-2015 הוא $r = 0.02$ לשנה. ידוע כי בשנת 1980 אוכלוסיית העולם מנתה 4 מיליארד בני אדם. מה היה גודל האוכלוסייה בשנת 2010? במידה וקצב הגידול הזה יישאר נכון גם בעתיד, מה תהיה אוכלוסיית העולם בשנת 2050?

41. מצא את משוואת העקום המישורי אשר הנורמל שלו בכל נקודה עובר גם דרך הנקודה $(1, 1)$.

42. טיפת גשם נופלת מענן שנמצא במצב מנוחה, בגובה 2 קילומטרים מעל פני הים. על טיפת הגשם פועלים שני כוחות בלבד: כוח הכבידה של כדור הארץ, חיכוך אווירי בניגוד לכיוון הנפילה שגודלו kv^2 , כאשר k הוא קבוע החיכוך, $v(t)$ מהירות טיפת הגשם בזמן t שניות מאז רגע הנפילה. מצא את נוסחת המהירות של טיפת הגשם, ומתי היא תגיע לפני הים?

43. מצא את משפחת העקומים המישוריים $F(x, y) = 0$, $x > 0$, כך שכל משיק לעקום נחצה על ידי ציר- x בין נקודת ההשקה P ונקודת החיתוך עם ציר- y .



איור 3.20: כל משיק לעקום נחצה על ידי ציר- x בין נקודת ההשקה P ונקודת החיתוך עם ציר- y

44. מצא את משפחת העקומים המישוריים $F(x, y) = 0$, כך שעבור כל משיק לעקום, המרחק d בין נקודת ההשקה ונקודת החיתוך עם ציר- x הוא קבוע.

45. לתוך מיכל מיים של 100 ליטר מומסים 30 ק"ג מלח בטעות במקום 20 ק"ג. בכדי לתקן את הטעות, מנקזים מהמיכל 3 ליטרים של נוזל לדקה דרך פתח תחתון, בקצב קבוע. באותו זמן מזרימים לתוך המיכל 3 ליטרים מיים טהורים לדקה. בהנחה שריכוז המלח במיכל נשאר אחיד לאורך כל התהליך (על ידי עירבוב קבוע), כמה זמן יידרש בכדי להגיע לריכוז הרצוי?

46. מדחום שהיה מאוחסן בטמפרטורה של T_0 מעלות מוכנס לתוך אמבט מיים חמים

בטמפרטורה קבועה של T מעלות בזמן $t = 0$.

א. רשום משוואה דיפרנציאלית עבור פונקציית הטמפרטורה $y(t)$ של המדחום כפונקציה של הזמן t (בדקות).

ב. מצא נוסחה מפורשת עבור $y(t)$ אם ידוע שלאחר t_1 דקות המדחום הראה את הטמפרטורה T_1 . יש לבטא את $y(t)$ באמצעות T, T_0, T_1, t_1, t .

47. מצא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון שפתרונה הכללי הוא

$$y = (x^2 + C)^3 + 1$$

48. מצא את כל הפונקציות $q(x)$ אשר עבורן למשוואה

$$(x^2 + y)dx + q(x)dy = 0$$

יש גורם אינטגרציה $\mu(x) = x$.

קישור לפתרונות 



פרק 4

משוואות דיפרנציאליות לינאריות

מסדר $n > 1$

❶ לאחר עיסוק ממושך במשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון אנו עוברים לטפל במשוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה יותר ($n > 1$). נתחיל בהיכרות עם כמה דוגמאות ידועות

❷ משוואות לינאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים: $y'' - 5y' + y = e^x$

❷ משוואות Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = y$

❷ משוואות לז'נדר: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) = 0$

❷ משוואת הקפיץ: $my'' + cy' + ky = F(x)$

❷ נפילה חופשית עם חיכוך אווירי: $my''(t) = mg - ky'(t)$

❸ נפתור למשל את המשוואה הפשוטה הבאה

$$y'' = 6x$$

זוהי משוואה לינארית מסדר שני. על ידי שתי אינטגרציות פשוטות נקבל את הפתרון הכללי שלה

$$y' = 3x^2 + C_1$$

$$y'' = x^3 + C_1x + C_2$$

זוהי אכן משפחה דו-פרמטרית של פתרונות שכוללת את כל הפתרונות של המשוואה. מעורבים בה שני קבועים, ולכן בבעיית התחלה יידרשו שני תנאי התחלה: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

❸ **דוגמה 1:** הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$



הוא $y(x) = x^3 + 5x - 1$.

באופן כללי, הפתרון הכללי של משוואות דיפרנציאליות מסדר n יכללו n קבועים. ⚡

דוגמה 2: על ידי הורדת סדר, פתור את משוואת ⚡

הנפילה חופשית עם חיכוך אווירי

$$my''(t) = mg - ky'(t)$$

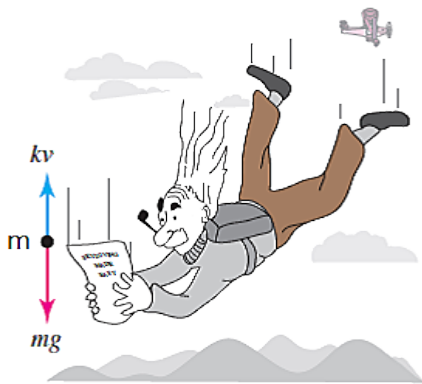
(שהוצגה בשיעור המבוא של הקורס - ראה פרק 1),

כאשר

m - היא מסת הגוף הנופל

g - קבוע גרביטציה

k - קבוע החיכוך



איור 4.1: נפילה חופשית עם חיכוך אווירי

פתרון: אם נסמן $v(t) = y'(t)$ (משמעות פיזיקאלית - מהירות), נקבל משוואה ליניארית מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$$

שפתרונה הכללי הוא

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

ולכן

$$y(t) = \int v(t) = \frac{mgt}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}} + c_2$$

דוגמה 3: פתור את בעיית ההתחלה על ידי הורדת סדר ⚡

$$\begin{cases} y''' - y'' = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 8 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

דוגמה 4: מצא פתרון כללי עבור המשוואה ⚡

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad 0 < x < \infty$$

דיון תאורטי

§4.1

❖ הצורה הכללית של משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n הוא

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

כאשר כל הפונקציות $a_i(x)$ רציפות בקטע פתוח (α, β) . כמובן האפשרות ש- $\alpha = -\infty$ או $\beta = \infty$ כלולה.

❖ כאשר $g(x) \equiv 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

❖ אנו נניח גם כי $a_n(x)$ אינה פונקציית האפס (אחרת סדר המשוואה הוא $n-1$) ולכן נוכל לחלק את המשוואה ב- $a_n(x)$ ולקבל את הצורה הנורמלית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

❖ בפתרון הכללי של משוואה כזאת יתקבלו n קבועים $c_1, c_2, \dots, c_n$, ובכדי לכפות פתרון יחיד נזדקק ל- n תנאי התחלה.

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ y''(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$



משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n

משפט 4.1: נתונה משוואות דיפרנציאלית ליניארית מסדר n עם n תנאי התחלה

$$(4.1) \quad \begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ y''(x_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

כאשר

א. $p_i(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות בקטע (α, β) , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

ב. הנקודה x_0 שייכת לקטע: $\alpha < x_0 < \beta$

ג. הערכים $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, מספרים ממשיים שרירותיים

אזי קיים פתרון אחד ויחיד $\phi(x)$ למשוואה על כל הקטע (α, β) המקיים את כל תנאי ההתחלה.

משפט הקיום והיחידות עבור משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר n מבטיח קיום פתרון בסביבה מסוימת $(x_0 - h, x_0 + h)$, שעשויה להיות קטנה יותר מתחום ההגדרה של מקדמי המשוואה (α, β) . אבל המשפט הנ"ל טוען טענה חזקה יותר: תחום ההגדרה של הפתרון זהה לתחום ההגדרה של מקדמי המשוואה. הוכחת משפט זה חורגת ממסגרת הקורס ולא תכוסה.

תרגיל 4.1: באיזה קטעים מובטח לנו שלמשוואה הבאה יהיו פתרונות?

$$x(x-1)y'' + e^x y' + x^2 y = \cos x$$

תרגיל 4.2: מהו הפתרון היחיד של בעיית ההתחלה הבאה?

$$\begin{cases} y'' + x^3 y + (x^2 - 1)y = 0 \\ y(5) = 0 \\ y'(5) = 0 \end{cases}$$

רמז: מדובר במשוואה ליניארית הומוגנית

תרגיל 4.3: נניח ש- $y_1(x)$ הוא פתרון של המשוואה

$$(4.2) \quad y'' + x^3 y + (x^2 - 1)y = 0$$

המקיים

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases}$$

ונניח ש- $y_2(x)$ הוא פתרון שני של (4.2) שמקיים

$$\begin{cases} y_2(0) = 1 \\ y_2'(0) = 0 \end{cases}$$

הוכח: אם $y_3(x)$ הוא פתרון של המשוואה (4.2) המקיים

$$\begin{cases} y_3(0) = 1 \\ y_3'(0) = 1 \end{cases}$$

אז בהכרח $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ לכל x ממשי!

❖ **תרגיל 4.4:** בהמשך לתרגיל הקודם, מה תוכל לאמר על פתרון $y_4(x)$ של משוואה (4.2) שמקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y_4(0) = 15 \\ y_4'(0) = -32 \end{cases}$$

❖ **טענה 4.2:** אם $y(x)$ הוא פתרון של המשוואה (4.2) המקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

אז בהכרח $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ לכל x ממשי.

משוואות הומוגניות ועקרון הסופרפוזיציה

§4.3

❖ כאמור, כאשר אגף ימין של משוואה דיפרנציאלית לינארית הוא אפס, היא נקראת **משוואה הומוגנית**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

למשוואות הומוגניות יש תכונות מיוחדות שהופכות אותן לנוחות יותר לטיפול.

❖ נתחיל בחקירת משוואות לינאריות הומוגניות ונתקדם בהמשך למשוואות לינאריות לא-הומוגניות.



משפט 4.3: אם

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$$

היא קבוצה של k פתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ואם $c_1, c_2, \dots, c_k$ הם מספרים ממשיים שרירותיים, אזי הפונקציה

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

גם היא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור משוואה הומוגנית מסדר 2

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ההוכחה למקרה הכללי זהה לחלוטין. כאמור, נתון ש-

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

לכן

$$\phi'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_k y_k'(x)$$

$$\phi''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + \dots + c_k y_k''(x)$$

לכן

$$\phi''(x) + p_1(x)\phi'(x) + p_0(x)\phi(x)$$

$$= [c_1 y_1''(x) + \dots + c_k y_k''(x)] + p_1(x) [c_1 y_1'(x) + \dots + c_k y_k'(x)]$$

$$+ p_0(x) [c_1 y_1(x) + \dots + c_k y_k(x)]$$

$$= c_1 [y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_0(x)y_1(x)] + \dots + c_k [y_k''(x) + p_1(x)y_k'(x) + p_0(x)y_k(x)]$$

$$= 0 + \dots + 0 = 0$$

קיבלנו כי $\phi(x)$ גם הוא פתרון של המשוואה הליניארית ההומוגנית.

כל ביטוי מהצורה

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

נקרא **צירוף ליניארי** או **קומבינציה ליניארית**.

בפירוט יתר אומרים כי הפונקציה $\phi(x)$ היא **צירוף ליניארי של** $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)\}$.

❖ **דוגמה 5:** קל לבדוק שהפונקציות $\sin x$, $\cos x$, הן פתרונות של המשוואה

$$y'' + y = 0$$

על סמך המשפט האחרון נוכל להסיק שעבור כל שני מספרים ממשיים c_1, c_2 , גם $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ הוא פתרון של המשוואה. האם

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

הוא הפתרון הכללי של המשוואה?
בהמשך נוכיח שהתשובה לשאלה זו חיובית.

אופרטורים דיפרנציאליים (Differential Operators)

§4.3.1

❖ בהוכחה של המשפט האחרון נאלצנו להצטמצם למשוואות לינאריות מסדר 2 מאחר ואורך שורה של דף סטנדרטי אינו מספיק בכדי להכיל צירופים לינאריים ארוכים מדי, אז מרוב עצים לא רואים את היער. מצבים כאלה מאלצים אותנו לפתח שיטות סימון שיחסכו במלל רב וישקפו את המבנה הלוגי בצורה יותר קומפקטית.

❖ למטרה זו פותח נושא של **אופרטורים לינאריים** עם אלגברה מתאימה כחלק תשתיתי של תחום האליזה הפונקציונלית. מדובר בהעתקות בין מרחבי פונקציות.

❖ הרעיון הבסיסי הוא להתייחס לסימון $\frac{d}{dx}$ כאל העתקה המקבלת כקלט פונקציה $f(x)$ ומייצרת פונקציה חדשה $f'(x)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

או בצורה פשוטה יותר

$$\frac{d}{dx}[y] = y'$$

❖ באותו אופן מוגדרים האופרטורים $\frac{d^n}{dx^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n}[y] = y^{(n)}$$

לפעמים האופרטורים האלה מסומנים גם על ידי D, D^n, D_x, D_x^n . ולכן משוואות דיפרנציאליות כמו

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

נוכל לפעמים לרשום גם בצורה

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 3 \frac{d}{dx} + 2 \right) [y] = 0$$



או

$$(D^2 - 3D + 2)[y] = 0$$

❖ נוכל לחבר כל שני אופרטורים נתונים ולקבל אופרטור חדש L . לדוגמא:

$$L = \frac{d^3}{dx^3} + \frac{d}{dx}$$

נוכל להפעיל את האופרטור החדש L באופן הבא:

$$L[f(x)] = \left(\frac{d^3}{dx^3} + \frac{d}{dx} \right) [f(x)] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)] = f'''(x) + f'(x)$$

נוכל לכפול כל אופרטור בביטוי $p(x)$ (כולל קבועים) ולקבל מגוון רחב מאוד של אופרטורים כגון

$$L_1 = \frac{d^3}{dx^3} + 5\frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 7$$

$$L_2 = \frac{d^3}{dx^3} - 2e^x \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$$

$$L_3 = \frac{d^4}{dx^4} - 5x \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \frac{d}{dx} - 4$$

או בצורה יותר נוחה לקריאה

$$L_1 = D^3 + 5D^2 - 2D + 7$$

$$L_2 = D^3 - 2e^x D^2 + 2D$$

$$L_3 = D^4 - 5xD^3 - 3D^2 + x^2D - 4$$

❖ אפשר לדמות את האופרטור L גם לסוג של אלגוריתם או סדרת הוראות לביצוע סדרת פעולות על פונקציה נתונה.

❖ למשל האופרטור L_2 מהרשימה הקודמת שקול למעשה לסדרת ההוראות הבאה:

א. גזור את הפונקציה שלוש פעמים

ב. הוסף לתוצאה את מכפלת הנגזרת השנייה ב- $-2e^x$

ג. הוסף לתוצאה את מכפלת הנגזרת הראשונה ב- 2

❖ נפעיל לדוגמא את האופרטור L_3 על הפונקציה $y = \sin x$

$$L_3[y] = (D^4 - 5xD^3 - 3D^2 + x^2D - 4)[y]$$

$$= y'''' - 5xy''' - 3y'' + x^2y' - 4y$$

$$= \sin x - 5x(-\cos x) - 3(-\sin x) + x^2 \cos x - 4 \sin x$$

$$= \sin x + 5x \cos x + 3 \sin x + x^2 \cos x - 4 \sin x$$

$$= (x^2 + 5x) \cos x$$

❖ יש לשים לב לכך שהקבוע 7 באופרטור L_1 מתורגם לפעולה $7y$.



הגדרה 4.1: אופרטור L נקרא **אופרטור ליניארי** אם יש לו את שתי התכונות הבאות

א. עבור כל שתי פונקציות $f(x)$, $g(x)$

$$L[f + g] = L[f] + L[g]$$

ב. עבור כל פונקציה $f(x)$, ועבור כל קבוע ממשי c

$$L[cf] = cL[f]$$

ניתן לאחד את שתי הדרישות לדרישה אחת: L הוא אופרטור ליניארי אם ורק אם לכל שתי פונקציות $f(x)$, $g(x)$, ולכל שני מספרים ממשיים c_1, c_2 ,

$$L[c_1 f + c_2 g] = c_1 L[f] + c_2 L[g]$$

התכונה האחרונה נקראת **לפעמים עיקרון הסופרפוזיציה**.

הגדרה 4.2: אופרטור L נקרא **אופרטור דיפרנציאלי** אם הוא סכום סופי של אופרטורים

$$p(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

דוגמה 6: פגשנו כבר למעלה את שלושת הדוגמאות הבאות של אופרטורים דיפרנציאליים

$$L_1 = D^3 + 5D^2 - 2D + 7$$

$$L_2 = D^3 - 2e^x D^2 + 2D$$

$$L_3 = D^4 - 5xD^3 - 3D^2 + x^2 D - 4$$

כאמור אופרטור היא העתקה בין שני מרחבי פונקציות (למעשה מרחבים וקטוריים כפי שהם מטופלים בשדה האלגברה הליניארית). אופרטור דיפרנציאלי נקרא **מסדר n** אם סדר הגזירה הכי גבוה שמופיע בו הוא n . המרחב הליניארי עליו הוא פועל מסומן בדרך כלל על ידי $\mathcal{C}^n(\alpha, \beta)$ שהוא המרחב של כל הפונקציות הגזירות n פעמים ברציפות מעל הקטע (α, β) . הטווח של האופרטור הוא לרוב מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין מעל הקטע (α, β) .

משפט 4.4: כל אופרטור דיפרנציאלי הוא גם אופרטור ליניארי.

הוכחה: המשפט נובע מכך שסכום של אופרטורים ליניאריים נותן אופרטור ליניארי, ומכך שכל אופרטור דיפרנציאלי הוא סכום של אופרטורים מהצורה $p(x) \frac{d^n}{dx^n}$. יספיק לכן להוכיח שהאופרטור $p(x)D^k$ הוא ליניארי. לשם כך יספיק להוכיח כי

$$(p(x)D^k)[f + g] = p(x)D^k[f] + p(x)D^k[g]$$

$$(p(x)D^k)[cf] = c \cdot p(x)D^k[f]$$

שני הדברים נובעים מייד מתכונות הנגזרת.

נוכל עכשיו לתת הוכחה מלאה למשפט שהוכחנו קודם עבור משוואות מסדר 2. נצטט אותו שוב

משפט 4.5: אם

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$$

היא קבוצה של k פתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ואם $c_1, c_2, \dots, c_k$ הם מספרים ממשיים שרירותיים, אזי הפונקציה

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

גם היא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה: הפעם נתחיל בהגדרת האופרטור הליניארי

$$L = D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + p_1(x)D + p_0(x)$$

תחת הסימון הזה, המשוואה ההומוגנית שלנו מתקצרת מאוד

$$L[y] = 0$$

הפתרון של המשוואה הוא למעשה **הגרעין** של האופרטור L (כזכור, הגרעין של העתקה ליניארית מורכב מכל הוקטורים שהעתקה מעבירה לאפס).

את הנתון שהפונקציות $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ מהוות פתרון של המשוואה נוכל עכשיו לרשום כך

$$L[y_1] = 0, \quad L[y_2] = 0, \quad \dots, \quad L[y_k] = 0$$

בכדי להוכיח כי הצרוף הליניארי

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

גם הוא פתרון, יספיק להוכיח כי $L[\phi] = 0$. אבל זה נובע מייד מהעובדה ש- L הוא אופרטור

ליניארי

$$\begin{aligned}
 L[\phi] &= L[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x)] \\
 &= c_1 L[y_1(x)] + c_2 L[y_2(x)] + \cdots + c_k L[y_k(x)] \\
 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

- במונחים של אלגברה ליניארית, טענת המשפט שקולה למשפט הידוע שהגרעין של אופרטור ליניארי הוא למעשה תת-מרחב ליניארי של המרחב $\mathcal{C}^n(\alpha, \beta)$.
- מסתבר שקיים קשר מעניין בין המימד של מרחב הפתרונות ובין הסדר של המשוואה - הם שווים.

מערכת יסודית של פתרונות עבור משוואות הומוגניות

§4.4

הגדרה 4.3: קבוצת פתרונות

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

תיקרא מערכת יסודית של פתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

אם כל פתרון אחר של המשוואה הוא צירוף ליניארי שלה.

- דוגמה 7: הקבוצה $\{\cos x, \sin x\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית

$$y'' + y = 0$$

הוכחה: יהי $y(x)$ פתרון כלשהו של המשוואה ההומוגנית. נסמן

$$c_1 = y(0)$$

$$c_2 = y'(0)$$

נגדיר את הפונקציה

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

קל לבדוק כי $z(x)$ היא פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = c_1 \\ y'(0) = c_2 \end{cases}$$



לכן על פי משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n ,

$$z(x) \equiv y(x)$$

כלומר: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

לסיכום: כל פתרון של המשוואה ההומוגנית הוא צרוף ליניארי של הקבוצה $\{\cos x, \sin x\}$, ולכן זוהי קבוצה יסודית של פתרונות.

במונחים של אלגברה ליניארית, נאמר כי הקבוצה $\{\cos x, \sin x\}$ היא **בסיס** למרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית. אבל זה עדיין לא לגמרי מדויק אלא אם נוכיח שזו גם **כן קבוצה בלתי-תלויה של פתרונות**. במקרה הנוכחי זה ברור, ולכן אכן מדובר בבסיס.

המסקנה מהדוגמא הקודמת היא אם כן, שמרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית $y'' + y = 0$ הוא מרחב וקטורי הנפרש על ידי הבסיס $\{\cos x, \sin x\}$, ולכן המימד שלו הוא 2, בדיוק כמו סדר המשוואה. האם זה מקרי?

שאלה: כיצד נבדוק אם קבוצה נתונה של פונקציות היא קבוצה יסודית של פתרונות עבור משוואה הומוגנית נתונה?

בכדי לא לטבוע בסימנים, נתמקד במשוואה הומוגנית מסדר 2

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

יהיו $y_1(x), y_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה בקטע (α, β) . התנאי לכך שהקבוצה $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות הוא שלכל פתרון $\phi(x)$ נוכל למצוא קבועים c_1, c_2 , כך ש-

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ננסה ללכת בעיקבות הרעיון שפגשנו בדוגמא הקודמת. נבחר נקודה x_0 בקטע (α, β) ונגדיר

$$\begin{cases} \alpha_0 = \phi(x_0) \\ \alpha_1 = \phi'(x_0) \end{cases}$$

וננסה לחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, & \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

אם נצליח להוכיח את קיומם של קבועים c_1, c_2 , שעבורם $y(x)$ פותר את בעיית



ההתחלה הזו, אז על פי משפט הקיום והיחידות עבור משוואות לינאריות מסדר גבוה, הפתרון $y(x)$ חייב להיות זהה לפתרון $\phi(x)$ ומשימתנו הושלמה.

על ידי הצבת הנקודה $x = x_0$ בתנאי ההתחלה נקבל מערכת של שתי משוואות בשני הנעלמים c_2, c_1 :

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \phi(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \phi'(x_0) \end{cases}$$

מלימודי האלגברה הליניארית אנו יודעים שלמערכת קיים פתרון אחד ויחיד אם ורק אם דטרמיננטת המקדמים אינה מתאפסת

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0$$

מאחר והנקודה x_0 נבחרה באופן שרירותי, נוכל להסיק שהקבוצה $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא מערכת יסודית של פתרונות אם ורק אם הדטרמיננטה אינה מתאפסת בשום נקודה x של תחום ההגדרה

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \alpha < x < \beta$$

הפונקציה $W(x)$ נקראת **הורונסקיאן** של הקבוצה $\{y_1(x), y_2(x)\}$, על שמו של המתמטיקאי הפולני (Józef Maria Hoene-Wroński, 1776-1853) שגילה אותה לראשונה. היא לפעמים מסומנת על ידי הביטוי $W[y_1, y_2]$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

הוכחנו אם כן את המשפט הבא.

משפט 4.6: נתונה משוואה ליניארית הומוגנית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

כאשר $p_1(x), p_0(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β) . קבוצת פתרונות $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית אם ורק אם הורונסקיאן $W[y_1, y_2]$ אינו מתאפס באף נקודה בקטע (α, β) .

מסקנה: אם $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה קבוצה יסודית, אזי הורונסקיאן מתאפס זהותית בכל הקטע (α, β)

$$W[y_1, y_2](x) = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

❖ **דוגמה 8:** הורונסקיאן של הקבוצה $\{\cos x, \sin x\}$ הוא

$$W[\cos, \sin](x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ולכן $\{\cos x, \sin x\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות של המשוואה ההומוגנית $y'' + y = 0$.

❖ **דוגמה 9:** שתי הפונקציות $\{e^x, e^{-x}\}$ הן שני פתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y'' - y = 0$$

הוכח כי המשפחה הדו-פרמטרית

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

היא הפתרון הכללי של המשוואה על כל הישר הממשי $(-\infty, \infty)$.

הוכחה: הורונסקיאן של הקבוצה $\{e^x, e^{-x}\}$ הוא

$$W[e^x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

קיבלנו שלכל x ממשי, הערך של הורונסקיאן הוא -2 ולכן על פי המשפט הקודם $\{e^x, e^{-x}\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות. כלומר כל פתרון של המשוואה $y'' - y = 0$ הוא צירוף ליניארי של $\{e^x, e^{-x}\}$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

■ ולכן זוהי צורתו של הפתרון הכללי.

❖ **תרגיל 4.5:** הוכח כי $y(x) = c_1 x + c_2 x e^x$ הוא פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית הבאה

בקרן $(0, \infty)$

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0$$

❖ השאלה השנייה שמתבקשת: האם לכל משוואה הומוגנית נורמלית יש קבוצה יסודית של פתרונות?

המשפט הקודם מציע שיטה בכדי לבדוק אם קבוצת פתרונות היא יסודית, אך אינו מבטיח קיום של קבוצה כזו! המשפט הבא עונה לשאלה זו בחיוב (בינתיים עבור משוואות מסדר 2, אבל בהמשך נפגוש משפט כללי יותר).

משפט 4.7: לכל משוואה ליניארית הומוגנית נורמלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

קיימת מערכת יסודית של פתרונות

הוכחה: תהי x_0 נקודה מסוימת בקטע (α, β) . על פי משפט הקיום והיחידות למשוואות ליניאריות, קיים פתרון $y_1(x)$ עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, & \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

וקיים פתרון $y_2(x)$ עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, & \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

נוכיח כי קבוצת הפתרונות $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא יסודית, על פי מבחן הורונסקיאן. לשם כך תספיק בדיקת הורונסקיאן בנקודה x_0 בלבד

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

מאחר והורונסקיאן אינו מתאפס בנקודה $x = x_0$ נובע כי $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית



- מההוכחה עבור $n = 2$ ברור כיצד תיראה ההוכחה עבור משוואות מסדר $n = 3$ ומעלה.
- במונחים של אלגברה ליניארית, קבוצה יסודית נקראת גם **קבוצה פורשת** (spanning set), ולפעמים גם **קבוצת יוצרים**. לכן בהקשרים שונים נאמר כי הקבוצה $\{y_1(x), y_2(x)\}$ **פורשת** את כל הפתרונות של המשוואה, או **מרחב הפתרונות** של המשוואה **נפרש** עלי ידי הקבוצה $\{y_1(x), y_2(x)\}$.
- המשפט אינו מתייחס לשאלה האם יש קבוצה אחת כזו או יותר. ברור שאם יש קבוצה יסודית אחת, אז ניתן לייצר ממנה עוד אינסוף קבוצות יסודיות (כיצד?)
- המשפט גם לא מתייחס לגודל של הקבוצה. הוא מבטיח את קיומה של קבוצה בגודל 2 (עבור משוואה מסדר 2). אך קל מאוד לייצר קבוצות יסודיות בעלות שלוש או יותר פונקציות: פשוט מתחילים עם קבוצה יסודית של שתי פונקציות ומוסיפים לה כל סדרת פונקציות שנחפוץ (שתי הפונקציות הראשונות יפרשו ממילא את כל הפתרונות ואת



הפונקציות הנוספות נוכל לכפול באפסים)

❖ שאלה נוספת שעשויה להישאל עבור משוואות מסדר שני: האם תיתכן קבוצה יסודית של פתרונות בעלת פונקציה אחת בלבד? במקרה זה קל להוכיח שלכל פתרון $y_1(x)$ של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר 2, ניתן למצוא פתרון $y_2(x)$ שאינו כפולה של $y_1(x)$ באמצעות "בישול" תנאי התחלה מתאימים.

❖ קבוצה יסודית מינימלית (קבוצה פורשת מינימלית) נקראת **בסיס**. במקרה של משוואה מסדר 2 הבסיס הוא תמיד בגודל 2, ולכן מימד מרחב הפתרונות הוא 2.

❖ **תלות ואי-תלות ליניארית:** מושג חשוב נוסף מתחום האלגברה הליניארית שרלבנטי לענייננו הוא מושג התלות הליניארית. קבוצת פתרונות $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)\}$ נקראת **תלויה ליניארית** אם קיימים קבועים c_i שאינם כולם אפס כך ש-

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) = 0$$

או באופן שקול: קבוצת פתרונות $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)\}$ תלויה ליניארית אם לפחות אחד מאיברי הקבוצה הוא צירוף ליניארי של השאר.

❖ מכל הדיון הנ"ל נוכל להסיק בקלות את המשפט הבא. בכדי להימנע מביבלוב ושגיאות, יש לשים לב כי המשפט מדבר רק על פתרונות של משוואה ליניארית הומוגנית!

משפט 4.8: קבוצת פתרונות $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n ,

א. מהווה בסיס עבור מרחב הפתרונות של המשוואה אם ורק אם הורונסקיאן שלה אינו מתאפס בנקודה כלשהי של תחום ההגדרה.

ב. אם הורונסקיאן מתאפס בנקודה כלשהי, אז הקבוצה תלויה ליניארית (ולכן אינה בסיס למרחב הפתרונות)

❖ קיבלנו אם כן מבחן פשוט לבדיקת תלות או אי-תלות ליניארית עבור קבוצת פתרונות של משוואה הומוגנית

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

מספיק למצוא נקודה אחת x_0 בתחום הקיום אשר שעבורה הורונסקיאן אינו מתאפס בכדי לקבוע שהקבוצה בלתי תלויה ליניארית. אם הורונסקיאן $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ מתאפס בנקודה x_0 , אז הקבוצה תלויה ליניארית.

❖ נדגיש שוב שמבחן זה עובד רק עבור קבוצות של פתרונות של משוואות הומוגניות! כשמדובר בסתם פונקציות, לורונסקיאן אין ממש שימוש. לדוגמא, קל לראות כי שתי הפונקציות



הבאות אינן תלויות ליניאריות, אבל הורונסקיאן שלהם מתאפס על כל הישר הממשי

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

בשלב זה מובטח לנו כי לכל משוואה ליניארית הומוגנית יש קבוצה יסודית של פתרונות, אך עדיין אין בידינו שיטות למציאתן. בסעיפים הבאים נלמד על שיטות למציאת פתרונות.

מציאת פתרון על ידי הורדת סדר

§4.5

בהינתן פתרון אחד למשוואה ליניארית הומוגנית, ניתן למצוא פתרון שני שהוא בלתי תלוי על ידי הורדת סדר המשוואה. נתחיל בדוגמא.

דוגמה 10: קל לבדוק כי $y_1(x) = e^{-x}$ הוא פתרון של המשוואה

$$y'' + 2y' + y = 0$$

רעיון: בדומה לרעיון גורם האינטגרציה שפגשו בשני מקרים קודמים, ננסה למצוא פתרון שני שהוא מכפלה של הפתרון הראשון בפונקציה $v(x)$

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

(לנסות תמיד אפשר, במקרה הגרוע הנסיון נכשל ועוברים לרעיון הבא)

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$

$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

ולאחר הצבה במשוואה

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

נקבל

$$v[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1] + v'[2y_1' + p_1(x)y_1] + v''y_1 = 0$$

הביטוי הראשון מתאפס כי y_1 הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית, ואנו נותרים עם

$$v'[2y_1' + p_1(x)y_1] + v''y_1 = 0$$

ולאחר נירמול

$$v'' + \left[p_1(x) + 2\frac{y_1'}{y_1} \right] v' = 0$$

הורדת הסדר תתרחש לאחר ההצבה $u = v'$



$$u' + \left[p_1(x) + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right] u = 0$$

זוהי משוואה ליניארית הומוגנית מסדר 1 במשתנה u .

בדוגמא שלנו $p_1(x) + 2 \frac{y_1'}{y_1} = 0$ ומקבלים משוואה פשוטה מאוד

$$u' = 0$$

ממנה נובע בקלות כי $v(x) = x$, ולכן $y_2(x) = xe^{-x}$. קל לבדוק ש- $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות ולכן הפתרון הכללי הוא $a_1 e^{-x} + a_2 x e^{-x}$.

כמובן, הפתרון הכללי של $v(x)$ אינו מעניין אותנו. אנו זקוקים רק לדגימה אחת בלבד (רצוי פשוטה ככל האפשר).

דוגמה 11: נתון כי $y_1(x) = \frac{1}{x}$ הוא פתרון של המשוואה

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

מצא את הפתרון הכללי.

נוסחת אבל (Niels Henrik Abel, 1802-1829)

§4.6

משפט 4.9: (נוסחת אבל)

אם

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

הן n פתרונות של המשוואה הליניארית ההומוגנית מסדר n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

אזי הורונסקיאן שלהם מקיים

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = K e^{-\int p_{n-1}(x) dx}$$

עבור קבוע ממשי K . כאשר הקבוצה אינה יסודית (תלויה ליניארית) $K = 0$.



הוכחה: נוכיח את המשפט עבור סדר $n = 2$. יהיו $\{y_1(x), y_2(x)\}$ שני פתרונות של המשוואה. כלומר

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_0(x)y_2 = 0$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב- y_2 , ואת המשוואה השנייה ב- y_1

$$y_2 y_1'' + p_1(x) y_2 y_1' + p_0(x) y_2 y_1 = 0$$

$$y_1 y_2'' + p_1(x) y_1 y_2' + p_0(x) y_1 y_2 = 0$$

לאחר החסרת המשוואה השנייה מהראשונה נקבל

$$(4.3) \quad (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

כזכור, הורונסקיאן עבור $n = 2$ הוא

$$W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

ולכן

$$W'(x) = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

אם נתבונן שוב במשוואה (4.3) נגלה שהיא משוואה דיפרנציאלית בורונסקיאן W

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה פרידה מסדר ראשון. לאחר הפרדת משתנים נקבל את הנוסחה

$$\frac{dW}{W} = -p_1(x)dx$$

ולכן

$$\ln W(x) = -\int p_1(x)dx$$

ולכן

(4.4)

$$W(x) = K e^{-\int p_1(x)dx}$$

את הקבוע K ניתן לחשב על ידי הצבת נקודה כלשהי x_0 מתחום ההגדרה בהגדרה הוקטורית של $W(x)$. ■

לפעמים רשמים את נוסחת אבל בצורה

$$(4.5) \quad W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t) dt}$$

כאשר x_0 היא נקודה כלשהי בתחום הקיום של המשוואה. אבל נוסחה זו תהיה שימושית רק במקרים בהם קל לחשב את $W(x_0)$ באמצעות הדטרמיננטה, או למטרת שימוש תאורטי. עבור שימושים שונים, רצוי גם לזכור את המשוואה הדיפרנציאלית המקדימה לנוסחת אבל עבור המקרה הכללי

$$(4.6) \quad \frac{W'(x)}{W(x)} = -p_{n-1}(x)$$

מהתבוננות בנוסחה (4.4) אנו מקבלים אישור נוסף לעובדה: או ש- $W(x) = 0$ לכל $\alpha < x < \beta$, או ש- $W(x) \neq 0$ לכל $\alpha < x < \beta$. כאשר (α, β) הוא תחום הקיום של המשוואה. המקרה הראשון קורה כאשר $K = 0$, והשני כאשר $K \neq 0$.

הדבר השני שאנו למדים מנוסחת אבל הוא שהורונסקיאן זהה למעשה עבור כל הקבוצות היסודיות עד כדי הכפלה בקבוע.

במקרה של $n = 2$, הורונסקיאן של שני פתרונות $y_1(x)$, $y_2(x)$ מזכיר לנו את המונה של נוסחת הנגזרת של מנת הפונקציות

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right] = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1(x)^2} = \frac{W(x)}{y_1(x)^2} = \frac{Ke^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

לכן, אם ידוע לנו פתרון אחד $y_1(x)$ של המשוואה, נוכל למצוא את הפתרון השני $y_2(x)$ על ידי השויון

$$\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right]' = \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

כלומר

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

ולכן

$$(4.7) \quad y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_{n-1}(x)dx}}{y_1(x)^2}$$

הנוסחה של אבל תאפשר לנו עכשיו להתקדם הלאה ולפתור משוואות ליניאריות הומוגניות בעלי מקדמים קבועים.

פתרון משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

§4.7

בסעיף הנוכחי נתמקד במשוואה לינארית הומוגנית מסדר n בעלת מקדמים קבועים

$$(4.8) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

כאשר $a_i, 0 \leq i \leq n$, הם קבועים ממשיים.

על פי משפט הקיום והיחידות למשוואות לינאריות תחום הקיום של כל פתרון של המשוואה הוא על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$.

הגדרה: הפולינום

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

נקרא הפולינום האופייני של המשוואה (4.8).

אם r_1 הוא שור ממשי של הפולינום האופייני אזי ניתן לפרק אותו למכפלת שני גורמים

$$P(r) = Q(r)(r - r_1)$$

כאשר $Q(r)$ הוא פולינום ממשי ממעלה $n - 1$.

אם נתבונן ברישום האופרטור של המשוואה

$$P(D)[y] = Q(D)(D - r_1)[y] = Q(D)[(D - r_1)[y]] = 0$$

הפתרון של המשוואה הלינארית

$$(D - r_1)[y] = y' - r_1 y = 0$$

הוא $c_1 e^{r_1 x}$ (קל לבדוק).

לכן לשורשים הממשיים $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ של הפולינום האופייני $P(r)$ יתאימו הפתרונות

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_k x}\}$$

אשר בדיקה פשוטה באמצעות הורונסקיאן (בנקודה $x = 0$) מראה שהם בלתי תלויים.



תזכורת: תרגיל נפוץ באלגברה ליניארית, הדטרמיננטה של Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (r_j - r_i)$$

ההוכחה מתבצעת באינדוקציה.

הבעיה היא שמספר השורשים הממשיים עשוי להיות קטן מ- n ולכן נצטרך למצוא פתרונות נוספים בכדי לקבל מערכת יסודית של פתרונות.

מהיכרות מוקדמת עם סוג זה של משוואות, למדנו כי לפתרונות היסודיים יש בדרך כלל צורות כגון e^{rx} , $\sin rx$, $\cos rx$.

דרך שניה להוכיח את התוצאה האחרונה היא פשוט על הצבת $y(x) = e^{rx}$ במשוואה הדיפרנציאלית

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} \\ y'(x) &= re^{rx} \\ y''(x) &= r^2 e^{rx} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= r^n e^{rx} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx} \\ &= 0 \end{aligned}$$

דוגמה 12: מצא פתרון כללי עבור

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

פתרון: הפולינום האופייני כאן הוא $r^2 - 5r + 6 = 0$. שורשי הפולינום הם $\{2, 3\}$, ולכן נקבל מערכת יסודית של פתרונות $\{e^{2x}, e^{3x}\}$. לכן הפתרון הכללי של המשוואה

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

על פי המשפט היסודי של האלגברה, לפולינום האופייני $P(r)$ (שמעלתו n) יש n שורשים, אשר חלקם אולי מרובים, וחלקם מרוכבים (גם המרוכבים עשויים להיות מרובים!). נבדוק כל מקרה לגופו.

❶ **שורשים ממשיים, כולם ריבוי 1:** אם כל השורשים שונים וממשיים $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, אז נקבל מערכת יסודית של פתרונות $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}\}$ ובכך סיימנו.

❷ **שורש מרוכב, ריבוי 1:** במידה ואחד השורשים הוא מרוכב $r = s + it$, אז גם השורש הצמוד $r = s - it$ יופיע ברשימה. אפשר לבדוק שגם הפונקציות e^{s+it} , e^{s-it} הן פתרונות למשוואה, אך הן פונקציות מרוכבות. אבל ניתן לקבל מהן שני פתרונות ממשיים בלתי-תלויים באמצעות צירופים ליניאריים הבאים

$$\begin{aligned} e^{sx} \cos tx &= \frac{1}{2} [e^{s+it} + e^{s-it}] \\ e^{sx} \sin tx &= \frac{1}{2i} [e^{s+it} - e^{s-it}] \end{aligned}$$

ניתן לבדוק באמצעות הורונסקיאן ששני הפתרונות האלה בלתי-תלויים ליניארית.

❸ **שורש ממשי ריבוי k גדול מ-1:** אם r_1 שורש מריבוי k אז הפולינום האופייני $P(r)$ ניתן לפירוק באופן הבא

$$P(r) = (r - r_1)^k Q(r)$$

כאשר $Q(r)$ פולינום ממעלה $n - k$, אך r_1 אינו שורש של הפולינום $Q(r)$ (כלומר $Q(r_1) \neq 0$).

לשורש r_1 יתאימו k פתרונות שונים (ובלתי-תלויים)

$$\{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{r_1 x}\}$$

בכדי להוכיח טענה זו נסמן את המשוואה שלנו על ידי $L[y] = 0$. קל לראות כי עבור כל r ממשי

$$L[e^{rx}] = e^{rx} P(r) = e^{rx} (r - r_1)^k Q(r)$$

נגזור את שני האגפים לפי המשתנה r נקבל

$$\begin{aligned} L[xe^{rx}] &= xe^{rx} (r - r_1)^k Q(r) + e^{rx} [k(r - r_1)^{k-1} Q(r) + (r - r_1)^k Q'(r)] \\ &= e^{rx} [x(r - r_1)^k Q(r) + k(r - r_1)^{k-1} Q(r) + (r - r_1)^k Q'(r)] \end{aligned}$$

אם נציב $r = r_1$ נקבל $L[xe^{r_1 x}] = 0$. כלומר $y(x) = xe^{r_1 x}$ הוא פתרון למשוואה. באופן דומה, אם נמשיך לגזור את השוויון האחרון לפי המשתנה r , נקבל שכל הפונקציות בקבוצה

$$\{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{r_1 x}\}$$

הן פתרונות של המשוואה שלנו.

❹ **שורש מרוכב ריבוי k גדול מ-1:** בגלל שמקדמי המשוואה ממשיים, כל שורש כזה $s + it$ מגיע גם עם הצמוד שלו $s - it$. בדיוק כמו קודם נוכיח כי הקבוצה

$$\{e^{(s+it)x}, xe^{(s+it)x}, \dots, x^{k-1}e^{(s+it)x}\}$$

מהווה קבוצה יסודית של $2k$ פתרונות. ניתן לחלץ ממנה $2k$ פתרונות ממשיים

$$\begin{array}{ll} e^{sx} \cos tx, & e^{sx} \sin tx, \\ xe^{sx} \cos tx, & xe^{sx} \sin tx, \\ x^2 e^{sx} \cos tx, & x^2 e^{sx} \sin tx, \\ \vdots & \vdots \\ x^{k-1} e^{sx} \cos tx, & x^{k-1} e^{sx} \sin tx \end{array}$$

❖ **דוגמה 13:** מצא פתרון כללי עבור

$$y'' - 6y' + 9y =$$

פתרון: הפולינום האופייני של המשוואה הוא $P(r) = (r - 3)^2$. יש לנו שורש יחיד $r = 3$ מריבוי 2. ולכן על פי התוצאה שקיבלנו למעלה, $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ הקבוצה יסודית של פתרונות, ולכן הפתרון הכללי

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

❖ **דוגמה 14:** באופן דומה נוכיח כי $\{e^x, xe^x, x^2 e^x\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות עבור המשוואה

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

❖ **דוגמה 15:** מצא פתרון כללי עבור

$$y'''' - 6y''' + 13y'' = 0$$

פתרון: המשוואה כאן היא ממעלה רביעית. לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 - 6r^3 + 13r^2 = r^2(r^2 - 6r + 13)$$

יש שורש ממשי $r = 0$ בעל ריבוי 2, ושני שורשים מרוכבים $r = 3 \pm 2i$ בעלי ריבוי 1. לכן הקבוצה היסודית שלנו היא

$$\{1, x, e^{3x} \cos 2x, e^{3x} \sin 2x\}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} \cos 2x + c_4 e^{3x} \sin 2x$$

❖ **דוגמה 16:** מצא פתרון כללי עבור

$$y'''' + 2y'' + y = 0$$

פתרון: לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r - i)^2(r + i)^2$$

יש שני שורשים מרוכבים בעלי ריבוי 2: $r_1 = i$, $r_2 = -i$. לכן הקבוצה היסודית שלנו הפעם היא

$$\{\cos x, \quad x \cos x, \quad \sin x, \quad x \sin x\}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

דוגמה 17: מצא פתרון כללי עבור

$$y'''' + y = 0$$

פתרון: לפולינום האופייני

$$P(r) = r^4 + 1$$

יש ארבעה שורשים מרוכבים פשוטים $r^4 = -1 = e^{\pi i}$,

$$r = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{5\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

על פי הנוסחה $e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$ נקבל את ארבעת השורשים הבאים

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

לכן הקבוצה היסודית שלנו היא

$$\{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\}$$

והפתרון הכללי הוא כרגיל הצירוף הליניארי של ארבעת הפונקציות הללו.



משוואות לא הומוגניות

§4.8

משפט 4.10: אם $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פתרונות של משוואה דיפרנציאלית ליניארית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

אז ההפרש $y_h(x) = y_1(x) - y_2(x)$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

הוכחה: נשתמש בסימול האופרטורי

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

על פי עקרון הסופרפוזיציה

$$\begin{aligned} L[y_h(x)] &= L[y_1(x) - y_2(x)] \\ &= L[y_1(x)] - L[y_2(x)] \\ &= q(x) - q(x) = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו לכן שההפרש $y_h(x) = y_1(x) - y_2(x)$ הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית. המשפט הבא הוא מסקנה מיידיית של משפט זה.

משפט 4.11: אם ידוע לנו פתרון פרטי $y_p(x)$ למשוואה הלא הומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

ואם הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

הוא

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

אז הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

הוכחה: נשתמש שוב בסימול האופרטורי

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$



את המשוואה הלא-הומוגנית נוכל לרשום כך

$$L[y] = q(x)$$

ואת המשוואה ההומוגנית נרשום כך

$$L[y] = 0$$

נניח שנתון לנו פתרון פרטי $y_p(x)$ של המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y_p(x)] = q(x)$$

יהי $y(x)$ פתרון כלשהו של המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y(x)] = q(x)$$

על פי המשפט הקודם $y(x) - y_p(x)$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית, ולכן קיימים קבועים $c_1, c_2, \dots, c_n$ כך ש-

$$y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

ולכן

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$



המשמעות של המשפט האחרון היא שבכדי לפתור משוואה דיפרנציאלית לא-הומוגנית אנו זקוקים לפתרון פרטי יחיד שלה, ולפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

דוגמה 18: מצא את הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית

$$y'' + y = 3x$$

על ידי ניחוש פתרון פרטי שלה.

פתרון: קל לנחש ש- $y_p(x) = 3x$ הוא פתרון פרטי של המשוואה. מהסעיפים הקודמים

ידוע לנו כי הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y'' + y = 0$$

הוא

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x) = 3x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$



מכשיר נוסף שיכול לעזור בפתרון משוואות לא-הומוגניות הוא עיקרון הסופרפוזיציה: אם הגורם הלא-הומוגני $q(x)$ ניתן לפירוק

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)$$

ואם y_{p_i} הוא פתרון פרטי של

$$L[y] = q_i(x)$$

אז הסכום

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$$

הוא פתרון של

$$L[y] = q(x)$$

דוגמה 19: מצא פתרון כללי למשוואה הלא-הומוגנית

$$(4.9) \quad y'' + y = 1 + x + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{2}$$

פתרון: על פי עיקרון הסופרפוזיציה יספיק למצוא שלושה פתרונות פרטיים עבור המשוואות הבאות

$$(1) \quad y'' + y = 1$$

$$(2) \quad y'' + y = x$$

$$(3) \quad y'' + y = \frac{3}{4} \sin \frac{x}{2}$$

קל לנחש שלושה פתרונות פרטיים מתאימים

$$(1) \quad y_{p_1}(x) = 1$$

$$(2) \quad y_{p_2}(x) = x$$

$$(3) \quad y_{p_3}(x) = \sin \frac{x}{2}$$

ולכן פתרון פרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית (4.9) הוא

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x) = 1 + x + \sin \frac{x}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית (4.9) הוא

$$y(x) = 1 + x + \sin \frac{x}{2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

שיטת השוואת המקדמים

§4.8.1

מסתבר שניחוש של פתרון פרטי עבור משוואות לא-הומוגניות בעלי מקדמים קבועים, הוא פשוט יותר במקרים טיפוסיים.

תהי

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = q(x)$$

הטבלה הבאה מציגה את צורת הניחוש של הפתרון הפרטי המתאים לגורם $q(x)$. כמובן, יש להציב את $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית ולמצוא את המקדמים המתאימים.

	$q(x)$	$y_p(x)$
1	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m)$
2	$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m)e^{\alpha x}$	$x^k(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m)e^{\alpha x}$
3	$(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{\alpha x} \cos \beta x$	$x^k[(B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)e^{\alpha x} \cos \beta x + (C_0 + C_1x + \dots + C_mx^m)e^{\alpha x} \sin \beta x]$
4	$(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{\alpha x} \sin \beta x$	$x^k[(B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)e^{\alpha x} \cos \beta x + (C_0 + C_1x + \dots + C_mx^m)e^{\alpha x} \sin \beta x]$

טבלה 4.1: צורת הניחוש של הפתרון הפרטי

לכל שורה בטבלה נתאים זוג קבועים α, β . הקבוע α מתאים לגורם $e^{\alpha x}$, והקבוע β מתאים לגורם $\cos \beta x$ או $\sin \beta x$.

בשורה 1 של הטבלה, $\alpha = 0, \beta = 0$, ולכן שורה 1 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3 (אם נציב $\alpha = 0, \beta = 0$ בשורה 3, נקבל את שורה 1).

בשורה 2 של הטבלה, $\beta = 0$, ולכן שורה 2 היא למעשה מקרה פרטי של שורה 3.

לכן אפשר להוריד מהטבלה את שתי השורות הראשונות, אבל מסיבות של נוחות נהוג לכלול אותן.

הכלל לקביעת k :

אם $r = \alpha + \beta i$ הוא שורש של הפולינום האופייני, אז k הוא הריבוי האלגברי של r . אחרת $k = 0$.

רצוי להשתמש בשורות 3, 4, אבל אם משתמשים בשורה 1, אז יש לזכור כי בשורה זו $\alpha = 0$,



$\beta = 0$, ולכן $r = 0 + 0i = 0$. לכן אם $r = 0$ הוא שורש של הפולינום האופייני אז k הוא הריבוי האלגברי שלו, אחרת $k = 0$.

אם משתמשים בשורה 2, אז יש לזכור כי בשורה זו $\beta = 0$, ולכן

$$r = \alpha + 0i = \alpha$$

לכן אם $r = \alpha$ הוא שורש של הפולינום האופייני אז k הוא הריבוי האלגברי שלו, אחרת $k = 0$.

דוגמה 20: מצא פתרון כללי של המשוואה

$$y'' + y = x^2$$

פתרון: במקרה זה ברור כי $k = 0$, כי $r = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני $r^2 + 1 = 0$. לכן צורת הפתרון הפרטי כאן היא

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

הצבת $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית תיתן

$$y_p''(x) + y_p(x) = Ax^2 + Bx + (C + 2A)$$

ולכן

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C + 2A = 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

וקיבלנו את הפתרון הפרטי הבא עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$y_p(x) = x^2 - 2$$

מומלץ לבדוק שזהו אכן פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות הצבתו במשוואה. הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא אם כן

$$y(x) = x^2 - 2 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$



דוגמה 21: מצא פתרון כללי של המשוואה

$$y'' - y = e^x$$

פתרון: נשתמש בשורה 3 של הטבלה: $\alpha = 1, \beta = 0, r = \alpha + \beta i = 1$. הוא שורש של הפולינום האופייני $r^2 - 1 = 0$, ולכן על פי הטבלה צורת הפתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = Axe^x$$

מאחר ו- $y = e^x$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

$$y'_p(x) = Ae^x + Axe^x = A(x+1)e^x$$

$$y''_p(x) = A(x+2)e^x$$

$$y''_p(x) - y_p(x) = 2Ae^x = e^x$$

לכן $A = \frac{1}{2}$, ולכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y'' - y = 0$ הוא

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

לכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x}$$

דוגמה 22: מצא פתרון כללי למשוואה

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

פתרון: בכדי לנחש פתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגנית רצוי להתחיל בפתרון כללי של המשוואה ההומוגנית

$$y''' - 4y' = 0$$

שורשי הפולינום האופייני $r^3 - 4r = 0$ הם $r = 0, -2, 2$, ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1x + c_2e^{-2x} + c_3e^{2x}$$

בשלב הבא ננחש פתרונות פרטיים עבור שלושת המשוואות הלא-הומוגניות הבאות

$$(1) \quad y''' - 4y' = x$$

$$(2) \quad y''' - 4y' = 3\cos x$$

$$(3) \quad y''' - 4y' = e^{-2x}$$

משוואה 1:

השורה המתאימה בטבלה היא שורה 1. במקרה הנוכחי יש לקחת $k = 1$ כי $x^0 = 1$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית. לכן הניחוש הוא

$$y_p(x) = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

נציב במשוואה (1)

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

$$y_p'''(x) = 0$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = -8Ax - 4B = x$$

לכן $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$, וקיבלנו

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{8}x^2$$

משוואה 2:

השורה המתאימה בטבלה היא שורה 3 ($\beta = 1$, $\alpha = 0$). מאחר ו-

$$r = \alpha + \beta i = i$$

אינו שורש של הפולינום האופייני, יש לקחת $k = 0$, ולכן צורת הפתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x$$

נציב במשוואה (2)

$$y_p'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$y_p''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

$$y_p'''(x) = A \sin x - B \cos x$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = 5A \sin x - 5B \cos x = 3 \cos x$$

לכן $A = 0$, $B = -\frac{3}{5}$, וקיבלנו

$$y_{p2}(x) = -\frac{3}{5} \sin x$$

משוואה 3:

במקרה הזה $r = -2$ הוא שורש של הפולינום האופייני בעל ריבוי $k = 1$, ולכן צורת הפתרון הפרטי היא

$$y_p(x) = Axe^{-2x}$$

נציב במשוואה (3)

$$y_p'(x) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} = A(1 - 2x)e^{-2x}$$

$$y_p''(x) = -2Ae^{-2x} - 2A(1 - 2x)e^{-2x} = A(-4 + 4x)e^{-2x}$$

$$y_p'''(x) = 4Ae^{-2x} - 2A(-4 + 4x)e^{-2x} = A(12 - 8x)e^{-2x}$$

$$y_p'''(x) - 4y_p'(x) = 8Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

לכן $A = -\frac{1}{8}$, וקיבלנו

$$y_{p3}(x) = -\frac{1}{8}e^{-2x}$$

על סמך עיקרון הסופרפוזיציה הפתרון עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$y''' - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}$$

הוא

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x) \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{8}e^{-2x} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{8}e^{-2x} + c_1x + c_2e^{-2x} + c_3e^{2x}$$

❖ **דוגמה 23:** מצא פתרון כללי למשוואה

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x \sin x$$

פתרון: נתחיל במציאת הפתרון הכלל של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = 0$$

פולינום אופייני

$$\begin{aligned} r^4 - r^3 - r^2 + r &= r^3(r - 1) - r(r - 1) \\ &= (r^3 - r)(r - 1) \\ &= r(r^2 - 1)(r - 1) \\ &= r(r - 1)^2(r + 1) \end{aligned}$$

שורשים: $r = 0, -1, 1, 1$

פתרון כללי

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^x + c_4xe^x$$

נשתמש בשורה 4 של הטבלה. במקרה שלנו $q(x) = x \sin x$, ולכן $\alpha = 0$, $\beta = 1$,
 $r = \alpha + \beta i = i$. מאחר ו- $r = i$ אינו שורש של הפולינום האופייני, יש לקחת $k = 0$, ולכן



על פי שורה 4 בטבלה צורת הפתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$$

יש לחשב את ארבעת הנגזרות הראשונות של $y_p(x)$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x \\ &= (A + D + Cx) \cos x + (C - B - Ax) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= C \cos x - (A + D + Cx) \sin x - A \sin x + (C - B - Ax) \cos x \\ &= (2C - B - Ax) \cos x - (2A + D + Cx) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'''(x) &= -A \cos x - (2C - B - Ax) \sin x - C \sin x - (2A + D + Cx) \cos x \\ &= -(3A + D + Cx) \cos x - (3C - B - Ax) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p^{(4)}(x) &= -C \cos x + (3A + D + Cx) \sin x + A \sin x - (3C - B - Ax) \cos x \\ &= (Ax + B - 4C) \cos x + (Cx + 4A + D) \sin x \end{aligned}$$

נציב את $y_p(x)$ במשוואה הלא-הומוגנית ונקבל

$$\begin{aligned} y_p^{(4)} - y_p''' - y_p'' + y_p' &= \\ &= (3A - 6C + D) \cos x + (2A + 2C)x \cos x \\ &\quad + (6A - 2B + 4C + 2D) \sin x + (-2A + 2C)x \sin x \\ &= x \sin x \end{aligned}$$

נקבל מערכת ליניארית של ארבע משוואות בארבעה נעלמים

$$\begin{cases} 4A + 2B - 6C + 2D = 0 \\ 2A + 2C = 0 \\ 6A - 2B + 4C + 2D = 0 \\ -2A + 2C = 1 \end{cases}$$

שפתרונה הוא

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{3}{4}$$

ולכן

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \\ &= \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \cos x + \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right) \sin x \end{aligned}$$

הפתרון הכללי למשוואה הלא-הומוגנית

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x \sin x$$

הוא

$$y(x) = \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \cos x + \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right) \sin x + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + c_4 x e^x$$

❖ **פינת התיכנות:** לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת בקלות ש- $y_p(x)$ הוא פתרון של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות שימוש בתוכנת **SymPy** (Python):

<http://live.sympy.org>

(אחרת בדיקה ידנית עשויה לצרוך הרבה זמן ודין, ובנוסף מועדת לשגיאות)

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
yp = (-x/4 + 1/2)*cos(x) + (x/4 + 3/4)*sin(x)
yp1 = diff(yp, x)
yp2 = diff(yp1, x)
yp3 = diff(yp2, x)
yp4 = diff(yp3, x)
simplify(yp4 - yp3 - yp2 + yp1)
```

(יש להעתיק ולהדביק את הקוד לחלון **SymPy**)

❖ **תרגיל 4.6:** מצא פתרון כללי למשוואה

$$y^{(4)} - y''' - y'' + y' = e^x$$

תשובה סופית: $y(x) = \frac{x^2}{4} e^x + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + c_4 x e^x$

שיטת הוריאציה של הפרמטרים

§4.8.2

❖ עד עכשיו עסקנו במשוואות דיפרנציאליות לינאריות עם מקדמים קבועים. שיטת הוריאציה של הפרמטרים נועדה לפתרון משוואות לינאריות לא-הומוגניות בעלות מקדמים משתנים

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$



כאשר ידוע לנו הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

נניח כי ידוע לנו הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

שיטת הוריאציה של הפרמטרים מניחה כי קיים פתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגנית שצורתו היא

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

כאשר $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ הן n פונקציות שעלינו לגלות (ומכאן נגזר שמה של השיטה: הפרמטרים $c_1, \dots, c_n$, הופכים למקדמים משתנים).

נדגים את השיטה באמצעות משוואה מסדר שני

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

נניח שיש בידנו פתרון כללי $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ עבור המשוואה ההומוגנית

$$L[y] = y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

הנגזרת של $y_p(x)$ היא

$$y'_p(x) = c'_1(x)y_1(x) + c_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + c_2(x)y'_2(x)$$

קיימת דרגת חופש גדולה בבחירת $c_1(x), c_2(x)$ שמאפשרת הוספת אילוץ נוסף

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0$$

ולכן נוכל לרשום

$$y'_p(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x)$$

הנגזרת השנייה של $y_p(x)$ היא

$$y''_p(x) = c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x)$$

נציב את y_p'' , y_p' , y_p במשוואה הלא הומוגנית

$$\begin{aligned}
 & y_p'' + p_1(x)y_p' + p_0(x)y_p \\
 &= (c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'') + p_1(c_1y_1' + c_2y_2') + p_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\
 &= c_1(y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1) + c_2(y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
 &= c_1'y_1' + c_2'y_2' \\
 &= q(x)
 \end{aligned}$$

לסיכום, קיבלנו את המערכת הבאה

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

על פי כלל קרמר לפתרון מערכת משוואות לינאריות

$$\begin{aligned}
 c_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)} \\
 c_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}
 \end{aligned}$$

קיבלנו נוסחאות פשוטות לחישוב הנגזרות $c_2'(x)$, $c_1'(x)$

$$\begin{aligned}
 c_1'(x) &= \frac{-y_2(x)q(x)}{W(x)} \\
 c_2'(x) &= \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)}
 \end{aligned}$$

כמובן אינטגרציה פשוטה תיתן את $c_2(x)$, $c_1(x)$.

נוסחאות דומות מתקבלות גם עבור משוואות מסדר 3 ומעלה.

לחילוק בורונסקיאן $W(x)$ אין שום השפעה על תחום הקיום של הפתרונות מאחר שנתון לנו כי $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית ולכן הורונסקיאן אינו מתאפס בתחום הקיום של המשוואה (α, β) .



דוגמה 24: מצא פתרון כללי של המשוואה

$$y'' + y = \tan x, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

פתרון: ראשית כל נציין כי למרות שמקדמי המשוואה קבועים, לא ניתן לפתור את המשוואה באמצעות שיטת השוואת המקדמים. כזכור, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $y'' + y = 0$ הוא

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ולכן צורת הפתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית היא

$$y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

יש לפתור את המערכת

$$\begin{cases} \cos x \cdot c_1'(x) + \sin x \cdot c_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot c_1'(x) + \cos x \cdot c_2'(x) = \tan x \end{cases}$$

נשתמש בכלל קרמר לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x \cdot \tan x}{1} = -\sin x \cdot \tan x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x \cdot \tan x}{1} = \sin x$$

ברור כי $c_2(x) = -\cos x$. בכדי לקבל את $c_1(x)$ יש צורך לבצע אינטגרציה

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -\sin x \cdot \tan x \, dx = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \, dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) \, dx \\ &= \sin x - \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \sin x - \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} \\ &= \sin x - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \end{aligned}$$



לכן

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\sin x - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \cos x - \cos x \cdot \sin x \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא-הומוגנית הוא

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

❶ **פינת התיכנות:** לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת בקלות ש- $y_p(x)$ הוא פתרון של המשוואה הלא-הומוגנית באמצעות שימוש בתוכנת **SymPy** (Python):

<http://live.sympy.org>

(אחרת בדיקה ידנית עשויה לצרוך הרבה זמן ודין, ובנוסף מועדת לשגיאות)

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
yp = -0.5*cos(x) * ln((1+sin(x))/(1-sin(x)))
yp1 = diff(yp, x)
yp2 = diff(yp1, x)
simplify(yp + yp2)
```

יש להעתיק ולהדביק את הקוד לחלון של **SymPy**

❷ באותו האופן בדיוק נוכל למצוא פתרון פרטי עבור משוואה דיפרנציאלית לינארית לא-הומוגנית מסדר 3

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

אם הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

ידוע לנו

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$$

אז צורת הפתרון של הפתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית תהיה

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

לאחר גזירה והוספת שני אילוצים נקבל את המערכת

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + c'_3(x)y_3(x) = 0 \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c'_3(x)y'_3(x) = 0 \\ c'_1(x)y''_1(x) + c'_2(x)y''_2(x) + c'_3(x)y''_3(x) = q(x) \end{cases}$$

ובאמצעות שימוש בכלל של קרמר נקבל נוסחאות מתאימות עבור $c'_1(x)$, $c'_2(x)$, $c'_3(x)$. לדוגמא, הנוסחה עבור $c'_1(x)$ היא

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y'_2(x) & y'_3(x) \\ q(x) & y''_2(x) & y''_3(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & y'_3(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & y''_3(x) \end{vmatrix}} = \frac{q(x)[y_2(x)y'_3(x) - y_3(x)y'_2(x)]}{W(x)}$$

❖ **תרגיל 4.7:** מצא פתרון כללי למשוואה

$$y''' - y' = x$$

הדרכה: ניתן לפתור את הבעיה על ידי שיטת השוואת המקדמים וגם על ידי הורדת סדר פשוטה ($v = y'$). מומלץ בכל זאת לפתור את התרגיל בכדי לתרגל את נושא הוריאציה של הפרמטרים. הפתרון הסופי שצריך להתקבל הוא

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$$

❖ **תרגיל 4.8:** מצא פתרון כללי למשוואה

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x$$

הדרכה: התשובה הסופית היא

$$y(x) = 29 \sin^2 x - 15 \sin 2x + \frac{23}{312} e^{2x} \cos^2 x + c_1 + c_2 e^{-x}$$

משוואת אוילר (Leonhard Euler 1707-1783) §4.8.3

❖ אחת המשוואות הליניאריות הידועות היא **משוואת אוילר**

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = q(x), \quad (0 < x < \infty)$$

❖ משוואת אוילר חשובה עבור פתרון משוואת לפלס (אלקטרומגנטיות, חשמל, חום, נוזלים), אבל יש לה גם חשיבות מתודית עקב היותה דוגמא פשוטה לנקודות סינגולריות רגולריות.

נקודות סינגולריות רגולריות (קישור לויקיפדיה)

ההצבה

$$x = e^t, \quad t = \ln x \quad (0 < x < \infty)$$

הופכת את משוואת אוילר למשוואה ליניארית בעלת מקדמים קבועים. נדגים זאת על משוואה מסדר 3

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \right] = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] \\ y''' &= \frac{1}{x^3} \left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \right] \end{aligned}$$

לאחר הצבת תוצאות אלה במשוואת אוילר, ברור שכל החזקות x^k יתבטלו, ונקבל משוואה ליניארית בפונקציה $y(t)$, בעלת מקדמים קבועים.

ניתן להוכיח באמצעות אינדוקציה מתימטית את הנוסחה האופרטורית הבאה

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - n + 1 \right) [y]$$

בתחום $-\infty < x < 0$ ההצבה היא $x = -e^t$.

דוגמה 25: מצא פתרון כללי עבור משוואת אוילר הבאה

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \quad (0 < x < \infty)$$

פתרון: נעבור למשתנה t באמצעות ההצבה $x = e^t$

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 2xy' + 2y &= x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] - 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} + 2y(t) \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה חדשה במשתנים y, t

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$$

שכמובן ניתן לפתור על ידי שיטת השוואת המקדמים

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

נחזור למשתנים המקוריים $y = y(x)$, ונקבל

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2 x^2$$

❖ יוצא שהפתרונות היסודיים של משוואת אוילר ההומוגנית הם תמיד מהצורה $y = x^r$, ולכן מעתה ואילך לא נשתמש שוב בהצבה $x = e^t$, אלא נחפש ישירות את הפתרונות היסודיים על ידי הצבת $y = x^r$ בביטוי

$$L[y] = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

שנותנת

$$L[x^r] = x^r P(r)$$

כאשר $P(r)$ פולינום ממשי ממעלה n .

❖ למשל עבור משוואת אוילר מסדר 2

$$y = x^r$$

$$y' = r x^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

ולכן

$$\begin{aligned} L[y] &= a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y \\ &= a_2 x^2 r(r-1)x^{r-2} + a_1 x r x^{r-1} + a_0 x^r \\ &= a_2 r(r-1)x^r + a_1 r x^r + a_0 x^r \\ &= x^r [a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שכאשר $n = 2$

$$P(r) = a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

❖ השוויון האחרון נקרא **המשוואה האינדיציאלית** או **המשוואה האופיינית** של משוואת אוילר ההומוגנית.

❖ במקרה של משוואה הומוגנית מסדר 3, המשוואה האינדיציאלית תהיה

$$P(r) = a_3 r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

❖ אם לפולינום האינדיציאלי $P(r)$ יש n שורשים ממשיים שונים

$$r_1, \quad r_2, \quad \dots, \quad r_n$$

אז בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית יהיה

$$x^{r_1}, \quad x^{r_2}, \quad \dots, \quad x^{r_n}$$



❖ אם r הוא שורש ממשי בעל ריבוי אלגברי k , אז יתאימו לו k פתרונות בלתי תלויים

$$x^r, \quad x^r \ln x, \quad x^r (\ln x)^2, \quad \dots, \quad x^r (\ln x)^{k-1}$$

❖ אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים פשוטים של $P(r)$, אז יתאימו להם 2 פתרונות בלתי תלויים

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

❖ אם $r = \alpha \pm \beta i$ הם שני שורשים מרוכבים של $P(r)$ בעלי ריבוי אלגברי k , אז יתאימו להם $2k$ פתרונות בלתי תלויים

$$\begin{array}{ll} x^\alpha \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\ x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), & x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x) \\ x^\alpha (\ln x)^2 \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^2 \sin(\beta \ln x) \\ \vdots & \vdots \\ x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x), & x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x) \end{array}$$

❖ **תרגילים:** מצא פתרון כללי עבור כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $x^2 y'' - xy' + y = x^5$

ב. $2x^2 y'' + 5xy' + y = 3x + 2$

ג. $x^2 y'' - 6y = 1 + \ln x$

ד. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 1$

ה. $-6 < x < \infty, \quad 3(x+6)^2 y'' + 25(x+6)y' - 16y = 0$

תשובות סופיות:

א. $y(x) = \frac{x^4}{16} + c_1 x + c_2 \ln x$

ב. $y(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$

ג. $y(x) = -\frac{\ln x}{6} - \frac{1}{9} + c_1 x^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} + c_2 x^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$

ד. $y(x) = -\frac{1}{2}c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2$

ה. $y(x) = c_1 (x+6)^{-8} + c_2 (x+6)^{\frac{2}{3}}$



תרגילים לפרק 4

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ו/או מלאים לחלק קטן של התרגילים. אבל לפני שלוחצים על הקישור מומלץ מאוד לפתור בכוחות עצמך! פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן. נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. מצא פתרון כללי

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| א. $y'' - 25y = 0$ | ב. $y'' - 2y' + 2y = 0$ |
| ג. $y'' - 5y' + 6y = 0$ | ד. $y''' - y = 0$ |
| ה. $y^{(4)} - y = 0$ | ו. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$ |
| ז. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ | ח. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ |
| ט. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ | |

2. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

- | | |
|--|--|
| א. $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$ | ב. $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ |
| ג. $\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$ | |

3. מצא פתרון כללי

- | |
|-----------------------------------|
| א. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ |
| ב. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ |
| ג. $y'' - y = -x^2$ |
| ד. $y'' + 3y' - 4y = x e^{-x}$ |
| ה. $y'' - y' + y = x^3 + 6$ |
| ו. $y'' - 8y' + 7y = 14$ |
| ז. $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ |
| ח. $y'' - y = 2e^x$ |
| ט. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x$ |

$$y'' - 4y' + 3y = 2 - \cos(2x) + 35 \sin(2x) \quad .'$$

$$y'' + y' - 2y = 11 \cos \frac{x}{2} - 7 \sin \frac{x}{2} \quad .\text{א.}$$

$$y'' + 5y' + 6y = -50 \sin 4x \quad .\text{ב.}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2} \quad .\text{ג.}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2 \sin x \quad .\text{ד.}$$

$$y'' + 4y = 12 \cos 2x \quad .\text{ה.}$$

$$y'' + 9y = -18 \cos 3x \quad .\text{ו.}$$

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 + e^2x + \sin 2x \quad .\text{ז.}$$

$$y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x \quad .\text{ח.}$$

$$y'' - y = 2x - 1 - 3e^x \quad .\text{ט.}$$

$$y''' + y'' = 3xe^x + x^2 + 1 \quad .\text{י.}$$

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x \quad .\text{יא.}$$

$$y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x) \quad .\text{יב.}$$

$$y'' + 3y - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \quad .\text{יג.}$$

4. נתונה משוואה דיפרנציאלית לינארית לא הומוגנית בעלת מקדמים קבועים

$$L[y] = q(x)$$

נתון כי שורשי הפולינום האופייני של המשוואה הם

$$r_1 = -2, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = 0, \quad r_5 = 3,$$

$$r_6 = 3, \quad r_7 = 5i, \quad r_8 = -5i, \quad r_9 = 6i, \quad r_{10} = -6i$$

רשום את צורת הפתרון הפרטי עבור כל אחד מהמקרים הבאים

$$q(x) = x^2 e^{3x} \quad .\text{א.}$$

$$q(x) = 7xe^{-2x} \quad .\text{ב.}$$

$$q(x) = 11 \quad .\text{ג.}$$

$$q(x) = 2 \cos 4x - \sin 4x \quad .\text{ד.}$$

$$q(x) = \sin 5x \quad .\text{ה.}$$

$$q(x) = 4e^{3x} - x + \cos 6x + e^{-x} \quad .\text{ו.}$$

5. בנה משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים שפתרונה הכללי הוא

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

6. פתור את בעיות ההתחלה הבאות



$$\begin{cases} y'' + y = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 3(2 - x^2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 50 \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ז.}$$

7. נתון כי $y_1(x)$, $y_2(x)$, פתרונות פרטיים של המשוואה

$$y'' + 4y' + 8y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$.

א. הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x)$.

ב. נתון כי $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח כי $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2})$.

8. נתון ששלושת הפונקציות

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = 2x, \quad y_3(x) = 3$$

הן פתרונות של המשוואה

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

מהו הפתרון הכללי של המשוואה?

9. נתונה המשוואה

$$y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 3e^{\alpha x}$$

וידוע ששורשי הפולינום האופייני הם

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = -3$$

מצא את צורת הפתרון הפרטי.

10. נתונה המשוואה $y'''' + 3y''' + 3y'' + y = 0$. מצא את הפתרון המקיים $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

11. נתונה המשוואה $y'' + 4y = 0$. מצא את הפתרון המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12. מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $x^2 y'' + x y' + 4y = 10x$

ב. $x^2 y'' - 3x y' + 5y = 3x^2$

ג. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$

ד. $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$

ה. $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$

ו. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

ז. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

ח. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \tan x)$

ט. $y''' + y' = \sin x + x \cos x$

י. $y^{(5)} + 4y' = x + 1 + \cos 2x$

13. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

$\begin{cases} x^2 y'' - 3x y' + 13y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} x^2 y'' - x y' + y = 2x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$
---	--

14. מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות

א. $y'' + y = \cot x$

ב. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$



$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{e^{2x} + 1} \quad .ג$$

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x} \quad .ד$$

$$y''' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad .ה$$

$$y''' + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \quad .ו$$

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 0 \quad .ז$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x \quad .ח$$

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x} \quad .ט$$

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \quad .י$$

$$(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x \quad .יא$$

$$x^3 y''' + xy' - y = 0 \quad .יב$$

$$x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x \quad .יג$$

$$x^2 y'' - 2y = \sin \ln x \quad .יד$$

15. ידוע שלמשוואה הבאה יש פתרון פרטי בצורת פולינום ממשי ממעלה 1. מצא את הפתרון הכללי

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$$

16. נתון שהפונקציה $y(x) = x^4 + x^4 \ln x$ היא פתרון פרטי של המשוואה הדיפרנציאלית

$$x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

מצא את המקדמים a_1, a_0 .

17. נתונים שני פתרונות $y_1(x), y_2(x)$ של המשוואה

$$y'' - y' + ye^{2x} = 0$$

ידוע שהורונסקיאן שלהם מקיים $W(0) = 1$. מצא את $W(x)$.



18. ידוע ששלושת הפונקציות

$$\begin{cases} y_1(x) = (x+4)\sin x \\ y_2(x) = (x+5)\sin x \\ y_3(x) = x\sin x + 3\cos x \end{cases}$$

הן פתרונות של המשוואה

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $q(x)$, רציפות על כל הישר הממשי $\mathbb{R}$. מצא פתרון $y(x)$ של המשוואה המקיים

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

והסבר מדוע פתרון זה יחיד על כל הישר.

19. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית והומוגנית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$ פונקציות רציפות בקרן $[0, \infty)$.

יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה, כך ש- $y_1(x) > 0$ בכל התחום, ו- $y_1(0) = y_2(0)$. הוכח או הפרך את כל אחת מהטענות הבאות

א. אם $y_1(3) = y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

ב. אם $y_1(3) < y_2(3)$, אז $y_1(x) < y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

ג. אם $y_1(3) > y_2(3)$, אז $y_1(x) > y_2(x)$ בכל הקרן $(0, \infty)$

הדרכה: חקור את הפונקציה $h(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$. העזר ברונסקיאן ובמשפט ערך הביניים של רול.

20. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית ליניארית הומוגנית ממעלה 3

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

כאשר $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β) , ונתונים שלושה פתרונות של המשוואה

$$y_1(x) = xe^x, \quad y_2(x) = (x+1)e^x, \quad y_3(x) = x-3$$

בקטע (α, β) .

א. איזה נקודה מבין הנקודות הבאות אינה שייכת לקטע (α, β) ?

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4, \quad x = 5$$

ב. ידוע שהפונקציה $p_2(x)$ מתאפסת בנקודה $x = x_0$, $\alpha < x_0 < \beta$. מצא את הנקודה x_0 .

הדרכה: השתדל להקדיש לבעיה לפחות 10 דקות מחשבה בכיוון הורנסקיאן לפני קריאת ההדרכה ...

א. בדוק באיזה נקודות הורנסקיאן של שלושת הפתרונות מתאפס? הורנסקיאן של שלושת הפונקציות צריך לצאת $W(x) = (5-x)e^{2x}$

ב. לאחר חישוב מפורש של הורנסקיאן $W(x)$, יש להשתמש בנוסחה $\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_{n-1}(x)$ בכדי לחשב את x_0 . $p_{n-1}(x)$ הוא המקדם של $y^{(n-1)}$.

21. נתונה המשוואה

$$x(x+1)y'' - 2y' - 2y = 0$$

א. הראה שהפונקציה $y_1(x) = \frac{1}{x-1}$ היא פתרון של המשוואה.

ב. מצא פתרון $y_2(x)$ של המשוואה המקיים $y_2'(1) = \frac{3}{2}$.

22. נתונה המשוואה

$$y^{(4)} + ay''' + by'' + cy' + ky = 0$$

כאשר a, b, c, k קבועים ממשיים. נתון ש- $y_1(x) = 5x + 3 \sin x$ הוא פתרון של המשוואה. הוכח או הפרך את הטענות הבאות

א. $k = 1, c = 0$

ב. $k = 1, c = 1$

ג. $k = 0, c = 0$

ד. $k = a + b + c$

ה. $c = a + b$

23. הסבר מדוע הורנסקיאן של המשוואה

$$y''' - (e^{3x} + \cos 5x)y' + x^7y = 0$$

הוא קבוע?

24. נתון כי $y(x)$ הוא הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ y(0) = \ln(4) \\ y'(0) = \ln(8) \end{cases}$$



חשב את $y(1)$.

25. נתונה משוואה ליניארית בתוספת פתרון פרטי ידוע $y_1(x)$. מצא את הפתרון הכללי.

$$y_1(x) = x, \quad (x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x^2(x + 1)y'' - 2y = 0$$

$$y_1(x) = \frac{e^x}{x}, \quad xy'' + 2y' - xy = 0$$

$$y_1(x) = \tan x, \quad y'' - 2(1 + \tan^2 x)y = 0$$

$$y_2(x) = \frac{1}{x}, \quad y_1(x) = x, \quad x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$y_1(x) = \sin(x^2), \quad xy'' - y' + 4x^3y = 0$$

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

26. ידוע כי $y_1(x) = e^x$ הוא פתרון של המשוואה $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$. עשה שימוש בפתרון זה ובנוסחת Abel בכדי למצוא פתרון שני שאינו תלוי ב- $y_1(x)$.

27. ידוע כי $\sin x$ הוא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} - 2y''' + 3y'' - 2y' + 2y = 0$$

מצא את הפתרון הכללי שלה.

28. למשוואה $6x^3y''' - 24x^2y'' + 48xy' - 48y = 0$ ידועים שני פתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x, \quad 0 < x < \infty$$

מצא את הפתרון הכללי.

29. למשוואה

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

ידוע הפתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפתרון הכללי.

30. למשוואה $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ ידועים שני פתרונות פרטיים

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x$$

מצא את הפתרון הכללי.

הדרכה: מלבד שיטת ההצבה ($y_3(x) = v(x)y_1(x)$) להורדת סדר, ניתן להשתמש בורנסקין ובנוסחת אבל למציאת פתרון שלישי בלתי תלוי.

31. נתונה המשוואה: $x^2y'' - 2y = 21\sqrt{x}$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפתרון $y(x) = x^2$. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

32. נתונה המשוואה: $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$. ידוע שלמשוואה ההומוגנית המתאימה יש את הפתרון $y_1(x) = x$. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

33. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x), \quad -\infty < x < \infty$$

כאשר $p_1(x)$, $p_0(x)$, רציפות על כל הישר. ידוע כי

$$y_1(x) = (x+3)\cos x, \quad y_2(x) = x\cos x, \quad y_3(x) = 3\sin x$$

הן שלושה פתרונות של המשוואה.

א. מצא את הפתרון הכללי למשוואה.

ב. חשב את $p_1(x)$.

34. ידוע שהפונקציה $y(x)$ היא הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = x \cos x, & 0 < x < \infty \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

חשב את הערך של $y(\pi)$.

35. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, ארבעה פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(4)} + \frac{1}{x}y''' + \frac{1}{x^2}y'' + \frac{1}{x^3}y' + \frac{1}{x^4}y = 0$$

ידוע כי $W[y_1, y_2, y_3, y_4](1) = 8$. חשב את $W[y_1, y_2, y_3, y_4](2)$.

הדרכה: השתמש בנוסחה $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_{n-1}(t)dt}$. הבחירה של הנקודות x, x_0 , לא קשה ...

36. בדוק האם קיים פתרון $y(x)$ עבור המשוואה הדיפרנציאלית

$$y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(4)} - y''' = 3e^{-x}$$

המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$?

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = x^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \quad \text{37. פתור את בעיית ההתחלה}$$

מהו תחום ההגדרה של הפתרון?

$$38. \text{ פתור את בעיית ההתחלה } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + 9y = 12 \sin(3 \ln x) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

מהו תחום ההגדרה של הפתרון שמצאת?

39. רשום את צורת הפתרון הפרטי על פי שיטת השוואת המקדמים (אין צורך למצוא קבועים) עבור המשוואה

$$y''' - 4y' = 3x + 10 \cos(x)$$

40. למשוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים $L[y] = 0$ יש את הפולינום האופייני

$$P(r) = r^2(r^2 + 4)^2(r^2 + 3r - 4)$$

מצא את צורת הפתרון הפרטי עבור המשוואה הלא-הומוגנית

$$L[y] = \sin 2x + xe^x + 2e^{-4x} + 5$$

41. יהי $y(x)$ פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

מצא את $y'''(6)$.

42. נתון שהפונקציה $y(x) = 3xe^x \sin(2x)$ היא פתרון של המשוואה

$$y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

כאשר a_0, a_1, a_2, a_3 הם מקדמים ממשיים קבועים. חשב את a_1, a_2 .

43. ידוע שהפונקציות $y_1(x) = \frac{\sqrt{\pi} + 3 \cos x}{\sqrt{x}}, y_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ הן שני פתרונות של המשוואה

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = q(x), \quad 0 < x < \infty$$

כאשר $q(x)$ פונקציה רציפה בקרן $(0, \infty)$. מצא את הפתרון הפרטי עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = q(x), & 0 < x < \infty \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$



44. רשום צורה כללית של פתרון פרטי עבור המשוואה

$$x^3 y''' + xy' - y = (x + \sqrt{x}) \ln x$$

45. באמצעות שיטת הוריאציה של הפרמטרים, מצא נוסחה לפתרון הכללי של המשוואה

$$y'' + y = q(x)$$

כאשר $q(x)$ היא פונקציה רציפה כלשהי בקטע נתון.

46. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית ההומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x)$, $q(x)$, פונקציות רציפות על כל הישר הממשי. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, שני פתרונות בלתי תלויים ליניארית של המשוואה. לגבי כל טענה, אם היא נכונה הוכח אותה, ואם לא, הפרך אותה על ידי דוגמא מתאימה

א. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, לעולם לא נחתכים.

ב. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך, אך אינם יכולים להשיק זה לזה.

ג. אם $y_1(x) > 0$ לכל x ממשי, אז הגרפים נחתכים לכל היותר פעם אחת.

ד. הגרפים של $y_1(x)$, $y_2(x)$, עשויים להיחתך אינסוף פעמים.

47. נתון כי הפונקציה $y(x) = x^2 \sin(3x)$ היא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הליניארית

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

כאשר כל המקדמים a_i הם קבועים ממשיים.

א. מצא מהו הערך המינימלי של n ?

ב. מצא בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף הקודם

ג. מצא את כל המקדמים של המשוואה

קישור לפתרונות 

פרק 5

פתרון משוואות באמצעות טורי חזקות

חזרה על נושא טורי חזקות

§5.1

חזרה תמציתית על נושא טורי חזקות. נושא זה אמור להיות מכוסה בקורסים של חדו"א 1 וחדו"א 2 ולכן מובאים עיקרי הדברים ללא הוכחות וללא פירוט רב מידי. השתדלנו לכלול רק נושאים שדרושים לנו עבור פתרון משוואות דיפרנציאליות.

הגדרה 5.1: טור פונקציות מהצורה

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

נקרא טור חזקות.

הנקודה x_0 נקראת **מרכז הטור**.

הקבועים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראים **מקדמי הטור**.



איור 5.1: Colin Maclaurin
1698-1746



איור 5.2: Brook Taylor
1685-1731



❖ בחלק גדול מהדוגמאות והמקרים מרכז הטור הוא בדרך כלל $x_0 = 0$. במקרה זה, יש לטור החזקות צורה יותר פשוטה

$$(**) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

❖ **דוגמה 1:** כל פולינום הוא למעשה טור חזקות אשר כל מקדמיו מלבד מספר סופי מתאפס

$$-7x^2 + 100x - 19 = -19 + 100x - 7x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \dots$$

לכן טור חזקות הוא הכללה של מושג הפולינום למימד אינסופי, ואכן בהקשרים מסוימים, טור חזקות נקרא לפעמים "פולינום אינסופי".

❖ **דוגמה 2:** טור החזקות הכי מוכר וידוע הוא הטור הגאומטרי

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

מרכז הטור הוא $x_0 = 0$, ולכל מקדמיו שווים 1 (כלומר, לכל n , $a_n = 1$). כזכור הוא מתכנס בקטע הפתוח $(-1, 1)$.

❖ תזכורת: דוגמאות בולטות של טורי מקלורן (טורי טיילור סביב $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \end{aligned}$$

❖ יש לשים לב לכך שנוסחת הטור הגאומטרי היא מקרה פרטי של נוסחת מקלורן שלפניה $(\alpha = -1)$, והחלפת x על ידי $-x$.



תחום התכנסות של טור חזקות

§5.1.1

- ❖ ברור כי כל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$.
- ❖ ככל שקצב הגידול של סדרת המקדמים a_n יותר מהיר כך מצטמצם תחום ההתכנסות של הטור.
- ❖ למשל טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$ בלבד!
 $n^n x^n = (nx)^n$ מתבדר אם $x \neq 0$.
- ❖ לעומת זאת, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס עבור כל x ממשי.

משפט 5.1: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בנקודה $x = x_1$, אזי הוא מתכנס במידה שווה ובהחלט בכל קטע $[x_0 - r, x_0 + r]$ עבור כל r המקיים $0 < r < |x_1 - x_0|$.

- ❖ מהמשפט הקודם נובע שתחום ההתכנסות של טור חזקות חייב להיות סימטרי סביב נקודת המרכז שלו x_0 (מה שמסביר את המונח "מרכז").
- ❖ **מסקנה:** תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ חייב להיות בעל אחת מהצורות הבאות:
 - א. נקודה בודדת $\{x_0\}$
 - ב. קטע פתוח מהצורה $(x_0 - R, x_0 + R)$
 - ג. קטע סגור מהצורה $[x_0 - R, x_0 + R]$
 - ד. קטע חצי-סגור מהצורה $[x_0 - R, x_0 + R)$
 - ה. קטע חצי-סגור מהצורה $(x_0 - R, x_0 + R]$
 - ו. כל הישר הממשי $(-\infty, \infty)$
- ❖ מהמשפט הקודם לא ניתן ללמוד דבר על נקודות הקצה של תחום התכנסות סופי. למשל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ מתכנס בנקודה $x = -1$ אך מתבדר עבור $x = 1$. תחום ההתכנסות שלו הוא $[-1, 1)$ (מרכז הטור הוא $x = 0$).
- ❖ המספר R נקרא **רדיוס ההתכנסות של הטור** ויש לו ערך מתאים בכל אחת מהצורות א'-ו':
 בצורה א', $R = 0$, ובצורה ו' $R = \infty$.



משפט 5.2: (נוסחת קושי-האדמר)

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ הוא

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

משפט 5.3: (נוסחת המנה לחישוב רדיוס התכנסות)

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ הוא

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(בהנחה שהגבול קיים והמקדמים לא מתאפסים)

❖ בנוסחת האדמר-קושי, במידה והגבול אינו קיים ניתן לקחת את הגבול העליון של הסדרה $(\limsup)$.

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

❖ **תרגיל 5.1:** אם רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא R , מה תוכל לומר על רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$?

התכנסות במידה שווה של טור חזקות

§5.1.2

כפי שראינו בשיעורים הקודמים, תכונת ההתכנסות במידה שווה מאפשרת לבצע פעולות שימושיות על טורים ולקבל תוצאות חשובות. לכן חשוב להכיר את התנאים שתחתיהם טור חזקות מתכנס במידה שווה.

משפט 5.4: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R

א. אם $R = 0$ אז הטור מתכנס בנקודה $x = x_0$ בלבד

ב. אם $R = \infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור סופי $[a, b]$

ג. אם $0 < R < \infty$ אז הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[a, b]$ המקיים

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R$$



- יש לציין כי המשפט אינו שולל אפשרות של התכנסות במידה שווה בתחומים גדולים יותר.
- למשל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ מתכנס נקודתית בקטע הסגור $[-1, 1]$. המשפט הקודם מבטיח התכנסות במידה שווה בכל תת-קטע $[a, b]$ המקיים

$$-1 < a < b < 1$$

- אך לא קשה לבדוק שהטור מתכנס במידה שווה (וגם בהחלט) בכל הקטע $[-1, 1]$.
- לעומת זאת הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס נקודתית בקטע הפתוח $(-1, 1)$, אך אינו מתכנס במידה שווה בכל הקטע $(-1, 1)$. ולכן טענת המשפט אופטימלית עבורו.

משפט 5.5: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R . אזי $f(x)$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה x , $-R < x < R$. אם הטור מתכנס בנקודה $x = R$, אז $f(x)$ רציפה משמאל בנקודה זו. אם הטור מתכנס בנקודה $x = -R$, אז $f(x)$ רציפה מימין בנקודה זו.

גזירה ואינטגרציה של טור חזקות

§5.1.3

משפט 5.6: (אינטגרציה של טור חזקות)

יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R .

אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ב. לשני הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R .

ג. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x = R$, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

- דוגמה 3:** אם נבצע אינטגרציה של הטור ההנדסי

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

נקבל נוסחה פרקטית לחישוב הלוגריתם הטבעי

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$



תחום ההתכנסות של הטור ההנדסי הוא $(-1, 1)$ אך תחום ההתכנסות של טור הלוגריתם הוא $(-1, 1]$.

משפט 5.7: (גזירה של טור חזקות)

יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R .

אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ב. לשני הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R .

ג. אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x = R$, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

המשפט האחרון מאפשר לנו למעשה לגזור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ כמה פעמים שנרצה

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + n a_n (x - x_0)^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

כמובן כל הזהויות האלה תקפות בקטע $(-R, R)$ בלבד (כאשר R הוא רדיוס ההתכנסות).

בנקודה x_0 (מרכז הטור) מתקבלים השוויונים הבאים:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= a_1 \\ f''(x_0) &= 2a_2 \\ f'''(x_0) &= 3 \cdot 2a_3 \\ \vdots &= \vdots \\ f^{(k)}(x_0) &= k! a_k \end{aligned}$$

המסקנה מהחישוב האחרון היא שניתן לבטא את מקדמי הטור באמצעות הנגזרות של $f^{(k)}(x)$ בנקודה x_0 .

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

משפט 5.8: (נגזרות גבוהות של טור חזקות)

יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R > 0$, אזי לסכום $f(x)$ יש נגזרת מכל סדר בכל נקודה $|x| < R$. את הנגזרת מסדר k של $f(x)$ ניתן לקבל על ידי גזירת הטור איבר איבר k פעמים. בנוסף לכך, קיים הקשר הבא בין הנגזרת מסדר k והמקדם a_k של הטור

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

פיתוח פונקציה לטור חזקות

§5.1.4

משפט 5.9: (יחידות טור חזקות)

אם שני טורי חזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

מקיימים $f(x) = g(x)$ עבור כל x בקטע פתוח $(x_0 - r, x_0 + r)$, עבור $r > 0$, אזי לכל n טבעי, $a_n = b_n$.

- ❖ המשמעות של המשפט הקודם היא שאם ניתן בכלל להציג פונקציה $f(x)$ באמצעות טור חזקות סביב נקודה x_0 , אז ניתן לעשות זאת בדרך אחת בלבד!
- ❖ השאלה שעניינה מתימטיקאים כמו טיילור ומקלורן היתה שבהינתן פונקציה המוגדרת בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$, האם קיים טור חזקות מתאים שסכומו הוא $f(x)$ לכל x בקטע זה?

הגדרה 5.2: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת סביב נקודה x_0 . כלומר קיים $0 < r \leq \infty$, כך שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$. נאמר כי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בקטע $(x_0 - r, x_0 + r)$, אם קיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ כך ש-

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

- ❖ נשאלת השאלה באילו תנאים ניתן לפתח פונקציה לטור חזקות?



נתחיל עם תנאים הכרחיים שעל פונקציה לקיים בכדי שיהיה לה טור חזקות.

משפט 5.10: (תנאי הכרחי לקיום טור חזקות)

אם פונקציה $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב נקודה x_0 , אז

א. תחום ההגדרה של $f(x)$ חייב להיות סימטרי מסביב x_0 (פרט לקצות הקטע)

ב. לפונקציה $f(x)$ יש נגזרת רציפה מכל סדר בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה

התנאים הנ"ל הכרחיים, אך לא מספיקים! הדוגמא הנגדית הידועה ביותר היא הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ גזירה ברציפות על כל הישר הממשי, ומקיימת $f^{(n)}(0) = 0$ לכל סדר גזירה n , ולכן אם יש לה טור חזקות, על פי משפט היחידות הוא חייב להיות טור חזקות שכל מקדמיו אפס, וזה כמובן אבסורד.

בכדי לענות על שאלת הקיום נחזור לנוסחת טיילור הידועה לנו מלימודי חדו"א 1:

משפט 5.11: (נוסחת טיילור)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x = x_0$, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו. אזי קיימת נקודה c בין x_0 ו- x כך ש-

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

נקראת נוסחת השארית של לגרנז'.

לאחר שנזכרנו והבנו מחדש את נוסחת טיילור מחדו"א 1, נוכל לנסח תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום טור חזקות.

משפט 5.12: (קיום טור חזקות)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות אינסוף פעמים בסביבה $(x_0 - r, x_0 + r)$ של הנקודה x_0 . לכל n טבעי, תהי $R_n(x)$ נוסחת השארית של לגרנז', המתאימה לנוסחת טיילור של $f(x)$ סביב x_0 . אזי $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 אם ורק אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

עבור כל x בסביבה $(x_0 - r, x_0 + r)$.

אריטמטיקה של טורי חזקות

§5.1.5

הזזת אינדקס סכימה

הזזת אינדקס הסכימה n מתבצעת על פי הכלל הפשוט הבא: בהחלפת אינדקס n

באינדקס חדש $n + k$ יש להחסיר k מגבולות הסכימה

למשל: הטור $\sum_{n=17}^{100} a_n x^n$ שקול לטור $\sum_{n=12}^{95} a_{n+5} x^{n+5}$ במקרה זה:

- אינדקס הסכימה הוא n

- גבולות הסכימה הם: 17, 100

- ההזזה היא: $k = 5$

- הטור $\sum_{n=17}^{100} a_n x^n$ שקול לטור $\sum_{n=22}^{105} a_{n-5} x^{n-5}$

ההזזה כאן היא: $k = -5$

בדרך כלל גבול הסכימה העליון הוא ∞ ולפעולת ההזזה אין עליו השפעה. לכן למשל

הטור $\sum_{n=17}^{\infty} a_n x^n$ שקול לטור $\sum_{n=12}^{\infty} a_{n+5} x^{n+5}$

ברוב המקרים אנו מעוניינים שבטור חזקות סטנדרטי תהייה התאמה בין האינדקס n

והחזקה $(x - x_0)^n$. במקרים אחרים אנו מעוניינים "ליישר חזקות" בין שני טורים שונים.

למשל אם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, אז בפעולת גזירה מאבדים את האיבר הראשון,

ולכן יש לבצע הזזת אינדקס $k = -1$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

בנגזרת השנייה מאבדים את שני האיברים הראשונים של הטור, ולכן יש לבצע הזזה

$$k = 2$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n$$



⬅ הכפלת טור חזקות בביטוי x^k

⬅ על סמך משפטים מתאימים מתורת הטורים האינסופיים, הפעולה הבאה היא חוקית בתחום ההתכנסות של הטור

$$x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+k}$$

תוצאת לוואי של הכפלה כזו היא שחזקת האיבר n גדלה, ולכן מומלץ "ליישר" את הטור על ידי הזזת אינדקס.

⬅ דוגמה 4:

$$x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+8)a_n x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} (n+5)a_n x^n$$

התבצעה הזזת אינדקס $k = -3$.

⬅ חיבור וחסור של טורי חזקות

⬅ על סמך משפטים מתאימים מתורת הטורים האינסופיים, הפעולות הבאות חוקיות בתחום ההתכנסות **המשותף** של הטורים המעורבים

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^{n+k} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (x - x_0)^{n+k} \end{aligned}$$

⬅ דוגמא טיפוסית לשילוב בין כל הפעולות הנ"ל שנפגוש בתרגילים שונים של פתרון משוואות דיפרנציאלית היא

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^{n+1} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)x^{n+3} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^{n+1} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 x^{n+3} \\ &= 4x^3 + 9x^4 + 16x^5 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n+2)^2 + (n-2)]x^{n+3} \\ &= 4x^3 + 9x^4 + 16x^5 + \sum_{n=6}^{\infty} [(n-1)^2 + (n-5)]x^n \\ &= 4x^3 + 9x^4 + 16x^5 + \sum_{n=6}^{\infty} (n^2 - n - 4)x^n \end{aligned}$$

פתרון משוואות דיפרנציאליות על ידי טורי חזקות

§5.2

באופן כללי, כשנתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נחפש פתרון מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. הבעייה כמובן היא לגלות את המקדמים a_n לכל n טבעי.

נתחיל בדוגמא פשוטה

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

צורת הטור שלנו היא

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

על פי משפט מהסעיף הקודם, הפתרון הפרטי הוא

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

ברור כי $a_0 = y(0) = 1$. ננסה לחשב את a_1

$$a_1 = y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot y(0) = 0$$

באותו אופן נוכל לחשב גם את a_2 . לשם כך נגזור את המשוואה לפי x ונקבל

$$y'' = 2y + 2xy'$$

ולכן

$$y''(0) = 2y(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 2$$

ולכן

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 1$$

ברור שנוכל להמשיך כך ולחשב את כל הנגזרות $y^{(n)}(0)$, אבל לא נראה שמציאת נוסחה כללית אפשרית לגילוי בשיטה זו.

ננסה להציב את הטור שלנו במשוואה

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ 2xy &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n \end{aligned}$$



השוויון $y' = 2xy$ גורר שוויון טורים, ולכן שוויון מקדמים

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$$

מדובר בנוסחת נסיגה (רקורסיה) של סדרת המקדמים

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

מצאנו כבר כי

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

ולכן

$$a_0 = \frac{1}{1}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{2a_0}{2} = \frac{2}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_1}{3} = 0$$

$$a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 4}$$

$$a_5 = \frac{2a_3}{5} = 0$$

$$a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$a_7 = \frac{2a_5}{7} = 0$$

$$a_8 = \frac{2a_6}{8} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

לאחר רישום של כעשרה איברים מתחילה להתבהר נוסחת המקדם הכללי של הטור. עבור

$n = 2k$, נוסחת המקדם היא

$$a_n = \frac{2^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} = \frac{2^k}{2^k k!} = \frac{1}{k!} = \frac{1}{\frac{n}{2}!}$$

ועבור $n = 2k + 1$ נוסחת המקדם היא

$$a_{2k+1} = 0$$

לכן נוכל לרשום

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

טור החזקות שלנו יראה כך

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

במקרה הספציפי, המשוואה $y' = 2xy$ היא משוואה פרידה קלה שפתרונה הכללי הוא

$$y(x) = Ce^{x^2}$$

הפתרון הפרטי עבור תנאי ההתחלה $y(0) = 1$ הוא $y(x) = e^{x^2}$. טור מקלורן של e^x הוא

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

אם נחליף את x ב- x^2 בטור האחרון, נקבל את התוצאה שקיבלנו קודם, ולכן אימתנו את התוצאה עבור המקרה הזה. באופן כללי יהיה עלינו להסתמך על משפטים מהסוג הבא בכדי לוודא שקיים פתרון בצורת טור חזקות. המשפט מנוסח עבור משוואה דיפרנציאלית מסדר 2, אך גירסאות דומות קיימות עבור כל סדר.

משפט 5.13: נתונה בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

אם הפונקציות $p(x)$, $q(x)$ ניתנות לפיתוח לטור חזקות סביב הנקודה x_0 (בקטע פתוח $(x_0 - R, x_0 + R)$, אז קיים פתרון אחד ויחיד לבעייה שגם הוא ניתן לפיתוח לטור חזקות מעל אותו קטע.

דוגמה 5: משוואת Airy

פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון: במקרה הנוכחי, $p(x) = 0$, $q(x) = x$, וברור ששתי פונקציות אלה הם כבר בצורה של טור חזקות (סופי). נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

נחשב את חלקי המשוואה

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \\ xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \end{aligned}$$

לכן

$$y'' - xy = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$$

קיבלנו נוסחת נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

נוכל לרשום אותה בצורה יותר נוחה

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ברור שכל המקדמים מהצורה a_{3k+2} , a_{3k+1} יתאפסו. נשאר לכן לחשב את המקדמיםמהצורה a_{3k}

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_3 &= \frac{1}{3 \cdot 2} a_0 = \frac{1}{3 \cdot 2} \\ a_6 &= \frac{1}{6 \cdot 5} a_3 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ a_9 &= \frac{1}{9 \cdot 8} a_6 = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \end{aligned}$$

הפתרון הפרטי של הבעיה הוא לכן

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \dots (3k-1) \cdot 3k} \end{aligned}$$

דוגמה 6: פתרון כללי עבור משוואת Airy

בדוגמא הקודמת פתרנו בעיית התחלה, אך לפעמים אנו נדרשים למצוא פתרון כללי למשוואה

$$y'' - xy = 0$$

על פי הבדיקה שביצענו בדוגמא הקודמת

$$\begin{cases} a_0 = \langle \text{free coefficient} \rangle \\ a_1 = \langle \text{free coefficient} \rangle \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

נחלק את סדרת המקדמים לתתי-הסדרות a_{3k+2} , a_{3k+1} , a_{3k} . את הצורה הכללית של סדרת המקדמים a_{3k} כבר מצאנו בדוגמא הקודמת

$$a_0 = \langle \text{free coefficient} \rangle$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

$$a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

באותו אופן נמצא את הנוסחה הכללית של סדרת המקדמים a_{3k+1}

$$a_1 = \langle \text{free coefficient} \rangle$$

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}$$

$$a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10 \cdot 9} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

מאחר ו- $a_2 = 0$, לכל k , $a_{3k+2} = 0$. הפתרון הכללי של משוואת Airy הוא אם כן

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_0 \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k} + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)} \\ &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)} \right) \end{aligned}$$

נסמן

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)}$$

לכן הפתרון הכללי שקיבלנו הוא

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

לא קשה לראות כי

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$$

$$y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1$$

ולכן הורונסקיאן של y_2, y_1 אינו מתאפס

$$W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

לכן קבוצת הפתרונות $\{y_1(x), y_2(x)\}$ היא קבוצה יסודית של פתרונות ולכן הפתרון שקיבלנו הוא אכן הפתרון הכללי של משוואת Airy.

תרגיל 5.2: פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

פתרון: כמובן אנו מעוניינים בפתרון בצורת טור חזקות

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ברור לנו כי

$$a_0 = y(0) = 3$$

$$a_1 = y'(0) = -2$$

ולכן על סמך התוצאה הקודמת, הפתרון הפרטי הוא

$$y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)} \right)$$

$$= 3 - 2x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)}$$

הערה: אם ממש רוצים, אז אפשר להציג את המקדמים על ידי נוסחאות יותר "מקצועיות"

כמו

$$a_{3k} = \frac{a_0}{(3k)!} \prod_{i=0}^{k-1} (3i+1)$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_1}{(3k+1)!} \prod_{i=0}^{k-1} (3i+2)$$

תרגיל 5.3: משוואת Airy מעל נקודה $x_0 = 1$ 

מצא קירוב פולינומיאלי ממעלה 7 עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

פתרון: הפעם יש למצוא שמונה איברים ראשונים של טור חזקות סביב הנקודה $x_0 = 1$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

נחשב נגזרת שנייה

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n$$

בכדי לחשב את המכפלה xy יש לבצע "תימרון קטן"

$$\begin{aligned} xy &= [1 + (x-1)]y \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) (x-1)^n \end{aligned}$$

נציב את שתי התוצאות האחרונות במשוואת איירי ונקבל

$$\begin{aligned} y'' - xy &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) (x-1)^n \right) \\ &= (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_n - a_{n-1}] (x-1)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$



קיבלנו נוסחת נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

שני השוויונים הראשונים נובעים מתנאי ההתחלה

$$a_0 = y(1) = 0$$

$$a_1 = y'(1) = 1$$

השוויון השלישי נובע מכך ש- $2a_2 - a_0 = 0$.

נוכל לרשום את נוסחת הנסיגה באופן נוח יותר

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1}}{(n+2)(n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

שלא כמו בתרגיל קודם, לא ניתן להפריד המקדמים על פי תתי-סדרות a_{3k+2} , a_{3k+1} , a_{3k} .
 עקב תלות בשני איברים קודמים שאינם מאותו סוג.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{a_0 + a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ a_4 &= \frac{a_1 + a_2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} \\ a_5 &= \frac{a_2 + a_3}{4 \cdot 5} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3} + 0}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5!} \\ a_6 &= \frac{a_3 + a_4}{5 \cdot 6} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5!} \\ a_7 &= \frac{a_4 + a_5}{6 \cdot 7} = \frac{\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5!}}{6 \cdot 7} = \frac{11}{7!} \end{aligned}$$

הקירוב הפולינומיאלי ממעלה 7 לפתרון הוא לכן

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{120} + \frac{11x^7}{5040}$$

תרגיל 5.4: משוואת Hermite



משוואה מהצורה

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

כאשר $\lambda = 0, 2, 4, \dots$, נקראת משוואת הרמיט (Hermite).

פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

פתרון: נחפש פתרון בצורת טור חזקות

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\ -2xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 6y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n \\ &= 2a_2 + 6a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2n a_n + 6a_n] x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

נקבל נוסחת נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{(2n-6)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

שני השוויונים הראשונים נובעים מתנאי ההתחלה

$$a_0 = y(0) = 0$$

$$a_1 = y'(0) = 1$$

השוויון השלישי נובע מכך ש- $2a_2 + 6a_0 = 0$ 

ננסה לבדוק כיצד נראים המקדמים הראשונים של הטור

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{(2 \cdot 1 - 6)a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3} \\ a_4 &= \frac{(2 \cdot 2 - 6)a_2}{3 \cdot 4} = 0 \\ a_5 &= \frac{(2 \cdot 3 - 6)a_3}{4 \cdot 5} = 0 \end{aligned}$$

ברור שהחל מ- $n = 4$ כל המקדמים מתאפסים, ולכן למעשה קיבלנו טור חזקות סופי (מה שבדרך כלל אנחנו מכנים פולינום)

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3}$$

בדיקה פשוטה מוכיחה כי זהו אכן פתרון של בעיית ההתחלה שלנו.

תרגיל 5.5: משוואת Hermite לא-הומוגנית

פתור את בעיית ההתחלה הבאה פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 6y = 12 - 16x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

פתרון: השיטה של טורי חזקות ישימה גם עבור משוואות לא-הומוגניות.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

נשתמש בתוצאות שקיבלנו בתרגיל הקודם

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 6y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -2na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_nx^n \\ &= 2a_2 + 6a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n + 6a_n]x^n \\ &= 12 - 16x \end{aligned}$$

על פי תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} a_0 &= y(0) = 2 \\ a_1 &= y'(0) = -1 \end{aligned}$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל גם

$$2a_2 + 6a_0 = 12$$

$$6a_3 + 4a_1 = -16$$

לכן נוסחת הנסיגה שלנו היא

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -2 \\ a_{n+2} = \frac{(2n-6)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

כמו בתרגיל הקודם, קל לבדוק שכל שאר המקדמים של הטור מתאפסים ולכן קיבלנו שוב פתרון שהוא למעשה פולינום

$$y(x) = 2 - x - 2x^3$$

קל לבדוק שזה הפתרון לבעיית ההתחלה שלנו. נסיים את הפרק הנוכחי במשפט הבא.

משפט 5.14: תהי x_0 נקודה רגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

כלומר $P(x_0) \neq 0$. אם $\frac{R(x)}{P(x)}$, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ הן פונקציות אנליטיות בנקודה x_0 אז ניתן להציג את הפתרון הכללי של המשוואה על ידי

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

כאשר a_0, a_1 קבועים שרירותיים ו- $y_1(x), y_2(x)$ שני פתרונות טוריים בלתי-תלויים של המשוואה. רדיוס ההתכנסות של כל הפתרונות הוא הקטן מבין רדיוסי ההתכנסות של טורי החזקות של $\frac{R(x)}{P(x)}, \frac{Q(x)}{P(x)}$.

הערה: פונקציה $f(x)$ מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ נקראת אנליטית בנקודה x_0 אם יש לה פיתוח לטור חזקות בסביבת x_0 עם רדיוס התכנסות חיובי.

תרגילים לפרק 5

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ו/או מלאים לחלק קטן של התרגילים. אבל לפני שלוחצים על הקישור מומלץ מאוד לפתור בכוחות עצמך! פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן. נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. מצא פתרון בצורת טור חזקות עבור כל אחת מהבעיות הבאות

א. $(1 + x^2)y'' + x^3y = 0$

ב.
$$\begin{cases} y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 12 \end{cases}$$

ג.
$$\begin{cases} (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ד. $(x^2 + 4)y'' + xy = x + 2$

ה.
$$\begin{cases} y'' + xy' + (2x - 1)y = 0 \\ y(-1) = 2 \\ y'(-1) = -2 \end{cases}$$

ו.
$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 8y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ז.
$$\begin{cases} (1 - x^2)y'' + 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

ח.
$$\begin{cases} y'' - (x - 1)y' - y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2. נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y'' - xy' + 5y = x + 1$

א. מצא פתרון כללי בצורת טור חזקות.

רשום את כל איברי הטור עד החזקה השישית (x^6).

ב. מצא פתרון פרטי מלא המקיים $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

ג. מהו סכום המקדמים $a_3 + a_5$ כאשר $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$?

3. יהי $y(x)$ הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 10y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

חשב את $y(\frac{1}{2})$.

4. יהי $y(x)$ הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

חשב את פתרון טור החזקות $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ עד החזקה השביעית $(x-1)^7$.

5. יהי $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + x^4 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

בדוק את נכונות או אי-נכונות הטענות הבאות

א. $a_1 = 0$

ב. $a_n = \frac{(-1)^n}{n!6^n}$

ג. רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = 1$

ד. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

ה. $a_6 = \frac{1}{30}$

ו. $a_7 = \frac{1}{210}$

ז. $1 - y(x)$ היא פונקציה אי-זוגית

6. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2(x^2 + 1)y' - 6xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של הטור, ומצא את ארבעת האיברים הראשונים של הטור שאינם אפס.

7. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (10 - x^3)y'' + 5xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

חשב את המקדמים a_3, a_4, a_5 .

8. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ טור חזקות שהוא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)y'' - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

מצא את נוסחת הנסיגה של המקדם a_n .

9. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שהוא פתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + my = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכים של m הפתרון של המשוואה יוצא פולינום ממעלה סופית, ומהי מעלת הפולינום המתאים לכל ערך m כזה?

10. בנה פתרון בצורת טור חזקות סביב הנקודה $x = -2$ עבור המשוואה $y'' + xy = 0$. רשום את הפתרונות עבור תנאי ההתחלה הבאים עד החזקה הרביעית

א. $y(-2) = 0, y'(-2) = 1$

ב. $y(-2) = 1, y'(-2) = 0$

 קישור לפתרונות

פרק 6

התמרת לפלס



איור 6.1: Pierre-Simon, marquis de Laplace 1749-1827

התמרת לפלס היא כלי מתימטי מתקדם ויצירתי שמסייע לפתרון בעיות מתימטיות שונות, ובין השאר מסייע בפתרון משוואות דיפרנציאליות מתאימות. בחלק הזה של הקורס נלמד על התכונות הבסיסיות של התמרת לפלס ונשתמש בה בכדי לפתור משוואות דיפרנציאליות רגילות מסוגים שונים. המשפטים והדוגמאות בסיכום זה מבוססים על שני המקורות הבאים:

1. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Boyce and DiPrima
2. Elementary Differential Equations with Linear Algebra, Ross L. Finney and Donald R. Ostberg

מהי התמרת לפלס?

§6.1

התמרת לפלס היא מקרה פרטי של מושג רחב יותר של **התמרות אינטגרליות** הנלמדות בקורסים מתקדמים בנושא אנליזה פונקציונאלית. התמרה מוכרת אחרת היא למשל **התמרת פורייה (Fourier)** הנלמדת בקורס מיוחד על טורי פורייה.

התמרה אינטגרלית היא למעשה מתודה שבאמצעותה ניתן להמיר פונקציה ממשיית $f(t)$ (המקיימת תנאים נדרשים) לפונקציה ממשיית אחרת $F(s)$. הצורה הכללית של התמרה אינטגרלית היא

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt$$

הפונקציה $K(s, t)$ נקראת הגרעין של ההתמרה, ועל גבולות האינטגרציה α, β , להיות מוגדרים בהתאם.

בהרבה מקרים, אחד או שני הגבולות אינסופיים ($\alpha = -\infty$ או $\beta = \infty$).

הפונקציה החדשה $F(x)$ נקראת **ההתמרה** של $f(x)$.



❶ הרעיון שביסוד שיטת ההתמרה הוא

1. הפעל את ההתמרה על הבעייה הנתונה בנעלם $f(t)$ (משוואה דיפרנציאלית, אינטגרלית, או בעייה מסוג אחר)
 2. קבל משוואה חדשה בפונקציה $F(s)$ שהיא קלה יותר
 3. פתור את הבעייה החדשה עבור הנעלם $F(s)$
 4. חזור לפונקציה המקורית $f(t)$ על ידי הפעלת ההתמרה ההפוכה על $F(s)$.
- דוגמה 1:** נראה למשל איך נראה פתרון טיפוסי של בעיית התחלה באמצעות התמרת לפלס (את הנוסחאות הדרושות נפתח בהמשך)

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1]$$

בהמשך נוכיח את שלושת הנוסחאות הבאות

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - sy'(0) - \mathcal{L}[y] \\ &= s^2 \mathcal{L}[y] - 0 - 1 - \mathcal{L}[y] \\ &= (s^2 - 1) \mathcal{L}[y] - 1 \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

ולכן

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = e^t - 1$$



- התהליך הזה יובהר היטב בהמשך כשנפתור משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת לפלס. בינתיים יש להתאזר בסבלנות.
- נתחיל בתאור התכונות הנדרשות מפונקציה בכדי שתהיה לה התמרת לפלס. התכונה הראשונה נקראת "רציפות למקוטעין" שמבטיחה אינטגרביליות.

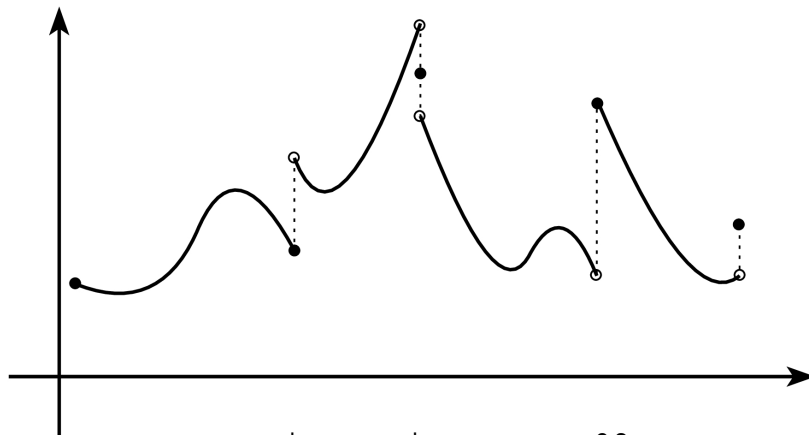
הגדרה 6.1: פונקציה $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **רציפה למקוטעין** בקטע $[a, b]$ אם

א. $f(t)$ רציפה בקטע $[a, b]$ מלבד אולי מספר סופי של נקודות:

$$t_1, t_2, \dots, t_n$$

ב. בכל נקודת אי-רציפות, הגבולות מימין ומשמאל קיימים וסופיים.

נקודות אי-הרציפות $t_n, \dots, t_2, t_1$ נקראות גם נקודות קפיצה



איור 6.2: פונקציה רציפה למקוטעין מעל קטע סופי סגור

הגדרה 6.2: פונקציה $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **רציפה למקוטעין** בקרן $[a, \infty)$ אם $f(t)$

רציפה למקוטעין בכל קטע סגור $[a, b]$, כאשר $a < b < \infty$.

הגדרה 6.3: (התמרת לפלס (Laplace Transform)

תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[0, \infty)$. התמרת לפלס שתסומן על ידי

$F(s)$ או $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת על ידי האינטגרל המוכלל

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

הגרעין של התמרת לפלס הוא

$$K(s, t) = e^{-st}$$

- ❖ ההגדרה אינה מבטיחה את קיום הפונקציה $F(s)$. מאחר ומדובר באינטגרל מוכלל יש לוודא כי הפונקציה $f(t)$ מקיימת תנאים מספיקים שיבטיחו את התכנסותו.
- ❖ הבנת התמרת לפלס מצריכה אם כן חזרה על נושא האינטגרלים המוכללים. פרק 11 של הספר חדו"א 1 מטפל בנושא בצורה שתספיק לצרכינו. נזכיר כמה מושגים ומשפטים שאנו זקוקים להם.

הגדרה 6.4: אם קיים הגבול $I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$ אזי I נקרא **האינטגרל המוכלל של $f(t)$ בקטע $[a, \infty)$ ונסמן אותו ע"י**

$$I = \int_a^\infty f(t) dt$$

ונאמר כי האינטגרל המוכלל של $f(t)$ בקטע $[a, \infty)$ **קיים** או **מתכנס**. אחרת נאמר כי האינטגרל **אינו קיים** או **מתבדר**. באופן שקול נוכל לרשום

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$$

- ❖ כל הפונקציות הנדונות בפרק זה יהיו רציפות למקוטעין, ולכן אינטגרביליות בכל קטע סגור בו הן מוגדרות.
- ❖ אינטגרביליות על חצי ישר $[a, \infty)$ תידרוש תכונה נוספת שנתאר בהמשך.

הגדרה 6.5: תהי $f(t)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ לכל $b > a$, כאשר a היא נקודה קבועה. נאמר כי $f(t)$ **אינטגרבילית בהחלט** בקטע $[a, \infty)$ אם האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty |f(t)| dt$ מתכנס. נאמר גם כי האינטגרל $\int_a^\infty f(t) dt$ **מתכנס בהחלט**.

משפט: (חדו"א 1, פרק 11, משפט 2)
אם $f(t)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a, \infty)$ אזי היא אינטגרבילית בקטע זה.

משפט: (מבחן ההשוואה, חדו"א 1, פרק 11, משפט 4)
יהיו $f(t)$ ו- $g(t)$ שתי פונקציות לא שליליות בקטע $[a, \infty)$, ואינטגרביליות בקטע $[a, b]$ עבור כל $b > a$. נניח כי קיים מספר ממשי b_0 כך שלכל $t \geq b_0$ מתקיים $f(t) \leq g(t)$. אזי

א. אם האינטגרל $\int_a^\infty g(t) dt$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(t) dt$ מתכנס.

ב. אם האינטגרל $\int_a^\infty f(t) dt$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^\infty g(t) dt$ מתבדר.



משפט 6.1: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[a, \infty)$. אם קיימת נקודה c כך ש-
 $|f(t)| \leq g(t)$ לכל $t \geq c$, ואם קיים האינטגרל המוכלל $\int_c^\infty g(t)dt$ אזי קיים גם האינטגרל
 המוכלל $\int_a^\infty f(t)dt$.
 אם לעומת זאת $f(t) \geq g(t)$ לכל $t \geq c$ ואם $\int_c^\infty g(t)dt$ מתבדר, אז גם $\int_a^\infty f(t)dt$ מתבדר.

הוכחה: ההוכחה נובעת מייד ממבחן ההשוואה עבור אינטגרלים מוכללים (חדו"א 1, פרק 11, משפט 4) וממשפט האינטגרליות בהחלט (חדו"א 1, פרק 11, משפט 2). ■

הגדרה 6.6: נאמר שפונקציה $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ היא **מסדר אקספוננציאלי (exponential order)** אם קיימים קבועים חיוביים K, c, a , כך שעבור כל $t \geq c$, מתקיים $|f(t)| \leq Ke^{at}$.

❖ במילים אחרות, פונקציה $f(t)$ היא מסדר אקספוננציאלי אם היא חסומה בהחלט על ידי פונקציית חזקה $g(t) = Ke^{at}$ בקרן $[c, \infty)$.

❖ **תרגיל 6.1:** הוכח כי הפונקציה $f(t) = t^n e^{at} \sin bt$ מסדר אקספוננציאלי עבור כל מספר טבעי n , ממשי a , וממשי b .

פתרון: הוכח כי $f(t)$ חסומה אקספוננציאלית על ידי e^{2at}

$$\left| \frac{t^n e^{at} \sin bt}{e^{2at}} \right| \leq \frac{t^n}{e^{at}}$$

קל להוכיח באמצעות כלל לופיטל כי

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{at}} = 0$$

❖ מסתבר שרוב הפונקציות שאנו פוגשים בבעיות פרקטיות הן מהסוג הזה.

❖ **תרגיל 6.2:** הוכח כי הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$ אינה מסדר אקספוננציאלי

הדרכה: הראה כי לכל K, a ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ke^{at}}{e^{t^2}} = 0$$

❖ המשפט הבא טוען שאם פונקציה היא מסדר אקספוננציאלי אז למעשה יש לה התמרת לפלס. לכן לרוב הפונקציות הפרקטיות יש התמרת לפלס.

משפט 6.2: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[0, \infty)$. אם $f(t)$ היא מסדר אקספוננציאלי אז התמרת לפלס של $f(t)$ קיימת עבור כל $s > a$, כאשר a הוא הקבוע שבהגדרה 6: $|f(t)| \leq Ke^{at}$.

הוכחה: עלינו להוכיח שעבור כל $s > a$, האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ מתכנס. נשתמש

במשפט 1. לכל $t \geq c$ מתקיים

$$|e^{-st} f(t)| \leq e^{-st} \cdot K e^{at} = K e^{(a-s)t}$$

מהנתון $s > a$ נובע כי $a - s < 0$ ולכן האינטגרל $\int_c^\infty e^{(a-s)t} f(t) dt$ מתכנס (קל לבדוק על ידי ההגדרה). לכן ממשפט 1 נובע כי גם האינטגרל המוכלל $\int_c^\infty e^{-st} f(t) dt$ מתכנס. מהשוויון

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^c e^{-st} f(t) dt + \int_c^\infty e^{-st} f(t) dt$$

נובעת מסקנת המשפט.

- ❖ ממשפט 2 משתמע שאם $f(t)$ חסומה אקספוננציאלית אז לא רק שהתמרת לפלס $\mathcal{L}[f]$ קיימת, היא גם מוגדרת על חצי ישר (a, ∞) .
- ❖ למעשה ניתן לומר יותר מזה. לכל $s > a$

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{K}{s-a}$$

זה נובע מייד מאי-השוויון שפגשנו בהוכחת המשפט

$$|e^{-st} f(t)| \leq K e^{(a-s)t}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](s)| &= \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty |K e^{(a-s)t}| dt \\ &= \frac{K}{s-a} \end{aligned}$$

- ❖ **מסקנה:** אם $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקרן $[0, \infty)$ ומסדר אקספוננציאלי, אז

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

- ❖ ממסקנה זו נובע כי פונקציות כגון $\frac{s}{s+1}$ אינן יכולות להיות התמרות לפלס של פונקציות רציפות למקוטעין מסדר אקספוננציאלי. עובדה זו תהיה משמעותית כשנגיע לנושא של ההתמרה ההפוכה.
- ❖ נחשב את התמרת לפלס של מספר פונקציות יסודיות.



דוגמאות יסודיות

§6.2

$$t \geq 0, f(t) = 1 \quad \text{⬅}$$

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$t \geq 0, f(t) = e^{at} \quad \text{⬅}$$

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

$$t \geq 0, f(t) = \cos at \quad \text{⬅}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos at dt$$

נסמן

$$I(b) = \int_0^b e^{-st} \cos at dt$$

נחשב את $I(b)$ על ידי שימוש כפול בשיטת האינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^b e^{-st} \cos at dt \\ &= \frac{1}{a} e^{-st} \sin at \Big|_0^b + \frac{s}{a} \int_0^b e^{-st} \sin at dt \\ &= \frac{1}{a} e^{-sb} \sin ab + \frac{s}{a} \left[-\frac{1}{a} e^{-st} \cos at \Big|_0^b - \frac{s}{a} \int_0^b e^{-st} \cos at dt \right] \\ &= \frac{1}{a} e^{-sb} \sin ab - \frac{s}{a^2} e^{-sb} \cos ab + \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^b e^{-st} \cos at dt \\ &= \frac{1}{a} e^{-sb} \sin ab - \frac{s}{a^2} e^{-sb} \cos ab + \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} I(b) \end{aligned}$$

קיבלנו כי

$$\frac{a^2 + s^2}{a^2} \cdot I(b) = \frac{1}{a} e^{-sb} \sin ab - \frac{s}{a^2} e^{-sb} \cos ab + \frac{s}{a^2}$$

ולכן

$$I(b) = \frac{ae^{-sb} \sin ab}{a^2 + s^2} - \frac{se^{-sb} \cos ab}{a^2 + s^2} + \frac{s}{a^2 + s^2}$$

שני האיברים הראשונים של אגף ימין שואפים לאפס כאשר b שואף לאינסוף עבור כל

$s > 0$, ולכן לכל $s > 0$,

$$\mathcal{L}[f](s) = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = \frac{s}{a^2 + s^2}$$

נוכל לסכם את התוצאה על ידי הנוסחה הבאה

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{a^2 + s^2} \quad (s > 0)$$

באופן דומה נוכיח את הנוסחה

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{a^2 + s^2} \quad (s > 0)$$

להלן רשימה חלקית מאוד של נוסחאות שנרחיב בהמשך

$$(6.1) \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

$$(6.2) \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a} \quad s > a$$

$$(6.3) \quad \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

$$(6.4) \quad \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$$

$$(6.5) \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

התמרת לפלס הפוכה $\mathcal{L}^{-1}$

§6.3

(Inverse Laplace Transform)

המשפט הבא יטען כי התמרת לפלס היא אופרטור ליניארי חד-חד-ערכי (במובן מסוים), ולכן יש לה התמרה הפוכה.

משפט 6.3: (Lerch)

אם $f(t)$, $g(t)$, פונקציות רציפות למקוטעין ומסדר אקספוננציאלי בקרן $[0, \infty)$, ואם

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$$

אזי $f(t) = g(t)$ בכל נקודת רציפות $0 \leq t < \infty$.



- משפט לרץ (Lerch) טוען למעשה כי האופרטור הליניארי $\mathcal{L}$ הוא חד-חד-ערכי במובן שההבדל בין שתי פונקציות המקור עשוי להיות רק בנקודות אי-הרציפות (ולכן זניח).
- לכן ממשפט לרץ נובע כי התמרת לפלס הפיכה, והאופרטור ההפוך נקרא "התמרת לפלס הפוכה" והוא מסומן על ידי $\mathcal{L}^{-1}$.
- למשל נוכל לרשום את הנוסחאות הבאות

$$(6.6) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1$$

$$(6.7) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] = e^{at}$$

$$(6.8) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2 + a^2} \right] = \sin at$$

$$(6.9) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + a^2} \right] = \cos at$$

$$(6.10) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n!}{s^{n+1}} \right] = t^n$$

פתרון משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת לפלס

§6.4

- המשפט הבא מספק את הקשר שבין התמרת לפלס למשוואות דיפרנציאליות. אבל קודם נפתור תרגיל שדרוש עבור הוכחת המשפט.
- **תרגיל 6.3:** הוכח שאם $f(t)$ פונקציה מסדר אקספוננציאלי, אזי קיים קבוע a כך שלכל $s > a$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$$

הוכחה: על פי ההגדרה, קיימים קבועים K, a, c , כך ש- $|f(t)| \leq Ke^{at}$, לכל $t \geq c$.
לכן

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{(a-s)t}$$

אם $s > a$ אזי $(a-s) < 0$ ולכן $\lim_{t \rightarrow \infty} Ke^{(a-s)t} = 0$. המסקנה נובעת מכלל הסנדביץ'. ■



משפט 6.4: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה בקרן $(0, \infty)$, בעלת נגזרת רציפה למקוטעין ומסדר אקספוננציאלי בקרן $[0, \infty)$. אזי שתי התמרות לפלס $\mathcal{L}[f]$ וגם $\mathcal{L}[f']$ קיימות, ובנוסף מתקיים השוויון

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0^+)$$

באופן כללי: אם $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(t)$ רציפות, והפונקציה $f^{(n)}(t)$ רציפה למקוטעין ומסדר אקספוננציאלי בקטע $[0, \infty)$, אזי

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

הוכחה: אם $f'(t)$ מסדר אקספוננציאלי אז קיימים קבועים חיוביים K , a כך ש-

$$-Ke^{au} \leq f'(u) \leq Ke^{au}$$

על ידי אינטגרציה פשוטה של כל האגפים ניתן לקבל כי גם $f(t)$ מסדר אקספוננציאלי

$$-K \int_0^t e^{au} du \leq \int_0^t f'(u) du \leq K \int_0^t e^{au} du$$

נקבל

$$-\frac{K}{a}e^{at}\Big|_0^t \leq f(t) - f(0) \leq \frac{K}{a}e^{at}\Big|_0^t$$

ההמשך ברור.

להוכחת השוויון הראשון נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= s\mathcal{L}[f] + e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

החישוב של הביטוי האחרון צריך להתבצע באמצעות גבולות. נשתמש בתוצאה של התרגיל

האחרון

$$\begin{aligned}
 e^{-st}f(t) \Big|_0^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st}f(t) \\
 &= 0 - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st}f(t) \\
 &= -f(0^+)
 \end{aligned}$$

קיבלנו אם כן כי

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0^+)$$

את שאר השוויונים ניתן לקבל על ידי שימוש חוזר בנוסחה האחרונה. למשל

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f''] &= s\mathcal{L}[f'] - f'(0^+) \\
 &= s[s\mathcal{L}[f] - f(0^+)] - f'(0^+) \\
 &= s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0^+)
 \end{aligned}$$

❶ **הערה:** אם $f(t)$, $f'(t)$, וכולי, רציפות בנקודה $t = 0$ אז הנוסחאות יראו קצת יותר פשוטות

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f'] &= s\mathcal{L}[f] - f(0) \\
 \mathcal{L}[f''] &= s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0) \\
 \mathcal{L}[f'''] &= s^3\mathcal{L}[f] - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)
 \end{aligned}$$

❷ המשמעות הפרקטית של המשפט האחרון היא שהתמרת לפלס מאפשרת לנו להמיר משוואה דיפרנציאלית למשוואה אלגברית שבה לא מעורבת שום נגזרת של הפונקציה, ולכן פשוטה יותר לפתרון.

❸ **דוגמה 2:** נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה עם תנאי התחלה באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$



נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1]$$

ידוע לנו כי $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ ולכן

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

על פי המשפט האחרון

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) = s^2 \mathcal{L}[y] - 1$$

ולכן

$$s^2 \mathcal{L}[y] - 1 - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

ולכן

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s-1)}$$

ניתן לרשום זאת גם כך (שיטת פירוק שברים חלקיים)

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

ולכן

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^t - 1$$

- ❖ השוויון האחרון מסתמך על כך שהתמרת לפלס ההפוכה היא אופרטור ליניארי. זה נובע מייד מכך שהתמרת לפלס היא אופרטור ליניארי חד-חד-ערכי
- ❖ לאור זאת, נותר לנו להעשיר את טבלת התמרות לפלס באופן כזה שתאפשר לנו לפתור כמה שיותר משוואות.
- ❖ למשפט 4 יש משפט מקביל עבור אינטגרל של פונקציה (שבין השאר שימושי עבור פתרון משוואות אינטגרליות).

תכונות נוספות

§6.5

משפט 6.5: תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין מסדר אקספוננציאלי בקרן $[0, \infty)$. אזי גם הפונקציה $F(t) = \int_0^t f(u) du$ מסדר אקספוננציאלי ומתקיים השוויון

$$\mathcal{L}[F(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f]$$



הוכחה: על פי הנתון, קיימים קבועים חיוביים K, a, c , כך שלכל $u \geq c$

$$|f(u)| \leq K e^{au}$$

לכן

$$\int_0^t |f(u)| \leq K \int_0^t e^{au} = \frac{K}{a} e^{au} \Big|_0^t < \frac{K}{a} e^{at}$$

לכן

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq \int_0^t |f(u)| du < \frac{K}{a} e^{at}$$

מכאן ש- $F(t)$ מסדר אקספוננציאלי. ברור כי $F(t)$ רציפה למקוטעין, ולכן יש לה התמרת לפלס:

$$\mathcal{L}[F] = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

נשתמש בשיטת האינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} \int F(t) e^{-st} dt &= \frac{-F(t) e^{-st}}{s} + \int F'(t) \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= \frac{-F(t) e^{-st}}{s} + \int f(t) \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= \frac{-F(t) e^{-st}}{s} + \frac{1}{s} \int f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[F] &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-F(t) e^{-st}}{s} \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-F(t) e^{-sa}}{s} + \frac{F(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}[f] \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[f] \end{aligned}$$

בתרגיל קודם ראינו כי עבור s מספיק גדול $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) e^{-sa} = 0$, כי F חסומה אקספוננציאלית. על פי הגדרת $F(t)$ ברור כי $F(0) = 0$. ■

ניתן להשתמש במשפט האחרון בשביל לקבל נוסאות חדשות של התמרות לפלס

דוגמה 3: ידוע ש-

$$\int_0^t \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin at$$

לכן על ידי שימוש במשפט נקבל

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{a} \sin at \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L} [\cos at] = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right) = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

קיבלנו לכן הוכחה נוספת לנוסחה

$$\mathcal{L} [\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > a$$

❖ **דוגמה 4:** עכשיו נשתמש במשפט האחרון בכדי לחשב את התמרת לפלס של הפונקציה

$f(t) = te^t$. על ידי שימוש שגרתני באינטגרציה בחלקים קל לקבל

$$\int_0^t x e^x dx = te^t - e^t + 1$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \mathcal{L} [te^t] &= \mathcal{L} [te^t - e^t + 1] \\ &= \mathcal{L} [te^t] - \mathcal{L} [e^t] + \mathcal{L} [1] \\ &= \mathcal{L} [te^t] - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

קיבלנו

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right) \mathcal{L} [te^t] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

לאחר פישוט נקבל

$$\mathcal{L} [te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad s > 1$$

❖ במהלך החישוב הסתמכנו על כך שהתמרת לפלס היא אופרטור ליניארי. קל להוכיח כי

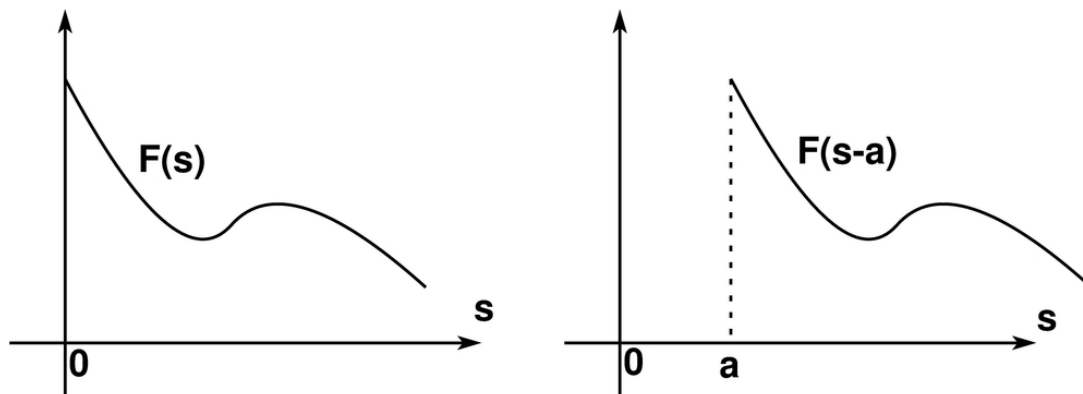
$$\mathcal{L} [af] = a \mathcal{L} [f]$$

$$\mathcal{L} [f+g] = \mathcal{L} [f] + \mathcal{L} [g]$$

משפטי הזזה

§6.6

בחלק הזה נציג שני משפטים שמתייחסים להתמרת לפלס של פונקציה מוזזת.



איור 6.3: הזזת פונקציה ב־ a יחידות ימינה

משפט 6.6: (משפט ההזזה הראשון)

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c) \quad \text{אם} \quad \mathcal{L}[f] = F(s)$$

הוכחה: נובע ישירות מההגדרה של התמרת לפלס

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{ct}f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s-c) \\ &= F(s-c) \end{aligned}$$

⬅ כאמור לכל נוסחה של התמרת לפלס קיימת נוסחה מקבילה עבור התמרת לפלס הפוכה

$$(6.11) \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct} \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

או באופן שקול

$$(6.12) \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{ct} \mathcal{L}^{-1}[F(s+c)]$$

דוגמה 5: על פי נוסחה (6.9)

$$\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2 + 9}$$

לכן

$$\mathcal{L}[e^{2t} \cos 3t] = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9} = \frac{s-2}{s^2 - 4s + 13}$$

דוגמה 6: חשב את $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right]$

פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{2s+3}{s^2-4s+20} &= \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16} \\ &= 2 \left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16} \right] + \frac{7}{4} \left[\frac{4}{(s-2)^2+16} \right] \end{aligned}$$

על פי התוצאות הקודמות

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right] = e^{2t} \cos 4t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+16}\right] = e^{2t} \sin 4t$$

לכן

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] = 2e^{2t} \cos 4t + \frac{7}{4}e^{2t} \sin 4t$$

הגדרה 6.7: פונקציית המדרגה u_c מוגדרת על ידי

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c \\ 1, & t > c \end{cases}$$

תחום ההגדרה של u_a הוא $[0, \infty)$

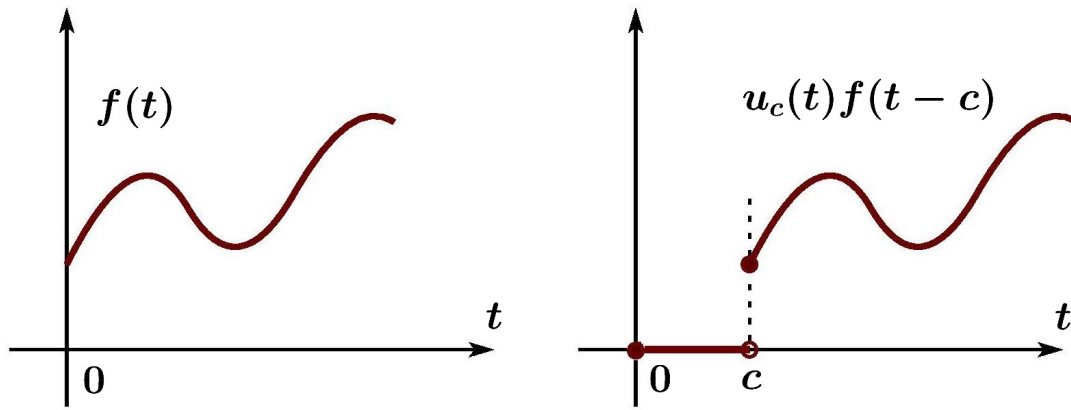
לפעמים משפחת הפונקציות u_c נקראות גם פונקציות הביסייד (Heavyside).

המטרה שלשמה הוגדרו הפונקציות הללו היא בכדי לאפשר הרחבת תחום הגדרה של פונקציה שהוזזה ימינה על כל הקרן $[0, \infty)$ באמצעות ביטוי מתימטי פשוט:

$$u_c(t) \cdot f(t-c)$$

כפי שניתן לראות בתרשים הבא

שים לב כי הפונקציה המוזזת ימינה מוגדרת כאפס בקטע $[0, c]$.

איור 6.4: הזזת פונקציה ב- e^{-cs} יחידות ימין והגדרתה כאפס בקטע $[0, c]$

משפט ההזזה השני מאפשר לנו לבטא את התמרת לפלס של ביטוי כגון $u_c(t)f(t)$ או $u_c(t)f(t-c)$ באמצעות התמרת לפלס של $f(t)$.

משפט 6.7: (משפט ההזזה השני)

תהי $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין וחסומה אקספוננציאלית בקטע $[-c, \infty)$ ($c > 0$). אזי

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)] \quad (6.13)$$

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t+c)]$$

הוכחה: מההגדרה נובע

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt \end{aligned}$$

עכשיו נבצע החלפת משתנה: $x = t - c$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] &= \int_0^\infty e^{-s(x+c)}f(x)dx \\ &= e^{-cs} \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \\ &= e^{-cs}\mathcal{L}[f] \end{aligned}$$

הנוסחה השניה נובעת מייד מהנוסחה הראשונה.

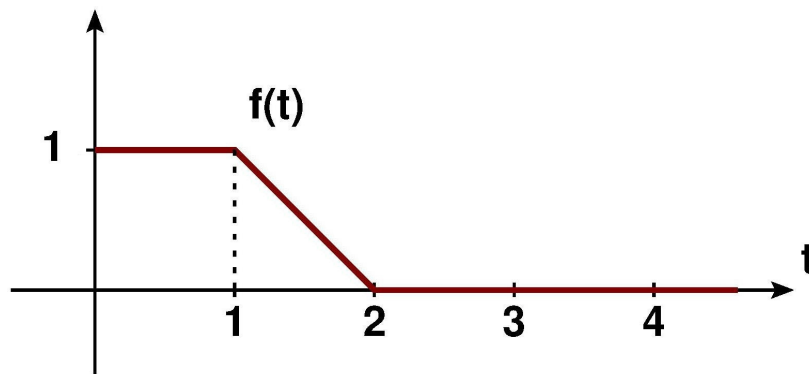
נסמן $F = \mathcal{L}[f]$. את שתי הנוסחאות האחרונות ניתן לרשום עבור התמרת לפלס הפוכה

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u_c(t)f(t-c) \quad (6.14)$$

דוגמה 7: אם $f(t) = u_c(t) \sin t$ אז

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= e^{-st} \mathcal{L}[\sin(t+c)] \\&= e^{-st} \mathcal{L}[\sin t \cos c + \sin c \cos t] \\&= e^{-st} (\cos c \mathcal{L}[\sin t] + \sin c \mathcal{L}[\cos t]) \\&= e^{-st} \left(\cos c \cdot \frac{1}{s^2+1} + \sin c \cdot \frac{s}{s^2+1} \right) \\&= \frac{e^{-st} (\cos c + s \sin c)}{s^2+1}\end{aligned}$$

דוגמה 8: חשב את התמרת לפלס של הפונקציה המתוארת על ידי הגרף הבא



איור 6.5: פונקציית מגלשה

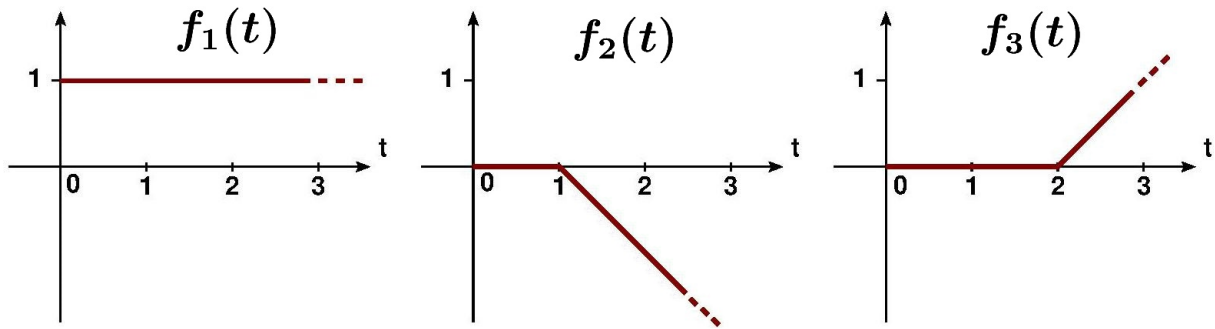
פתרון: לא קשה לבדוק שניתן להציג את הפונקציה $f(t)$ כסכום של שלושת הפונקציות הבאות

$$f_1(t) = 1$$

$$f_2(t) = -u_1(t) \cdot (t-1)$$

$$f_3(t) = u_2(t) \cdot (t-2)$$

כפי שניתן לראות בתרשים הבא

איור 6.6: פירוק פונקציית מגלשה לשלושה פונקציות $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$

לכן מהנוסחאות האחרונות יוצא

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[f_1 + f_2 + f_3] \\
 &= \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2] + \mathcal{L}[f_3] \\
 &= \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[-u_1(t) \cdot (t-1)] + \mathcal{L}[u_2(t) \cdot (t-2)] \\
 &= \mathcal{L}[1] + e^{-s} \mathcal{L}[t] + e^{-2s} \mathcal{L}[t] \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \\
 &= \frac{s - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-3t}}{s^2 + 6s + 10} \right] \quad \text{חשב את} \quad \text{דוגמה 9:}$$

פתרון: על פי נוסחה (6.14)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-3t}}{s^2 + 6s + 10} \right] = u_3(t) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 6s + 10} \right]$$

על פי נוסחה (6.11) (יש להציב $a = -3$)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 6s + 10} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+3)^2 + 1} \right] \\
 &= e^{-3t} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = e^{-3t} \sin t
 \end{aligned}$$

בדומה למשפט ההזזה הראשון, המשפט הבא מאפשר לנו לחשב את התמרת לפלס של הפונקציה $t^n f(t)$ אם ידועה לנו התמרת לפלס של $f(t)$.

משפט 6.8: אם $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ אז

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

הוכחה: נגזור את שני האגפים בשוויון על פי המשתנה s

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ונקבל

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)] \end{aligned}$$

החלפת סדר האינטגרציה והגזירה שהתבצעה בשלב השני מסתמכת על כך שהפונקציה $e^{-st}f(t)$ גזירה ברציפות על פי המשתנה s ! (הפונקציה $f(t)$ לא משתתפת במשחק!). הנוסחה הכללית נובעת מהפעלה חוזרת של הנוסחה עבור $n = 1$. ■

➤ הנוסחה המקבילה עבור התמרת לפלס הפוכה היא

$$(6.15) \quad \mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

➤ **דוגמה 10:** חשב את התמרת לפלס של $f(t) = t \sin t$.

פתרון:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \sin t] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t] \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

➤ **דוגמה 11:** חשב את התמרת לפלס של $f(t) = t^n$, כאשר n מספר טבעי.

פתרון:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \mathcal{L}[t^n \cdot 1] = -\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[1] \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

קיבלנו הוכחה שניה לנוסחה המוכרת

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

דוגמה 12: חשב את

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right]$$

פתרון:

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

לכן

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] = -\frac{1}{2} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right]$$

מנוסחה (6.15) נובע כי

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right] = -t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = -t \sin t$$

לכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] &= -\frac{1}{2} \int_0^t (-t \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t t \sin t dt \\ &= -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

חלק גדול מהפונקציות שבהן נדרשים לחשב התמרות הן מחזוריות (אותות חשמליים או גלים למיניהם בעיבוד אותות). המשפט הבא מטפל בפונקציות מחזוריות ומפשט את חישוב ההתמרה לקטע סופי (מחזור הפונקציה).

משפט 6.9: אם $f(t)$ היא פונקציה מחזורית, רציפה למקוטעין, ומסדר אקספוננציאלי, עם מחזור p , אזי

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-ps}} \quad (6.16)$$



הוכחה: על פי ההגדרה

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
 &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt
 \end{aligned}$$

עבור כל איבר בטור, נבצע החלפת משתנה $x = t - np$ (או $t = x + np$) ונקבל

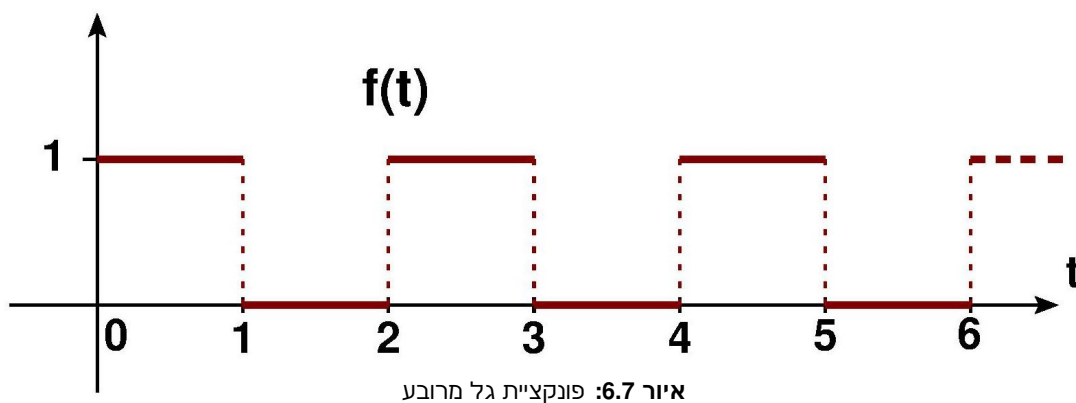
$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-s(x+np)} f(x+np) dx = e^{-nps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx$$

(בשלב האחרון השתמשנו במחזוריות של $f(t)$). לכן

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx \\
 &= \left[\int_0^p e^{-sx} f(x) dx \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nps} = \left[\int_0^p e^{-sx} f(x) dx \right] \cdot \frac{1}{1 - e^{-ps}} \\
 &= \frac{\int_0^p e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-ps}}
 \end{aligned}$$



❖ **דוגמה 13:** מצא את התמרת לפלס של הפונקציה המתוארת על ידי הגרף הבא

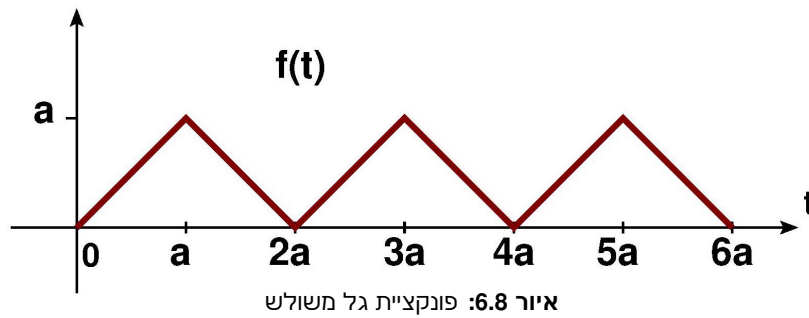


פתרון: במקרה זה גודל המחזור הוא $p = 2$. על פי משפט 9,

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$



❶ **תרגיל 6.4:** חשב את התמרת לפלס של פונקציית "גל משולש"



פתרון משוואות דיפרנציאליות באמצעות התמרת לפלס - הרחבה

§6.7

❷ בסעיף הקודם באותו שם נחשפנו לטכניקה הפשוטה של פתרון בעיות התחלה באמצעות התמרת לפלס. בסעיף הנוכחי נרחיב יותר.

❸ **דוגמה 14:** פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t} \cos 3t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$s^2 \mathcal{L}[y] + 1 + 4s \mathcal{L}[y] + 13 \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 9}$$

לכן

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s^2 + 4s + 13} + \frac{2}{s^2(s^2 + 4s + 13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2 + 4s + 13)^2}$$

עכשיו עלינו למצוא את ההתמרה ההפוכה של כל האיברים שבאגף ימין. האיבר הראשון קל:

$$\frac{1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{1}{(s+2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{(s+2)^2 + 9} \right]$$

ולכן

$$\mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s^2 + 4s + 13} \right] = -\frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t$$

הטיפול באיבר השני יותר מורכב. ראשית כל נשתמש בשיטת השברים החלקיים בכדי לפרק אותו לשברים יסודיים (מומלץ לחזור שוב על נושא שברים יסודיים בספר חדו"א 1, סעיף

(9.3)

$$\frac{2}{s^2(s^2 + 4s + 13)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4s + 13}$$

לאחר אירגון לפולינום נקבל

$$(A + C)s^3 + (4A + B + D)s^2 + (13A + 4B)s + 13B = 2$$

ולכן

$$A + C = 0$$

$$4A + B + D = 0$$

$$13A + 4B = 0$$

$$13B = 2$$

פתרון המערכת הליניארית הוא

$$A = -\frac{8}{169}, \quad B = \frac{2}{13}, \quad C = \frac{8}{169}, \quad D = \frac{6}{169}$$

לכן

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= -\frac{8}{169s} + \frac{2}{13s^2} + \frac{2(4s+3)}{169(s^2+4s+13)} \\ &= -\frac{8}{169} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{8}{169} \left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9} \right] - \frac{10}{3 \cdot 169} \left[\frac{3}{(s+2)^2+9} \right] \end{aligned}$$

עכשיו נוכל להתמש בנוסחאות הרגילות של התמרות לפלס הפוכה ולקבל

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} \right] = -\frac{8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}e^{-2t} \cos 3t - \frac{10}{507}e^{-2t} \sin 3t$$

נעבור עכשיו לאיבר השלישי והאחרון

$$\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} = -\frac{3}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+4s+13} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{(s+2)^2+9} \right)$$

לכן על פי נוסחה (6.15)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} \right] = \frac{1}{2}te^{-2t} \sin 3t$$

לאחר סיכום שלושת התוצאות של שלושת האיברים נקבל את הפתרון של בעיית ההתחלה שלנו

$$y = -\frac{179}{507}e^{-2t} \sin 3t + \frac{8}{169}e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{2}te^{-2t} \sin 3t + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}$$

הערה: למרות שהתהליך נראה ארוך ומייגע, הוא עדיין פשוט ביחס לשיטות כמו וריאציה של פרמטרים או השוואת מקדמים. למעשה התהליך מכני לגמרי וניתן לתכנת אותו בקלות:

לתכנתים שבינינו, ניתן לאמת את התוצאות באמצעות שימוש בתוכנת SymPy (Python). יש להעתיק את הקוד הבא ולהדביק לחלון המופיע בקישור הבא:

<http://live.sympy.org>

```
from sympy import *
s,t = symbols("s,t")
func = 2*t + 3*exp(-2*t)* cos(3*t)
laplace_transform(func, t, s)
>>> ((3*s**2*(s + 2) + 2*(s + 2)**2 + 18)/(s**2*((s + 2)**2 + 9)), 0, True)
rf = 2 / (s**2 * (s**2 + 4*s + 13))
polys.partfrac.apart(rf)
>>> 2*(4*s + 3)/(169*(s**2 + 4*s + 13)) - 8/(169*s) + 2/(13*s**2)
```

דוגמה 15: עד עכשיו פגשנו בדוגמאות למציאת פתרון פרטי באמצעות התמרת לפלס. אבל ניתן להשתמש בהתמרת לפלס גם עבור מציאת פתרון כללי. לשם כך נפתור את המשוואה הליניארית

$$(D - \alpha)^2 y = 0$$

פתרון: נוכל לרשום את הבעייה בצורה של בעיית התחלה,

$$\begin{cases} (D - \alpha)^2 y = 0 \\ y(0) = c_1 \\ y'(0) = c_2 \end{cases}$$

כאשר c_1 ו- c_2 קבועים כלשהם. נפעיל את התמרת לפלס על אגף שמאל

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(D - \alpha)^2 y] &= \mathcal{L}[y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y] \\ &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 2\alpha(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + \alpha^2 \mathcal{L}[y] \\ &= s^2 \mathcal{L}[y] - c_1 s - c_2 - 2\alpha(s\mathcal{L}[y] - c_1) + \alpha^2 \mathcal{L}[y] \end{aligned}$$

ונשווה עם אגף ימין

$$s^2 \mathcal{L}[y] - c_1 s - c_2 - 2\alpha s \mathcal{L}[y] + 2\alpha c_1 + \alpha^2 \mathcal{L}[y] = 0$$

לכן

$$(s^2 - 2\alpha s + \alpha^2) \mathcal{L}[y] = c_1 s + c_2 - 2\alpha c_1$$



ולכן

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[y] &= \frac{c_1 s + c_2 - 2\alpha c_1}{(s^2 - 2\alpha s + \alpha^2)} \\
 &= \frac{c_1 s - c_1 \alpha}{(s - \alpha)^2} + \frac{c_2 - c_1 \alpha}{(s - \alpha)^2} \\
 &= c_1 \cdot \frac{1}{s - \alpha} + (c_2 - c_1 \alpha) \cdot \frac{1}{(s - \alpha)^2}
 \end{aligned}$$

ידוע לנו כי

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - \alpha}\right] = e^{\alpha t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - \alpha)^2}\right] = te^{\alpha t}$$

ולכן

$$y = c_1 e^{\alpha t} + (c_2 - c_1 \alpha) te^{\alpha t} = d_1 e^{\alpha t} + d_2 te^{\alpha t}$$

דוגמה 16: אחד היתרונות בשימוש בהתמרת לפלס הוא בכך שהיא מאפשרת לפתור משוואות עם פונקציות לא רציפות או לא גזירות (מה שמאוד קשה בשיטות אחרות). נדגים זאת על בעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{cases} y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t, & t > \pi \end{cases} \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

פתרון: נסמן

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \sin t, & t > \pi \end{cases}$$

אזי

$$h(t) = t + u_\pi(t)(\sin t - t)$$

לכן נוכל לרשום את בעיית ההתחלה שלנו בצורה הבאה

$$\begin{cases} y'' + y = t + u_\pi(t)(\sin t - t) \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[y] - As - B + \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} + e^{-\pi s} \mathcal{L}[\sin(t + \pi) - (t + \pi)] \\ &= \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right) \end{aligned}$$

ולכן

$$(s^2 + 1) \mathcal{L}[y] = As + B + \frac{1}{s} - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right)$$

ולכן

$$\mathcal{L}[y] = \frac{As}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 1} + \frac{1}{s(s^2 + 1)} - e^{-\pi s} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{\pi}{s(s^2 + 1)} \right]$$

ולכן

$$\begin{aligned} y &= A \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] + B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] \\ &\quad - u_\pi(t) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{\pi}{s(s^2 + 1)} \right] \end{aligned}$$

השתמשנו כמובן בנוסחה (6.13) באיבר האחרון. נחשב כל איבר בנפרד:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] = \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = 1 - \cos t$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{2s} \cdot \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} \right] = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \right] = \frac{1}{2} \int_0^t x \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] (x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t x \sin x dx = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

לאחר הצבה וכינוס איברים נקבל

$$y(t) = A \cos t + (B - 1) \sin t + t - u_\pi(t) \left[\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \cos t + \frac{1}{2} \sin t + t \right]$$



דוגמה 17: פתור את בעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{cases} y'' + y = q(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & 2 < t < \infty \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון: את הפונקציה $q(t)$ פגשנו כבר באיור 6.5 ("פונקציית מגלשה") בעמוד 198 ומצאנו כי ניתן לבטא את $q(t)$ על ידי

$$q(t) = 1 - u_1(t) \cdot (t - 1) + u_2(t) \cdot (t - 2)$$

ובנוסף גם חישבנו את התמרת לפלס של $q(t)$

$$\mathcal{L}[q] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

נסמן $F(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. אזי

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + y] &= s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) \\ &= (s^2 + 1)F(s) - s \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} (s^2 + 1)F(s) &= s + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \\ &= \frac{s^2 + 1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

קיבלנו

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s^2 + 1)}$$

על ידי שיטת הפירוק לשברים יסודיים קל לגלות כי

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

ולכן

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2 + 1} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}$$



זהו השלב המתאים לחישוב ההתמרה ההפוכה

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right] \end{aligned}$$

את האיבר הראשון נקבל ישירות מהטבלה הבסיסית

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

את ארבעת האיברים הנותרים נחשב על ידי נוסחת ההזזה (6.14):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u_c(t)f(t-c)$$

נשתמש בנוסחאות

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

לכן

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right] = u_1(t)(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right] = u_1(t)\sin(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = u_2(t)(t-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right] = u_2(t)\sin(t-2)$$

ולכן הפתרון עבור בעיית ההתחלה שלנו הוא

$$f(t) = 1 - u_1(t)(t-1) + u_1(t)\sin(t-1) + u_2(t)(t-2) + u_2(t)\sin(t-2)$$

משפט הקונבולוציה

§6.8

נסיים את הפרק על התמרת לפלס בתכונה הכי חשובה של ההתמרה הזו. מלב השימוש החשוב שיש למשפט הקונבולוציה עבור פתרון חישובים, משפט הקונבולוציה יש חשיבות תאורטית בתחום האנליזה הפונקציונלית. נוסחת הקונבולוציה שימושית במיוחד בכדי לחשב התמרות הפוכות של משוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים.



הגדרה 6.8: יהיו $f(t)$, $g(t)$ שתי פונקציות רציפות למקוטעין בקרן $[0, \infty)$. **הקונבולוציה** של שתי הפונקציות מוגדרת על ידי

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

משפט 6.10: יהיו $f(t)$, $g(t)$ שתי פונקציות רציפות למקוטעין ומסדר אקספוננציאלי, ויהיו

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

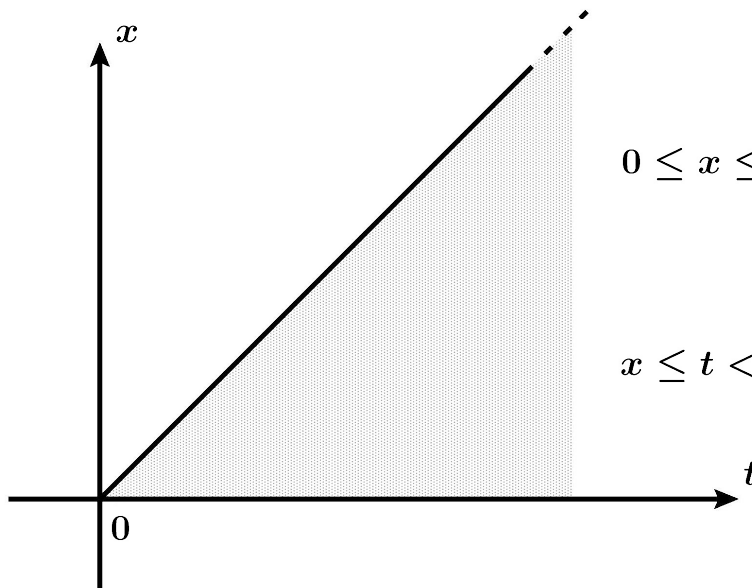
אז

$$(6.17) \quad \mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$$

הוכחה: על פי הגדרת התמרת לפלס

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(t)] &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-x)g(x)dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-x)g(x) dx dt \end{aligned}$$

האינטגרציה הכפולה מתבצעת מעל התחום המתואר בתרשים הבא



תיאור 1:

$$0 \leq x \leq t, \quad 0 \leq t < \infty$$

תיאור 2:

$$x \leq t < \infty, \quad 0 \leq x < \infty$$

איור 6.9: תחום האינטגרציה של אינטגרל הקונבולוציה במישור ה- tx עם שני תיאורים שונים

על פי התרשים ניתן לראות כי את תחום האינטגרציה ניתן להגדיר בשני אופנים שונים, ולכן

את האינטגרל הכפול הקודם ניתן לחשב גם באופן הבא:

$$\int_0^\infty \int_x^\infty e^{-st} f(t-x) g(x) dt dx$$

או

$$\int_0^\infty g(x) \left(\int_x^\infty e^{-st} f(t-x) dt \right) dx$$

נבצע החלפת משתנה $u = t - x$ בביטוי $\int_x^\infty f(t-x) dt$

$$\int_x^\infty e^{-st} f(t-x) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+x)} f(u) du$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-x) g(x) dx \right] &= \int_0^\infty g(x) \left(\int_0^\infty e^{-s(u+x)} f(u) du \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} g(x) \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) dx \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx \right) \\ &= \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned}$$



הנוסחה המקבילה עבור ההתמרה ההפוכה היא

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[f(t)] * \mathcal{L}^{-1}[g(t)]$$

ניתן לראות את פעולת הקונבולוציה כמכפלה וקטורית במרחב $\mathcal{E}$ של הפונקציות הרציפות למקוטעין מסדר אקספוננציאלי בקרן $[0, \infty)$ המסומנת על ידי $f * g$.

טענה:

$$f * g = g * f$$

כלומר פעולת הקונבולוציה הי קומוטטיבית.

הוכחה: זה יוצא מייד מהנוסחה (6.17):

$$f * g = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)F(s)] = g * f$$



באותו אופן נוכיח כי פעולת הקונבולוציה אסוציאטיבית ודיסטריוטיבית

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

תרגיל 6.5: חשב את $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right]$

פתרון: כמובן נוכל לפתור את הבעיה על ידי פירוק לשברים יסודיים, אבל ניתן לעשות זאת גם באמצעות נוסחת הקונבולוציה

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right]$$

$$= 1 * \sin t = \int_0^t \sin x \, dx = 1 - \cos t$$

פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (D^2 + D - 6)y = h(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

בהינתן ש- $h(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומסדר אקספוננציאלי בקרן $[0, \infty)$.

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$(s^2 + s - 6)\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h]$$

לכן

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[h]}{(s-2)(s+3)}$$

ולכן

$$y(t) = h(t) * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + s - 6} \right]$$

נשתמש בשברים יסודיים בכדי לקבל

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-2)(s+3)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{5(s-2)} - \frac{1}{5(s+3)} \right] = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

קיבלנו

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \right) * h(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{5}e^{2(t-x)} - \frac{1}{5}e^{-3(t-x)} \right] h(t) \, dx$$

בהינתן הגדרה ספציפית של $h(t)$ נוכל לקבל את הפתרון הספציפי לבעיה על ידי

$$y(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{5}e^{2(t-x)} - \frac{1}{5}e^{-3(t-x)} \right] h(t) \, dx$$

טבלת התמרות לפלס בסיסית

§6.9

פונקציה	התמרת לפלס	תחום
$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s}{(s-a)^2+b^2}$	
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
$f'''(t)$	$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k)}(0)$	
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	
$-tf(t)$	$F'(s)$	
$t^2f(t)$	$F''(s)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	
$\delta_c(t)$	e^{-cs}	



תרגילים לפרק 6

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ומלאים לחלק מהתרגילים. פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן (מקווה לעזרה מצד התלמידים). נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. האם קיימת התמרת לפלס עבור הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$? אם היא קיימת, מצא אותה, ומצא היכן היא מוגדרת. אם לא, נמק מדוע היא אינה קיימת.

2. מצא את ההתמרת לפלס של $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$

3. הוכח שאם $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומחזורית p ($p > 0$), אזי

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

4. תהי $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית 4 כך ש-

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ -1, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

הוכח כי

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\tanh s}{s}$$

5. חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t} \cos 2t$	ב. $e^{-4t} \cosh 2t$
ג. $(t^2 + 1)^2$	ד. $3 \cosh t - 4 \sinh 5t$
ה. $t^n \sin t$	ו. $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$
ז. $\frac{3}{2t-1}$	

6. הבע כל פונקציה ע"י פונקציות מסוג הביסייד ומצא אחר כך את התמרות לפלס של:



$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^2, & 2 \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{ב.} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & 1 \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1, & 2\pi \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ t - 3, & 2 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{ה.} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{ו.}$$

7. חשב את התמרת לפלס של $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. (רמז: חשב את $\mathcal{L}[f](s)$ $\frac{d}{ds}$).

8. חשב את f אם ידוע כי $\mathcal{L}[f](s) = \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{s^2 - a^2} \right]$, $a > 0$.

9. הוכח את כל אחת מן הנוסחאות הבאות:

$$\mathcal{L}[\sin^2 t](s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \quad \text{א.}$$

$$\mathcal{L}[A \cos(\omega t + \theta)](s) = \frac{A(s \cos \theta - \omega \sin \theta)}{s^2 + \omega^2} \quad \text{ב.}$$

$$\mathcal{L}[\cos at \cosh at](s) = \frac{s^3}{s^4 + 4a^4} \quad \text{ג.}$$

$$\mathcal{L}[(t^2 - 5t + 6)e^{2t}](s) = \frac{6s^2 - 29s + 36}{(s - 2)^3} \quad \text{ד.}$$

10. על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את כל אחד מן האינטגרלים הבאים:



$$\int_0^\infty t^3 e^{-t} \sin t \, dt \quad \text{ב.}$$

$$\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t \, dt \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx \quad \text{ג.}$$

$$11. \text{ לכל } t \geq 0, \text{ תהי } f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \text{ הוכח כי}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s} \arctan \frac{1}{s}$$

$$12. \text{ לכל } t \geq 0, \text{ תהי } f(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du \text{ הוכח כי}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\ln(1+s^2)}{2s}$$

$$13. \text{ לכל } t \geq 0, \text{ תהי } f(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \text{ הוכח כי}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\ln(1+s)}{s}$$

$$14. \text{ לכל } t \geq 0, \text{ תהי } f(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du \text{ הוכח כי}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s} \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right)$$

$$15. \text{ חשב את התמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3s-14}{s^2-4s+18} \quad \text{א.}$$

$$\frac{s^2}{(s^2+4)^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{1}{s^2-3s+2} \quad \text{ג.}$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) \quad \text{ו.}$$

$$\frac{s}{(s^2+4)^2} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{s^3}{s^4-16} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{1}{(s^2+4)^2} \quad \text{ז.}$$

$$\frac{2s^2+s-10}{(s-4)(s^2+2s+2)} \quad \text{י.}$$

$$\frac{1}{s^3+1} \quad \text{ט.}$$

$$16. \text{ לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע } [0, \infty) \text{ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.}$$

$$\text{א. } y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$$

$$\text{ב. } y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$\text{ג. } y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$



$$\begin{aligned}
 &\text{ד. } y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \\
 &\text{ה. } y'' + 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\
 &\text{ו. } ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0
 \end{aligned}$$

17. חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned}
 &\text{א. } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \\
 &\text{ב. } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^2, & t > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{ג. } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 4t, & t \geq 2 \end{cases} \\
 &\text{ד. } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 7 \\ 3-t, & 7 < t < 8 \\ 1, & 8 \leq t \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{ה. } f(t) = \begin{cases} 5, & a \leq t < b \\ 0, & t < a \text{ or } t \geq b \end{cases} \\
 &\text{ו. } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 4 \\ 4, & t \geq 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{ז. } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 3 \\ 8-2t, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t \end{cases} \\
 &\text{ח. } u_1(t) + 3u_5(t)
 \end{aligned}$$

$$\text{ט. } f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

18. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

$$\begin{aligned}
 &\text{א. } \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)} \\
 &\text{ב. } \frac{e^{-16s}}{s(s^2+2s+4)}
 \end{aligned}$$

19. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0, \infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

$$y''(t) + 4y'(t) + 7y(t) = u_1(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{א.}$$

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (-1)^{[t]}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{ב.}$$

$$y'''(t) - y(t) = h(t), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad \text{ג.}$$

כאשר

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

20. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t) = \int_0^t (u^2 - u + e^{-u}) du$$

21. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0, \infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

$$y''(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{א.}$$

כאשר

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases}$$

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{ב.}$$

כאשר

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t, & t > 2\pi \end{cases}$$

$$y'''(t) - y''(t) + 4y'(t) - 4y(t) = 68e^x \sin 2x \quad \text{ג.}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -19, \quad y''(0) = -37$$

$$y''(t) + 9y(t) = f_c(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \quad \text{ד.}$$

כאשר עבור $c > 0$,

$$f_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c \\ t - c, & c < t \end{cases}$$

$$y'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'' - 2y' + 2y = \cos t \quad \text{ה.}$$

22. פתור את בעיות ההתחלה הבאות באמצעות התמרת לפלס

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2y' + y = 4e^t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{array} \right. \quad \text{א.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = u_{3\pi}(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ב.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 4y = \sin t - u_{2\pi}(t) \sin(t - 2\pi) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ג.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\frac{\pi}{2}}(t)(t - \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ד.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq t < \infty \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ה.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 6y' + 15y = 2 \sin 3t \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -4 \end{array} \right. \quad \text{ו.}$$

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} y'' - y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \leq t \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 10 \\ 0, & 10 \leq t \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases} \quad \text{י.}$$

23. תהי $y_1(t)$ פתרון של הבעיה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_1(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \geq 0)$$

ותהי $y_2(t)$ פתרון של הבעיה

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f_2(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad (t \geq 0)$$

כאשר נתון ש- $f_1(t) \leq f_2(t)$, לכל $t \geq 0$, ושהפונקציות f_1 ו- f_2 רציפות וחסומות בקטע

$[0, \infty)$. הוכח כי $y_1(t) \leq y_2(t)$ עבור כל $t \geq 0$.

24. על ידי שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה, חשב את

א. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\cosh a\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right], 0 < a < 1$ ב. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(1+s^2)^2} \right]$

ג. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(1+s^2)} \right]$ ד. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(1+s^2)^3} \right]$

ה. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s\sqrt{1+s}} \right]$ ו. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sqrt{s}}{s-1} \right]$

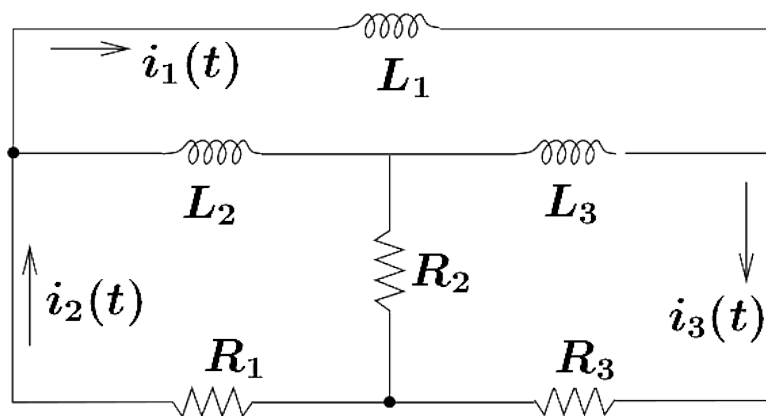
ז. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(e^s+1)} \right]$ ח. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)} \right]$

קישור לפתרונות 

פרק 7

מערכות של משוואות ליניאריות

- ❶ מערכות של משוואות דיפרנציאליות עולות בתחומי הפיזיקה, האלקטרונקה, יחסי גומלין בין אוכלוסיות בתחום האקולוגיה, הביולוגיה, ומדעי החברה, ועוד. מערכת של משוואות דיפרנציאליות היא שיטה מתמטית לייצוג ובניית מודל מתמטי של מערכות שבהן קבוצת גדלים (פונקציות) התלויים ומשפיעים אחד על השני על פי חוקים פיזיקאליים או אחרים.
- ❷ למשל בכדי לבנות מודל של מעגל חשמלי מורכב, יש לייצג את הזרמים, המתחים, הקיבולים, ההשראות (inductance), והתנגדויות על פני מספר רב של רכיבי המעגל, על ידי פונקציות מתמטיות מתאימות, ולתאר את הקשרים ביניהם באמצעות משוואות דיפרנציאליות שבהן עשויות להופיע הנגזרות של כל הפונקציות השונות במודל.



איור 7.1: מעגל חשמלי

❖ מערכת משוואות מסוג זה עשויה להיראות למשל כך

$$i_1'(t) = -\frac{R_2}{L_1}i_2(t) - \frac{R_3}{L_1}i_3(t)$$

$$i_2'(t) = -\left(\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_1}\right)i_2(t) - \left(\frac{R_1}{L_2} - \frac{R_3}{L_1}\right)i_3(t)$$

$$i_3'(t) = -\left(\frac{R_1}{L_3} - \frac{R_2}{L_1}\right)i_2(t) - \left(\frac{R_1}{L_3} - \frac{R_3}{L_1} + \frac{R_3}{L_3}\right)i_3(t)$$

כאשר הפונקציות הנעלמות $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ מציינות את העוצמה של הזרם החשמלי העובר בחוטים שונים במעגל כפונקציה של הזמן t .

❖ נציג עוד מספר דוגמאות של מערכות מסדר ראשון, תוך כדי ציון סוג המערכת **בצורתה הנורמלית**. ברוב המקרים המערכת תכלול n משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, של n פונקציות נעלמות: $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, כאשר t הוא בדרך כלל משתנה הזמן.

❖ **מערכת משוואות הומוגנית בעלת מקדמים קבועים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

❖ **מערכת משוואות הומוגנית בעלת מקדמים משתנים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = t^2x_1(t) - 3tx_2(t) \\ x_2'(t) = (1-t)x_1(t) + t^7x_2(t) \end{cases}$$

❖ **מערכת משוואות לא-הומוגנית בעלת מקדמים קבועים:**

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) + \cos t \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) - e^t \end{cases}$$

❖ לבעיות התחלה יש לצרף n תנאי התחלה (כאן $n = 2$)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} x_1(0) &= 8 \\ x_2(0) &= -6 \end{aligned} \right.$$

❖ **דוגמא של מערכת אקולוגית**

❖ $x_1(t)$ יציין את מספר הארנבות בזמן t ביער נתון

❖ $x_2(t)$ יציין את מספר השועלים ביער

מסתבר ששתי הפונקציות $x_1(t)$, $x_2(t)$ מקיימות את המערכת

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1 x_1(t) - b_1 x_1(t) x_2(t) \\ x_2'(t) = b_2 x_1(t) x_2(t) - a_2 x_2(t) \end{cases}$$

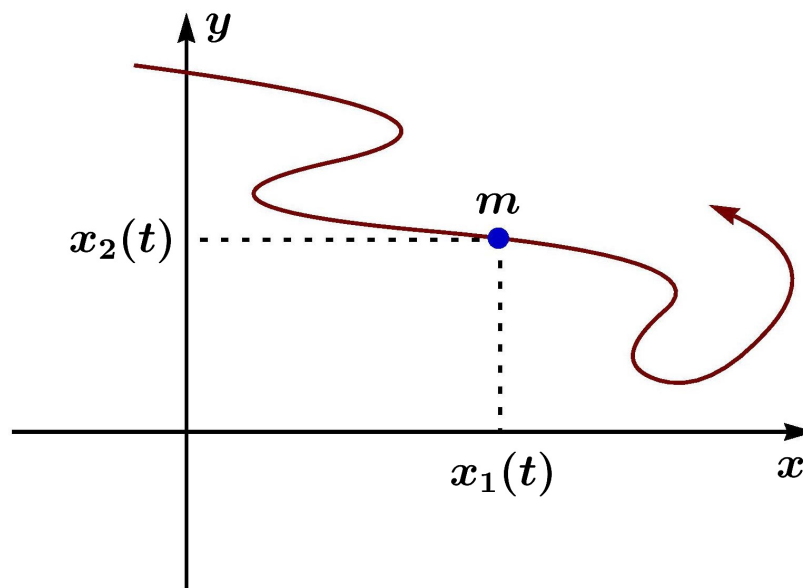
זוהי כמובן מערכת לא-ליניארית.

a_1 הוא קצב הגידול של אוכלוסיית הארנבות

a_2 הוא קצב התמותה של אוכלוסיית השועלים

b_1, b_2 הם קבועי אינטראקציה

דוגמא פיזיקאלית: תנועת חלקיק במישור



איור 7.2: תנועה של חלקיק בעל מסה m במישור

$x_1(t)$ יציין את הקואורדינטה של החלקיק m על ציר ה- x בזמן t

$x_2(t)$ יציין את הקואורדינטה של החלקיק m על ציר ה- y בזמן t

פונקציות המיקום $x_1(t)$, $x_2(t)$ של החלקיק מקיימות מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

$$\begin{cases} m x_1''(t) = F_1(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) \\ m x_2''(t) = F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) \end{cases}$$

F_1 הוא הכוח האופקי הפועל על החלקיק m בתלות בזמן, מיקום, והמהירות הריגעית של m בזמן t

F_2 הוא הכוח האנכי הפועל על החלקיק m בתלות בזמן, מיקום, והמהירות הריגעית של m בזמן t

המערכת מתארת למעשה את הפירוק של החוק השני של ניוטון לרכיב אנכי ורכיב אופקי.

באותה הצורה נוכל למדל תנועת חלקיק מסה במרחב התלת-מימדי $\mathbb{R}^3$ באמצעות שלוש פונקציות $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$.

משפט הקיום והיחידות עבור מערכות של משוואות דיפרנציאליות מסדר 1

§7.1

משפט 7.1: נתונה מערכת של n משוואות דיפרנציאליות ב- n פונקציות נעלמות $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ בצורה הנורמלית הבאה

$$\begin{cases} x'_1(t) = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2(t) = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n(t) = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ x_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

כאשר

א. $F_1, F_2, \dots, F_n$ פונקציות של $n+1$ משתנים אשר כל נגזרותיהן הראשונות $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות בתחום $n+1$ -מימדי פתוח $\mathcal{D}$ במרחב $\mathbb{R}^{n+1}$ (אין דרישת גזירות על פי המשתנה t).

ב. הנקודה $(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))$ היא נקודה פנימית של התחום $\mathcal{D}$. אזי קיימת סביבה (α, β) סביב הנקודה t_0 אשר בה קיים פתרון אחד ויחיד $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ המקיים את מערכת המשוואות וגם את תנאי ההתחלה.

הערה: משפט הקיום והיחידות עבור משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר 1 הוא מקרה פרטי ($n=1$) של המשפט הנ"ל.

הצורה הנורמלית של מערכת משוואות ליניארית לא-הומוגנית מסדר 1 עם תנאי התחלה היא

$$\begin{cases} x'_1(t) = p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + \dots + p_{1n}(t)x_n(t) + q_1(t) \\ x'_2(t) = p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t) + \dots + p_{2n}(t)x_n(t) + q_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = p_{n1}(t)x_1(t) + p_{n2}(t)x_2(t) + \dots + p_{nn}(t)x_n(t) + q_n(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ x_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

כאשר כל הפונקציות $p_{ij}(t), q_i(t)$ מוגדרות מעל קטע פתוח (α, β) , והנקודה t_0 שייכת לקטע. אם כל הפונקציות $q_i(t)$ מתאפסות אז מקבלים צורה נורמלית של מערכת ליניארית



הומוגניות

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1(t) = p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + \cdots + p_{1n}(t)x_n(t) \\ x'_2(t) = p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t) + \cdots + p_{2n}(t)x_n(t) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x'_n(t) = p_{n1}(t)x_1(t) + p_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + p_{nn}(t)x_n(t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ x_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{array} \right.$$

משפט הקיום והיחידות עבור מערכות ליניאריות של משוואות מסדר 1 §7.1.1

משפט 7.2: אם כל הפונקציות $q_i(t)$, $p_{ij}(t)$ מוגדרות ורציפות מעל קטע פתוח (α, β) הכולל בתוכו את הנקודה t_0 , אזי קיים פתרון אחד ויחיד

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

המקיים את המערכת בכל תחום ההגדרה (α, β) , ומקיים את כל תנאי ההתחלה.

יש לשים לב לכך שבניגוד למשפט הקיום והיחידות הכללי, במערכות ליניאריות הקיום והיחידות של הפתרון מובטח על כל תחום ההגדרה ולא על תת-תחום.

מערכות של משוואות מסדר גבוה §7.1.2

נציין כי שלא כמו במשוואות דיפרנציאליות רגילות, הטיפול במערכות דיפרנציאליות מסדר 1 הוא מספיק כללי מאחר וכל מערכת משוואות מסדר גבוה יותר ניתן להמיר בקלות למערכת מסדר 1. נסביר את הרעיון באמצעות דוגמא. למשל, את המערכת מסדר 2 הבאה

$$\left\{ \begin{array}{l} x''_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 3x'_1(t) + 4x'_2(t) \\ x''_2(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t) + 7x'_1(t) + 8x'_2(t) \end{array} \right.$$

נוכל להפוך למערכת מסדר 1 על ידי הוספת שתי פונקציות נוספות $x_3(t)$, $x_4(t)$, והוספת שתי משוואות באופן הבא

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1(t) = x_3(t) \\ x'_2(t) = x_4(t) \\ x'_3(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_3(t) + 4x_4(t) \\ x'_4(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t) + 7x_3(t) + 8x_4(t) \end{array} \right.$$

לכן הטיפול הממוקד במערכות דיפרנציאליות מסדר 1 הוא מוצדק ומספיק בהחלט בקורס



מבוא למשוואות דיפרנציאליות.

תרגיל 7.1: על ידי שימוש בהליך הקודם, בצע המרה של משוואה דיפרנציאלית ליניארית רגילה מסדר n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_0(t)y = q(x)$$

למערכת משוואות ליניארית $n \times n$ מסדר 1.

רישום וקטורי

§7.1.3

על ידי שימוש במשפטים מתאימים מתחום האלגברה הליניארית ניתן לחקור מערכות של משוואות דיפרנציאליות ליניאריות באמצעות כלים מהאלגברה הליניארית. נתחיל ברישום וקטורי של מערכת ליניארית לא-הומוגנית

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

נשתמש גם בייצוג וקטורי

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

נוכל לקודד גם את תנאי ההתחלה

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

על ידי השוויין הוקטורי

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\alpha}$$

לכן המערכת שלנו מצטמצמת למערכת הוקטורית הבאה



$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{q}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

פתרון מערכת ליניארית על ידי שיטת האלימינציה

§7.1.4

בשיטת האלימינציה יש לנסות לבטא את אחת מהפונקציות הנעלמות על ידי שאר הפונקציות ועל ידי כך להקטין את המערכת. תופעת לוואי של שיטה זו היא שסדר הגזירה עשוי לגדול. נציג שיטת פתרון פשוטה על ידי הדוגמא הבאה

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נובע כי $x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t)$, ולכן

$$x_2'(t) = x_1''(t) - x_1'(t)$$

נחליף את $x_2(t)$ ואת $x_2'(t)$ במשוואה השנייה בביטויים המתאימים

$$x_1''(t) - x_1'(t) = 4x_1(t) - 2[x_1'(t) - x_1(t)]$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה ליניארית מסדר 2

$$x_1''(t) + x_1'(t) - 6x_1(t) = 0$$

השורשים של הפולינום האופייני $r^2 + r - 6r = 0$ הם $r = -3, 2$ ולכן

$$x_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$$

$$x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t)$$

$$= -3c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{-3t} - c_2 e^{2t}$$

$$= -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$$

מקובל לרשום את הפתרון הכללי של המערכת כצירוף ליניארי של שני פתרונות בצורה וקטורית

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

צורת הרישום הזו מרמזת על קשר אפשרי בין מערכות של משוואות דיפרנציאליות ושיטות פתרון מתחום האלגברה הליניארית.



מערכת ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

§7.2

הצורה הכללית של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים נראית כך

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

כאשר a_{ij} הם קבועים ממשיים. ההצגה הוקטורית של המערכת הוא

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

נסמן את מטריצת המקדמים על ידי A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ואז נוכל לייצג את המערכת שלנו על ידי

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

וקטור של n פונקציות $\vec{u}(t)$

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

נקרא פתרון של המערכת אם הוא מקיים

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$



לכל t ממשי (תחום הקיום של מערכת בעלת מקדמים קבועים הוא $\mathbb{R}$).
במשפט הבא נוכיח כי **הצירוף הליניארי** של כל שני פתרונות, גם הוא פתרון

משפט 7.3: אם $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ הם שני פתרונות של המערכת

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

אז גם הצירוף הליניארי $c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ הוא פתרון של המערכת.

הוכחה: נציין כי הוכחת משפט זה בצורת הרישום המקורית עשויה להיות ארוכה ומייגעת. הצגה וקטורית מאפשרת לנו להוכיח טענות מסוג זה בקלות רבה. אנו כמובן מסתמכים על משפטים מתאימים מהאלגברה הליניארית

$$A(c_1\vec{u} + c_2\vec{v}) = c_1A\vec{u} + c_2A\vec{v} = c_1\vec{u}'(t) + c_2\vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}[c_1\vec{u}(t) + c_2\vec{v}(t)]$$

קיבלנו לכן ש-

$$\frac{d}{dt}[c_1\vec{u}(t) + c_2\vec{v}(t)] = A(c_1\vec{u} + c_2\vec{v})$$

ולכן הצירוף הליניארי $c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ גם הוא פתרון של המערכת.

בדוגמא הקודמת למשל

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

נוכל לרשום את המערכת בצורה וקטורית

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

למעלה מצאנו פתרון כללי

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

ניתן להציג אותו כצירוף ליניארי של שני פתרונות יסודיים

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

השאלה היא האם זהו הפתרון הכללי של המערכת? נוכיח בהמשך כי מרחב הפתרונות של

המערכת הוא מרחב וקטורי שמימדו 2 (גודל המערכת). מאחר ושני הוקטורים

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

הם בלתי-תלויים ליניארית, הם מהווים בסיס למרחב הפתרונות, ולכן הפתרון שגילינו הוא אכן הפתרון הכללי.

ללא הגבלת הכלליות ננסח את המשפטים והדוגמאות שבהמשך הפרק במונחים של מערכת משוואות מסדר 2×2 או 3×3 בכדי להעביר את הרעיונות באופן ברור. קל מאוד להכליל אותם למערכות משוואות מסדר $n \times n$.

משפט 7.4: יהיו $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ שלושה פתרונות בלתי תלויים ליניארית של מערכת המשוואות ההומוגנית מגודל 3×3

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β) . אזי כל פתרון של המערכת הוא צירוף ליניארי של שלושת הפתרונות הנ"ל. כלומר, הפתרון הכללי של המערכת נתון על ידי

$$\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t) + c_3\vec{u}_3(t)$$

נניח כי

$$\vec{u}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

הם שלושה פתרונות של מערכת משוואות ליניארית אז ניתן לבדוק את התלות או אי-תלות ליניארית שלהם באמצעות הורונסקיאן

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) & z_3(t) \end{vmatrix}$$

אם הורונסקיאן $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) \neq 0$ אז הוקטורים $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ בלתי תלויים ליניארית.

משפט 7.5: אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ הם פתרונות של המערכת

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β) , אזי או שהורונסקיאן $W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ מתאפס זהותית על כל התחום (α, β) או שלכל t בתחום (α, β) , $W(t) \neq 0$.

נוסחת אבל (Niels Henrik Abel 1802-1829)

§7.2.1

אם $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$ מערכת יסודית של פתרונות של מערכת משוואות עם מקדמים משתנים, אז

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t [p_{11}(t)+p_{22}(t)+p_{33}(t)]dt}$$

עבור מערכת משוואות בעלת מקדמים קבועים, הנוסחה תראה כך

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t) = W(0)e^{(a_{11}+a_{22}+a_{33})t}$$

הסכום $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ הוא סכום איברי האלכסון של מטריצת המקדמים A , והוא נקרא העקבה (trace) של A ולפעמים מסומן על ידי $\text{trace}(A)$. מהנוסחה נובע כמובן שהורונסקיאן אינו תלוי בפתרונות הספציפיים והוא זהה עבור כל מערכת יסודית של פתרונות.

למשל, במערכת 2×2 הבאה

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

הערך של הורונסקיאן הוא

$$W = W(0)e^{\int_0^t 8dt} = W(0)e^{8t}$$

מצאנו למעלה כי שני הוקטורים הבאים מהווים מערכת פתרונות יסודית

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

ולכן

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$



ולכן הורונסקיאן של המערכת הוא

$$W = 2e^{8t}$$

הוכחה עבור $n = 2$:

נניח כי $\vec{u}, \vec{v}$ שני פתרונות מערכת משוואות ליניארית הומוגנית

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

הורונסקיאן של u, v הוא

$$W[\vec{u}, \vec{v}](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$$

הנגזרת של הורונסקיאן לפי t היא

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W[\vec{u}, \vec{v}] &= [x'_1(t)y_2(t) - x_1(t)y'_2(t)] - [x'_2(t)y_1(t) - x_2(t)y'_1(t)] \\ &= \begin{vmatrix} x'_1(t) & y'_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x'_2(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{22}x_2 & a_{22}y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

השוויון האחרון הושג באמצעות פעולות שורה

$$R_1 \leftarrow R_1 - a_{12}R_2 \quad (\text{determinant 1})$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - a_{21}R_1 \quad (\text{determinant 2})$$

קיבלנו לכן

$$W' = a_{11} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22})W$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית פרידה

$$\frac{dW}{W} = (a_{11} + a_{22})dt$$



שפתרונה הכללי

$$W = W(0)e^{(a_{11}+a_{22})t}$$

נציין כי במקרה הכללי מתקבלת משוואה דיפרנציאלית פרידה

$$\frac{dW}{W} = \text{trace}(A) dt$$

שפתרונה הכללי הוא נוסחת אבל שרשמנו למעלה

$$W = e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A) dt}$$

משפט 7.6: לכל מערכת משוואות ליניארית הומוגנית מסדר $n \times n$,

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

מעל התחום (α, β) , קיימת מערכת יסודית של פתרונות בגודל n .

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור מערכת משוואות מסדר 3×3 . תהי t_0 נקודה כלשהי בתחום (α, β) . על פי משפט הקיום והיחידות למערכות ליניאריות קיים פתרון $\vec{u}_1(t)$ של המערכת המקיים את תנאי ההתחלה

$$\vec{u}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

באותו אופן, קיימים פתרונות $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, המקיימים

$$\vec{u}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

על פי המשפט הקודם הקבוצה $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{u}_3(t)$, היא בלתי-תלויה ליניארית כי הורונסקיאן שלה אינו מתאפס בנקודה t_0

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3](t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$



אם $\vec{u}(t)$ הוא פתרון כלשהו של המערכת אז נסמן

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \vec{u}(t_0)$$

נסמן

$$\vec{v}(t) = c_1 \vec{u}_1(t) + c_2 \vec{u}_2(t) + c_3 \vec{u}_3(t)$$

אזי

$$\vec{v}(t_0) = c_1 \vec{u}_1(t_0) + c_2 \vec{u}_2(t_0) + c_3 \vec{u}_3(t_0)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

על פי משפט הקיום והיחידות, $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ לכל t בתחום (α, β) , כלומר $\vec{u}$ הוא צירוף ליניארי של הפתרונות $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, ולכן הקבוצה $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ היא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת. ■

המשפט הקודם מוכיח את קיומו התאורטי של בסיס למרחב הפתרונות של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית, אך אינו נותן רמז כלשהו לאיך למצוא בסיס פתרונות כזה. בשלב הבא של הסיוור שלנו נתאר שיטה למציאת מערכת פתרונות בסיסית כזו עבור המקרה של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית בעלת מקדמים קבועים.

שיטות פתרון מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

§7.3

נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית

$$(7.1) \quad \vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$

כאשר A מטריצת מקדמים קבועים מסדר $n \times n$. לשם נוחות נתמקד במקרה של מערכת מגודל 3×3 . בדומה למקרה של משוואות ליניאריות הומוגניות רגילות, נחפש פתרונות מהצורה

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \vec{c}$$



סימננו את וקטור הקבועים על ידי $\vec{c}$. הנגזרת של $\vec{u}(t)$ היא

$$\vec{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \vec{c}$$

ולכן מערכת המשוואות שלנו הופכת למשוואה וקטורית

$$A \cdot e^{\lambda t} \vec{c} = \lambda e^{\lambda t} \vec{c}$$

ולאחר צימצום הביטוי $e^{\lambda t}$

$$(7.2) \quad A\vec{c} = \lambda\vec{c}$$

ומקבלים מערכת משוואות ליניארית הומוגניות

$$(7.3) \quad (A - \lambda I)\vec{c} = \vec{0}$$

כאשר I היא מטריצת היחידה

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

המערכת (7.3) מוכרת לנו משדה האלגברה הליניארית בנושא וקטורים וערכים עצמיים. על פי משפט יסודי של האלגברה הליניארית, למערכת (7.3) קיים פתרון לא טריביאלי $\vec{c} \neq \vec{0}$ אם ורק אם

$$(7.4) \quad |A - \lambda I| = 0$$

הדטרמיננטה שבאגף שמאל היא למעשה **הפולינום האופייני** של המטריצה A , וכל שורש λ של הפולינום האופייני נקרא **ערך עצמי** של המטריצה A , כל פתרון לא טריביאלי $\vec{c}$ של המערכת (7.3), נקרא **וקטור עצמי השייך ל- λ** . כאמור, לכל וקטור עצמי $\vec{c}$ מתאים פתרון יסודי $e^{\lambda t} \vec{c}$ עבור המערכת הדיפרנציאלית (7.1). והוקטורים $\vec{c}$ הם הוקטורים העצמיים השייכים לערכי λ . על פי המשפט האחרון, אנו זקוקים בדיוק לשלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים בכדי לקבל בסיס למרחב הפתרון של המערכת הדיפרנציאלית (7.1). נסביר על ידי דוגמא פשוטה של מערכת 2×2 שבה אנו נדרשים למצוא בסיס של שני וקטורים עצמיים.

דוגמה 1: מצא פתרון כללי למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

פתרון: נעבור לכתיב וקטורי

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

נחשב את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

השורשים של הפולינום האופייני הם $\lambda = 3, 5$. נחשב את הוקטורים העצמיים המתאימים לערכים אלה

$$(A - 3I)\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5I)\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לא קשה למצוא את שני הוקטורים העצמיים

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

קיבלנו לכן שני פתרונות למערכת

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{5t}$$

הורונסקיאן של שני פתרונות אלה בנקודה $t = 0$ הוא

$$W[\vec{u}_1, \vec{u}_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

אינו מתאפס כי מערכת של וקטורים עצמיים היא תמיד בלתי-תלויה (לכן בדיקת הורונסקיאן אינה הכרחית, אך מומלצת למטרות בדיקה כפולה). הפתרון הכללי של המערכת הוא לכן

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{bmatrix}$$



דוגמה 2: מצא פתרון פרטי עבור בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 4x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 4x_3(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 10 \\ x_3(0) = 15 \end{cases}$$

פתרון: מטריצת המקדמים היא

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(\lambda-3)(\lambda+4)+4] - (-8-2\lambda+16) - (2-12+4\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-8)+8+2\lambda-16-2+12-4\lambda \\ &= \lambda^2+\lambda-8-\lambda^3-\lambda^2+8\lambda+6-2\lambda \\ &= -\lambda^3+7\lambda-6=0 \end{aligned}$$

קיבלנו פולינום ממעלה שלישית שנפתור על ידי ניחוש

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 7\lambda + 6 &= \lambda^3 - \lambda - 6\lambda + 6 \\ &= \lambda(\lambda^2 - 1) - 6(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) - 6(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שלושה ערכים עצמיים שונים

$$\lambda = 1, \quad 2, \quad -3$$



מציאת וקטורים עצמיים

$$(A - I)\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2I)\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A + 3I)\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

על ידי שיטת הדירוג נמצא את הוקטורים העצמיים

$$\lambda = 1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3 : \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

מציאת פתרון פרטי

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

נקבל מערכת משוואות ליניאריות

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 5 \\ c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 10 \\ c_1 + c_2 + 11c_3 = 15 \end{cases}$$

פתרון בשיטת הדירוג יניב את הפתרון $c_1 = 5$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. לכן הפתרון של בעיית ההתחלה הוא

$$\begin{cases} x_1(t) = 5e^t - e^{2t} + e^{-3t} \\ x_2(t) = 5e^t - 2e^{2t} + 7e^{-3t} \\ x_3(t) = 5e^t - e^{2t} + 11e^{-3t} \end{cases}$$

ערכים עצמיים בעלי ריבוי אלגברי וגאומטרי זהה $k > 1$

§7.3.1

בשתי הדוגמאות הקודמות קיבלנו ערכים עצמיים פשוטים. כלומר ערכים עצמיים שהריבוי האלגברי שלהם הוא 1. במקרים אחרים אנו עשויים לקבל ערכים עצמיים λ בעלי ריבוי אלגברי k גדול מאחד. הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי λ הוא המימד של מרחב הוקטורים העצמיים השייכים לו. מספר זה נע בין 1 ל- k .

בשלב הנוכחי נטפל במקרה בו הריבוי הגאומטרי זהה לריבוי האלגברי k . כלומר לערך העצמי λ יש k וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$. במקרה כזה, לערך העצמי λ יתאימו k פתרונות יסודיים של המערכת הדיפרנציאלית (7.1):

$$\vec{v}_1 e^{\lambda t}, \quad \vec{v}_2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad \vec{v}_k e^{\lambda t}$$

דוגמה 3: נתונה המערכת

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

קל לבדוק שלמטריצת המקדמים יש בדיוק שני ערכים עצמיים: $\lambda = -1, 2$, כאשר $\lambda = -1$ הוא ערך עצמי בעל ריבוי אלגברי 2, וגם הריבוי הגאומטרי שלו הוא 2. לכן הפתרון של המשוואות האופייניות מניב שלושה וקטורים עצמיים

$$\lambda = -1: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 2: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



דוגמה 4: במקרה הכי פשוט שבו מטריצת המקדמים היא מטריצת היחידה

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

קיים ערך עצמי יחיד בלבד $\lambda = 1$ מריבוי אלגברי 3, כי הפולינום האופייני הוא

$$(1 - \lambda)^3 = 0$$

אבל גם הריבוי הגאומטרי הוא 3 מאחר וקיימים שלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים השייכים לו

$$\lambda = 1: \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ערכים עצמיים מרוכבים פשוטים

§7.3.2

בשלב זה נטפל בערך עצמי מרוכב פשוט $\lambda = a + bi$ (ריבוי אלגברי 1). מאחר ומקדמי הפולינום האופייני ממשיים, לכל שורש מרוכב $\lambda = a + bi$ מצטרף השורש הצמוד $\lambda = a - bi$. לכן במקרה כזה יש לחלץ זוג וקטורים עצמיים בלתי תלויים שיתאימו לזוג השורשים.

טענה: אם $\vec{c}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = a + bi$, אזי הוקטור הצמוד $\bar{\vec{c}}$ גם הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי הצמוד $a - bi$.

הוכחה:

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{bmatrix} \implies \bar{\vec{c}} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ a_2 - b_2 i \\ a_3 - b_3 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} i$$

לכן

$$A\vec{c} = \lambda\vec{c} \implies \overline{A\vec{c}} = \overline{\lambda\vec{c}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{c}}$$

קיבלנו $\bar{\lambda}\bar{\vec{c}} = A\bar{\vec{c}}$, לכן $\bar{\vec{c}}$ הוא וקטור עצמי השייך ל- $\bar{\lambda}$.

טענה: תהי

$$\vec{u}'(t) = A\vec{u}(t)$$



מערכת משוואות ליניארית בעלת מקדמים קבועים, ויהי

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} i$$

וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda = a + bi$. אזי $\vec{c}e^{\lambda t}$ והצמוד שלו הם שני פתרונות מרוכבים של המערכת, אשר החלק הממשי והמדומה שלהם הם שני פתרונות ממשיים בלתי-תלויים של המערכת.

הוכחה: לא קשה לראות ש- $\vec{c}e^{\lambda t}$ הוא פתרון מרוכב של המערכת

$$A\vec{c}e^{\lambda t} = \lambda\vec{c}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} [\vec{c}e^{\lambda t}]$$

הוכחנו למעלה כי גם הצמוד הוא פתרון. נסמן

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

אזי $\vec{c} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta}$. נחשב את החלק הממשי והחלק המדומה של הפתרון $\vec{c}e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \vec{c}e^{\lambda t} &= (\vec{\alpha} + i\vec{\beta})e^{(a+bi)t} \\ &= (\vec{\alpha} + i\vec{\beta})e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ &= (\vec{\alpha} + i\vec{\beta})(e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt) \\ &= (\vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt) + (\vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt) i \end{aligned}$$

באותו אופן נראה כי

$$(\vec{\alpha} - i\vec{\beta})e^{(a-bi)t} = (\vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt) - (\vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt) i$$

נסמן

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt \\ \vec{v}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt \end{aligned}$$

משני השוויונים שהוכחנו נובע כי

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= \frac{1}{2} [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}i)e^{(a+bi)t} + (\vec{\alpha} - \vec{\beta}i)e^{(a-bi)t}] \\ \vec{v}(t) &= \frac{1}{2i} [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}i)e^{(a+bi)t} - (\vec{\alpha} - \vec{\beta}i)e^{(a-bi)t}]\end{aligned}$$

כלומר $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ הם פתרונות ממשיים כי הם התקבלו כצירופים ליניאריים של הפתרונות המרוכבים. לכן קיבלנו שני פתרונות ממשיים למערכת:

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \cos bt - \vec{\beta}e^{at} \sin bt \\ \vec{v}(t) &= \vec{\alpha}e^{at} \sin bt + \vec{\beta}e^{at} \cos bt\end{aligned}$$



הערה: לא מומלץ לנסות לזכור בעל פה את שתי הנוסחאות האחרונות. יספיק לזכור את צורת הפתרון הראשון $e^{(a+bi)t}(\vec{\alpha} + i\vec{\beta})$ בלבד! שתי הנוסחאות האחרונות הן למעשה החלק הממשי והמדומה של צורה זו (לוקח פחות מחצי דקה לקבל את שתי הנוסחאות בצורה זו).

דוגמה 5: מצא פתרון כללי למערכת

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

פתרון: הפולינום האופייני כאן הוא

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

השורשים של הפולינום הם $\lambda = 3 + 2i$, $\lambda = 3 - 2i$. על פי הניתוח שעשינו למעלה, יספיק למצוא וקטור עצמי עבור $\lambda = 3 + 2i$

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 - 2i & -1 \\ 5 & -1 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

מקבלים וקטור עצמי

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - 2i \end{bmatrix}$$



הפתרון המרוכב המתאים הוא

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{bmatrix} e^{(3+2i)t}$$

נפרק אותו לחלק הממשי והמדומה

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{bmatrix} e^{(3+2i)t} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} i \cdot e^{3t} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t} \sin 2t + i \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t} \cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \sin 2t \right] \end{aligned}$$

וקיבלנו את שני הפתרונות הממשיים הבלתי תלויים

$$\vec{u}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \cos 2t \\ e^{3t} \cos 2t - 2e^{3t} \sin 2t \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \sin 2t \\ -2e^{3t} \cos 2t + e^{3t} \sin 2t \end{bmatrix}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא כמובן המרחב הנפרש על ידי $\{\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t)\}$

$$\vec{u}(t) = c_1 \vec{u}_1(t) + c_2 \vec{u}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \cos 2t \\ e^{3t} \cos 2t - 2e^{3t} \sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \sin 2t \\ -2e^{3t} \cos 2t + e^{3t} \sin 2t \end{bmatrix}$$

ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 2 וריבוי גאומטרי 1

§7.3.3

כאן נטפל במקרה בו לערך העצמי λ ריבוי אלגברי 2 אך ריבוי גאומטרי 1. כלומר יש לנו וקטור עצמי יחיד $\vec{a}$ ששייך לערך העצמי λ אך אנו נדרשים לקבל שני פתרונות יסודיים עבור המערכת הדיפרנציאלית שלנו. לשם כך נשתמש במושג של וקטור עצמי מוכלל.

הפתרון היסודי הראשון שלנו הוא כמובן $\vec{x}(t) = \vec{a}e^{\lambda t}$.

את הוקטור השני $\vec{b}$ נקבל על ידי ניחוש פתרון מהצורה:

$$\vec{x}(t) = \vec{a}te^{\lambda t} + \vec{b}e^{\lambda t}$$

לאחר הצבת צורה זו במערכת שלנו $\vec{x}'(t) = A\vec{x}$ נקבל

$$\vec{a}(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}) + \lambda \vec{b}e^{\lambda t} = A(\vec{a}te^{\lambda t} + \vec{b}e^{\lambda t})$$

ולכן

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b})e^{\lambda t} + \lambda \vec{a}te^{\lambda t} = A\vec{b}e^{\lambda t} + A\vec{a}te^{\lambda t}$$



על ידי השוואת המקדמים של $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$ נקבל

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

$$A\vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

ולכן המערכת הדרושה למציאת הוקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ היא

$$(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$$

הערה: הוקטור $\vec{b}$ נקרא **וקטור עצמי מוכלל של A** , ובדרך כלל הוא מוגדר כפתרון של המערכת $(A - \lambda I)^2\vec{b} = \vec{0}$.

דוגמה 6: פתור את המערכת

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

פתרון: הפולינום האופייני

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

יש לנו ערך עצמי יחיד $\lambda = 2$ בעל ריבוי אלגברי 2. בנסיון חיפוש וקטורים עצמיים

$$(A - \lambda I)\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נגלה שיש לנו רק וקטור עצמי אחד. כלומר הריבוי הגאומטרי הוא 1.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

לכן על פי המוסבר לעיל יש לחפש וקטור עצמי מוכלל $\vec{b}$ על ידי פתרון המערכת

$$(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$$

כלומר

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

קל למצוא את הפתרון

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ואז בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{2t}, \quad \vec{u}_2(t) = (t\vec{a} + \vec{b})e^{2t}$$

כלומר

$$\vec{u}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ -t + 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ -t + 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1

§7.3.4

יהי λ ערך עצמי ממשי בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 1. בדומה למקרה הקודם, נוכיח כי שלושת הוקטורים הדרושים $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ מתקבלים על ידי פתרון שלושת המערכות הליניאריות

$$(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$$

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \vec{b}$$

והפתרונות היסודיים למערכת (7.1) הם

$$u_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t}$$

$$u_2(t) = (t\vec{a} + \vec{b})e^{\lambda t}$$

$$u_3(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}\right)e^{\lambda t}$$

הפתרון היסודי הראשון מתקבל על ידי הוקטור העצמי היחיד $\vec{a}$. את הפתרון השני והשלישי נקבל באמצעות וקטורים עצמים מוכללים $\vec{b}, \vec{c}$. את נכונות הפתרון השני כבר הוכחנו במקרה הקודם, ולכן נעבור להוכחת הפתרון השלישי

$$\vec{u}'_3(t) = (t\vec{a} + \vec{b})e^{\lambda t} + \lambda \left(\frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}\right)e^{\lambda t}$$



לאחר הצבת $\vec{u}'_3(t)$ במערכת $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ נקבל

$$(t\vec{a} + \vec{b})e^{\lambda t} + \lambda \left(\frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c} \right) e^{\lambda t} = A \left(\frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c} \right) e^{\lambda t}$$

לאחר צימצום $e^{\lambda t}$ וכינוס איברים נקבל

$$\frac{t^2}{2}\lambda\vec{a} + t(\vec{a} + \lambda\vec{b}) + (\vec{b} + \lambda\vec{c}) = \frac{t^2}{2}A\vec{a} + tA\vec{b} + A\vec{c}$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל

$$A\vec{a} = \vec{a}$$

$$A\vec{b} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$A\vec{c} = \vec{b} + \lambda\vec{c}$$

או בצורה המקובלת

$$(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$$

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \vec{b}$$

דוגמה 7: פתור את המערכת

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

פתרון: הפולינום האופייני של מטריצת המקדמים A הוא

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

לכן $\lambda = 2$ הוא ערך עצמי יחיד של A בעל ריבוי אלגברי 3. קל לבדוק שהוקטור העצמי היחיד (עד כדי אי-תלות ליניארית) שיש ל- λ הוא

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

את הוקטור העצמי המוכלל $\vec{b}$ נקבל על ידי פתרון המערכת $(A - \lambda I)\vec{b} = \vec{a}$. כלומר

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

פתרון המערכת נותן

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

את הוקטור השלישי $\vec{c}$ נקבל על ידי פתרון המערכת $(A - \lambda I)\vec{c} = \vec{b}$. כלומר

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

פתרון המערכת נותן

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן הבסיס למרחב הפתרונות שלנו הוא

$$u_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$u_2(t) = (t\vec{a} + \vec{b})e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$u_3(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}\right)e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

ולאחר פישוט

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad u_2(t) = \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} e^{2t}, \quad u_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} e^{2t}$$

ערך עצמי מריבוי 3 בעל ריבוי גאומטרי 2 §7.3.5

כאן בידינו ערך עצמי λ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2. כלומר יש לנו שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארי $\vec{a}$, $\vec{b}$ בלבד.

א. שני הפתרונות הראשונים שלנו הם

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t}$$

$$\vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{\lambda t}$$

ב. הפתרון השלישי הוא מהצורה $\vec{u}_3(t) = (t\vec{d} + \vec{c})e^{\lambda t}$ כאשר $\vec{c}$ הוא צירוף ליניארי של $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$$

כך שלמערכת $(A - \lambda I)\vec{d} = \vec{c}$ יש פתרון לא טריביאלי $\vec{d}$.

לכן במקרה הנוכחי, בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית שלנו יהיה

$$\begin{cases} \vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{\lambda t} \\ \vec{u}_3(t) = (t\vec{d} + \vec{c})e^{\lambda t} \end{cases}$$

דוגמה 8: מצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

פולינום אופייני

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5 - \lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0$$

במקרה זה מתקבל ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2, כלומר יש



לו בדיוק שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

קל לגלות שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

בשלב הבא עלינו למצוא שני קבועים α_2, α_1 כך שלמערכת

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}$$

יש פתרון לא טריביאלי $\vec{c}$. ניתן לעשות זאת על ידי דירוג מערכת של 3 משוואות ב-5 משתנים $(\alpha_2, \alpha_1, c_3, c_2, c_1)$ אבל ברוב המקרים יותר פשוט לנחש α_2, α_1 מתאימים (קיימת דרגת חופש גבוהה). למשל אם נבחר $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, נקבל מערכת קלה

$$(A - \lambda I)\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

שעבורה קיים פתרון לא טריביאלי

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

באמצעות שלושת הוקטורים שקיבלנו נבנה את הבסיס לפתרון הכללי

$$\begin{aligned}\vec{u}_1(t) &= \vec{a}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^t \\ \vec{u}_2(t) &= \vec{b}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^t \\ \vec{u}_3(t) &= [t(\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b}) + \vec{c}] e^{-t} = \begin{bmatrix} 2t + 1 \\ 4t - 2 \\ -2t + 4 \end{bmatrix} e^{-t}\end{aligned}$$

תרגיל 7.2: פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

הדרכה:

א. בדוק שלמטריצת המקדמים יש ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$ בעל ריבוי אלגברי 3 וריבוי גאומטרי 2.

ב. הראה ששני הוקטורים הבאים הם וקטורים עצמיים השייכים לערך העצמי $\lambda = 1$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ג. נסה להגיע לוקטור המוכלל

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

מערכת משוואות ליניארית לא-הומוגנית

§7.4

לאחר שסקרנו כמה שיטות פתרון של מערכות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים, נעבור למערכת לא-הומוגנית (המקדמים נשארים קבועים). בכדי להבליט את הרעיון של שיטת הפתרון, נתמקד בדוגמאות פשוטות של מערכות מסדר 2×2 ,

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$$

או בצורה יותר מפורטת

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

בשלב הראשון נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

שנסמנו

$$\vec{h}(t) = c_1 \vec{u}_1(t) + c_2 \vec{u}_2(t)$$

כמו במקרה של משוואה רגילה, יספיק למצוא פתרון פרטי למערכת הלא-הומוגנית בשיטת הוריאציה של הפרמטרים

$$\vec{p}(t) = c_1(t) \vec{u}_1(t) + c_2(t) \vec{u}_2(t)$$

הנגזרת של $\vec{p}(t)$ תהיה

$$\vec{p}'(t) = [c_1'(t) \vec{u}_1(t) + c_1(t) \vec{u}_1'(t)] + [c_2'(t) \vec{u}_2(t) + c_2(t) \vec{u}_2'(t)]$$

נציב את $\vec{p}(t)$ במערכת הלא-הומוגנית

$$\begin{aligned} \vec{p}'(t) &= [c_1'(t) \vec{u}_1(t) + c_1(t) \vec{u}_1'(t)] + [c_2'(t) \vec{u}_2(t) + c_2(t) \vec{u}_2'(t)] \\ &= A [c_1(t) \vec{u}_1(t) + c_2(t) \vec{u}_2(t)] + \vec{q}(t) \\ &= c_1(t) A \vec{u}_1(t) + c_2(t) A \vec{u}_2(t) + \vec{q}(t) \\ &= c_1(t) \vec{u}_1'(t) + c_2(t) \vec{u}_2'(t) + \vec{q}(t) \end{aligned}$$



קיבלנו את המשוואה

$$c'_1(t)\vec{u}_1(t) + c'_2(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

אותה נפתור בהמשך באמצעות הכלל של קרמר. הפתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית ייתקבל על ידי הסכום של הפתרון הפרטי והפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\vec{u}(t) = \vec{p}(t) + \vec{h}(t) = \vec{p}(t) + c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$$

נסכם את מה שמצאנו במשפט הבא:

משפט 7.7: אם $\vec{u}(t) = c_1\vec{u}_1(t) + c_2\vec{u}_2(t)$

הוא הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$

ואם הפונקציות $c_1(t)$, $c_2(t)$ מקיימות את המשוואה

$$c'_1(t)\vec{u}_1(t) + c'_2(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

אז

$$\vec{p}(t) = c_1(t)\vec{u}_1(t) + c_2(t)\vec{u}_2(t)$$

הוא פתרון פרטי של המערכת הלא-הומוגנית

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{q}(t)$$

המשפט כבר הוכח בניתוח שקדם לו.

דוגמה 9: מצא פתרון כללי למערכת הלא-הומוגנית הבאה

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + e^{4t} \\ x'_2(t) = 3x_1(t) + 6x_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

פתרון: בסעיף הקודם כבר מצאנו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x'_2(t) = 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{bmatrix}$$

נחפש פונקציות $c_1(t)$, $c_2(t)$ כך ש-

$$c_1'(t) \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_2'(t) \begin{bmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

כלומר, יש לפתור מערכת משוואות ליניארית בפונקציות $c_1'(t)$, $c_2'(t)$

$$\begin{cases} e^{3t}c_1'(t) + e^{5t}c_2'(t) = e^{4t} \\ -e^{3t}c_1'(t) - 3e^{5t}c_2'(t) = e^{3t} \end{cases}$$

לכן

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{4t} & e^{5t} \\ e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{-3e^{9t} - e^{8t}}{-2e^{8t}} = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}$$

ובאותו אופן נחשב את $c_2'(t)$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{4t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{vmatrix}}{-2e^{8t}} = \frac{e^{6t} + e^{7t}}{-2e^{8t}} = -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

על ידי אינטגרציה נקבל את $c_1(t)$, $c_2(t)$

$$c_1(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{t}{2}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{-t}$$

הפתרון הפרטי למערכת הלא-הומוגנית הוא לכן

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \left(\frac{3}{2}e^t + \frac{t}{2}\right) \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2}e^{-t}\right) \begin{bmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}\right)e^{4t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{3t} \\ -\frac{3}{2}(1+t)e^{4t} - \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

הפתרון הכללי למערכת הלא-הומוגנית הוא לכן

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ -3e^{5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{2}\right)e^{4t} + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{3t} \\ -\frac{3}{2}(1+t)e^{4t} - \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{3t} \end{bmatrix}$$

דוגמה 10: מצא פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 4x_3(t) - 2e^t \\ x_2'(t) = 3x_2(t) + 9t \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_3(t) + e^t \end{cases}$$

פתרון: נעבור לכתיב וקטורי

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2e^t \\ 9t \\ e^t \end{bmatrix}$$

נשאיר לקורא לוודא כי הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

הוא

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

על פי שיטת הוריאציה של הפרמטרים עלינו למצוא פתרון פרטי עבור המערכת הלא-הומוגנית מהצורה

$$\vec{p}(t) = c_1(t) \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3(t) \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

הצבת $\vec{p}(t)$ במערכת הלא-הומוגנית מובילה למערכת ליניארית

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^t \\ 9t \\ e^t \end{bmatrix}$$

בכדי לפתור את המערכת יש לדרג את המטריצה

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2e^{-t} & 0 & 2e^{3t} & -2e^t \\ 0 & e^{3t} & 0 & 9t \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} & e^t \end{array} \right]$$

לאחר ביצוע פעולות השורה הבאות

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3$$

$$R_3 \leftarrow 4R_3 + R_1$$

$$R_1 \leftarrow \frac{e^{-3t}}{4}R_1$$

$$R_2 \leftarrow e^{-3t}R_2$$

$$R_3 \leftarrow e^t R_3$$

נקבל את המטריצה המדורגת

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & 1 & 0 & 9te^{-3t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

קיבלנו כי

$$c'_1(t) = e^{2t}, \quad c'_2(t) = 9te^{-3t}, \quad c'_3(t) = 0$$

ולכן

$$c_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t}, \quad c_2(t) = -3te^{-3t} - e^{-3t}, \quad c'_3(t) = 0$$

ולכן

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + (-3te^{-3t} - e^{-3t}) \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ -3t - 1 \\ \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית הוא

$$\vec{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^t \\ -3t - 1 \\ \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}$$

שימוש בכלל קרמר למציאת $c'_i(x)$

במקרים אחרים נעדיף להשתמש בכלל קרמר בכדי לפתור את המערכת

$$(7.5) \quad c'_1(t)\vec{u}_1(t) + c'_2(t)\vec{u}_2(t) = \vec{q}(t)$$

לשם כך ננצל את העובדה שהורונסקיאן של סדרת וקטורי עמודות הוא למעשה הדטרמיננטה הדרושה עבור כלל קרמר!

$$c'_1(t) = \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}, \quad c'_2(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}$$

במקרה של מערכת מגודל 3×3 שיטת הוריאציה של הפרמטרים תוביל אותנו למערכת

$$(7.6) \quad c'_1(t)\vec{u}_1(t) + c'_2(t)\vec{u}_2(t) + c'_3(t)\vec{u}_3(t) = \vec{q}(t)$$

נוכל להציג את הפתרון על ידי

$$c'_1(t) = \frac{W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}, \quad c'_2(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}, \quad c'_3(t) = \frac{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}]}{W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]}$$

נציין רק שחישוב דטרמיננטות מסדר 3×3 הוא בדרך כלל יותר יקר מדירוג של המטריצה, ולכן יש להגביל את השימוש בנוסחאות האחרונות רק במקרים בהן המטריצה דלילה, או לשימושים תאורטיים.

דוגמה 11: מצא פתרון כללי למערכת הלא-הומוגנית

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) + 1 \\ x'_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x'_3(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

פתרון: נתחיל בפתרון המערכת ההומוגנית

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

הפולינום האופייני שלה הוא

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2$$

במהלך החישוב החסרנו את השורה השלישית מהשורה השנייה, ופיתוח הדטרמיננטה נעשה על

פי השורה השלישית. קיבלנו שני ערכים עצמיים $\lambda = 0$, $\lambda = 6$.
הוקטורים העצמיים השייכים ל- $\lambda = 0$ מתקבלים על ידי פתרון המערכת

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

שלאחר דירוג פשוט תהפוך למערכת

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

זוהי מערכת עם דרגת חופש 2, ולכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 0$ הוא 2. לא קשה למצוא את שני וקטורים עצמיים הבאים

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

הוקטורים העצמיים השייכים ל- $\lambda = 6$ מתקבלים על ידי פתרון המערכת

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

שלאחר דירוג ופישוט תהפוך למערכת

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

כצפוי, זוהי מערכת עם דרגת חופש 1, כלומר הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 6$ הוא 1. לא קשה



למצוא את הוקטור העצמי הבא

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

הפתרונות היסודיים של המערכת ההומוגנית הם לכן

$$\vec{u}_1(t) = \vec{a}e^{0t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{b}e^{0t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3(t) = \vec{c}e^{6t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$$

ולכן הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\vec{h}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$$

עכשיו נחזור למערכת הלא-הומוגנית שלנו

(7.7)

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + q(t)$$

כאשר

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

על פי שיטת הוריאציה של הפרמטרים יש למצוא פתרון פרטי $\vec{p}(t)$ שצורתו

$$\vec{p}(t) = c_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$$

כאשר $c'_1(t)$, $c'_2(t)$, $c'_3(t)$ מתקבלים מפתרון המערכת

$$c'_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c'_2(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c'_3(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ניתן לפתור את המערכת הזו על ידי שיטת הדירוג או על ידי שימוש בנוסחאות המבוססות על כלל קרמר הנ"ל. במקרה הנוכחי

$$W = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} e^{6t} = 3e^{6t}$$

$$W_1 = W[\vec{q}, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} e^{6t} = e^{6t}$$

$$W_2 = W[\vec{u}_1, \vec{q}, \vec{u}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} e^{6t} = e^{6t}$$

$$W_3 = W[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{q}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

לכן

$$c'_1(t) = \frac{W_1}{W} = \frac{1}{3}, \quad c'_2(t) = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{3}, \quad c'_3(t) = \frac{W_3}{W} = \frac{1}{3}e^{-6t}$$

לכן

$$c_1(t) = \frac{t}{3}, \quad c_2(t) = \frac{t}{3}, \quad c_3(t) = -\frac{1}{18}e^{-6t}$$

הפתרון הפרטי שלנו הוא לכן

$$\vec{p}(t) = \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

עקב הסבירות הגבוהה לשגיאת חישוב בתהליך הנ"ל מומלץ מאוד לבדוק שאכן $\vec{p}(t)$ הוא פתרון

של המערכת הלא-הומוגנית:

$$A\vec{p}(t) + \vec{q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \vec{p}'(t)$$

הפתרון הכללי של המערכת הלא-הומוגנית הוא

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \\ -\frac{t}{3} - \frac{1}{18} \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$$

תרגילים לפרק 7

הדרכה: בסוף הרשימה יש קישור למחברת יופיטר המכילה פתרונות סופיים ומלאים לחלק מהתרגילים. פתרונות נוספים יתווספו במהלך הזמן (מקווה לעזרה מצד התלמידים). נשמח מאוד לקבל מהתלמידים פתרונות נוספים לתרגילים שעדיין לא פתורים!

1. מצא פתרון כללי עבור כל מערכת משוואות

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) + 5y(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - y(t) = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ x'_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x'_1(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) \\ x'_2(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x'_1(t) = 7x_1(t) + 3x_2(t) \\ x'_2(t) = 6x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ח.} \quad \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + \cos t \\ y'(t) = -x(t) + 2 \sin t \end{cases} \quad \text{י.} \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - 5 \cos t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad \text{ט.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ג.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ו.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ח.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases} \quad \text{ט.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 16te^t \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad \text{י.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} te^t \\ te^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{יא.}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{כ.ב.}$$

2. פתור את בעיות ההתחלה הבאות

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) + e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) - 5y(t) = 1 \\ y'(t) + 2x(t) + y(t) = e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - 5 \cos t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t \\ y'(t) = x(t) + e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ו.}$$

3. נתונה המערכת

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} c & 1 & c \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

מצא את כל הערכים של c עבורם כל פתרון $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ של המערכת חסום על כל הקרן $(0, \infty)$.



קישור לפתרונות 

קישור לפתרונות 



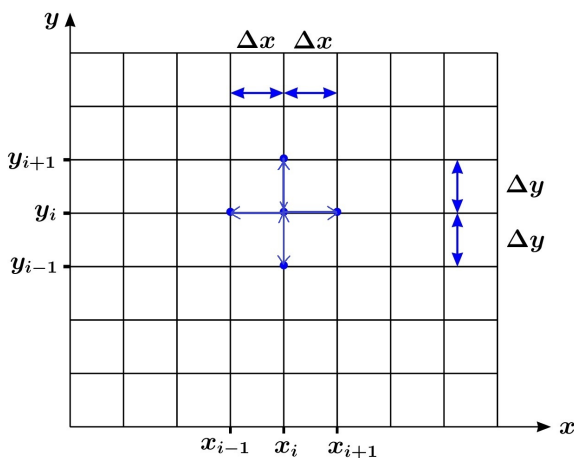
פרק 8

שיטת ההפרשים הסופיים

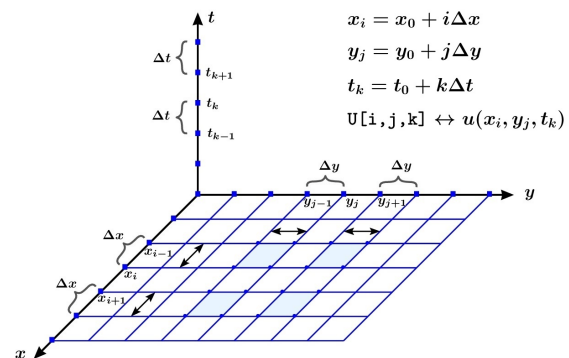
מבוא כללי

§8.1

בניגוד למקובל בענפי המתמטיקה הקלאסית שמתבססת על מושג הרצף האינפיטסימלי, הרעיון שביסוד שיטת ההפרשים הסופיים (Finite Difference Method) הוא להצטמצם על עבודה על **סריג** (grid) סופי של של ערכים מספריים ולוותר על הרצף האינסופי של המתמטיקה המסורתית. חקירה ופתרון של משוואות דיפרנציאליות רגילות למשל תתבצע על פני סריג דו-מימדי כמו זה שרואים באיור 8.1.



איור 8.1: סריג דו-מימדי טיפוסי עבור שיטת ההפרשים הסופיים



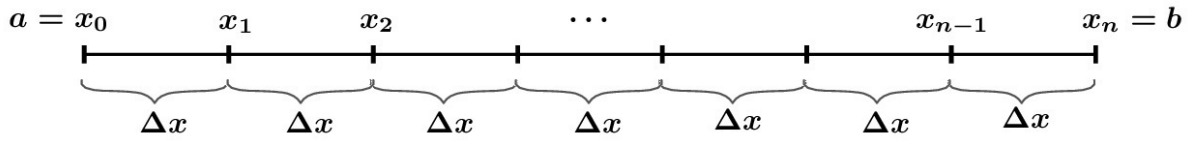
איור 8.2: סריג תלת-מימדי עבור שיטת ההפרשים הסופיים

באופן דומה חקירה ופתרון של משוואות דיפרנציאליות חלקיות תתבצע על סריגים רב-מימדיים כמו זה שרואים באיור 8.2. המניע העיקרי לגישה זו הוא לאפשר פתרון של בעיות מתמטיות באמצעות אלגוריתמים חישוביים וטכנולוגיות חישוב מודרניות שנולדו בסוף המאה הקודמת וממשיכות להתפתח היום בקצב מואץ. למשל, בפתרון של משוואות דיפרנציאליות רגילות, ערכי משתנים x, y , יוגבלו למערכים סופיים של ערכים בידידים x_i, y_i . בדרך כלל הסריג מתקבל על ידי חלוקת קטע נתון $[a, b]$ על ציר- x ל- n תתי-קטעים שווים בגודלם באורך $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. נקודות החלוקה $x_i = a + i\Delta x$ נקראים **צמתים** (nodes) או **נקודות חלוקה**

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b$$



והמספר הטבעי n נקרא גודל החלוקה



איור 8.3: חלוקה אחידה של קטע סופי ל- n תתי-קטעים ו- $n+1$ צמתים

נבחין כי חלוקת קטע ל- n תתי-קטעים יוצרת $n+1$ צמתים! חקירת פונקציה $y = f(x)$, תתבצע על ידי חקירת הערכים $y_i = f(x_i)$

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

בניגוד למערך ערכי ה- x , ההפרשים $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ אינם בהכרח אחידים (בניגוד לרושם שמתקבל מאיור 8.1). נבחין כי

$$y_0 = f(x_0) = f(a)$$

$$y_n = f(x_n) = f(b)$$

השאיפה היא להשיג פתרונות קרובים ככל האפשר לפתרונות האמיתיים. מוותרים על דיוק מוחלט אך באמצעות אלגוריתמים חישוביים נוכל לפתור מגוון רחב יותר של בעיות שלא ניתן לפתור בצורה אנליטית.

בשיטת ההפרשים הסופיים אין משמעות למושג הגבול האינפיניטסימלי שבאמצעותו מחשבים למשל את נגזרת של פונקציה ממשית בנקודה:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

בהנחה שרשת הערכים שלנו מספיק עדינה, נוכל לקבל קירוב מספיק טוב של הנגזרת באמצעות מנת ההפרשים הבאה

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

כלומר

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

או בצורה סכימתית תמציתית

$$(8.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

במקרים מסוימים נוכל להעדיף את הקירוב הבא

$$(8.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$$

שגם הוא נובע מהנוסחה הבאה

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

הנוסחה הראשונה נקראת לפעמים **הפרש קדמי** (forward difference), והשנייה **הפרש אחורי** (backward difference). מקור השמות נובע משימושים בנוסחאות נסיגה (recursion) אחורית או קדמית. קיימת גם גירסה של **הפרש מרכזי** (central difference)

$$(8.3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

שנובע מהנוסחה הבאה¹

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

באופן דומה נוכל להמשיך ולחשב את הקירוב הנומרי לנגזרת השנייה

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_i + \Delta x) - f'(x_i)}{\Delta x} \approx \frac{f'(x_i + \Delta x) - f'(x_i)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\frac{f(x_i + \Delta x + \Delta x) - f(x_i + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_i + 2\Delta x) - 2f(x_i + \Delta x) + f(x_i)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{\Delta x^2} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

דרך נוספת לעשות זאת תניב לנו נוסחה נוספת

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_i) - f'(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{f'(x_i) - f'(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

קבלנו שתי נוסחאות שונות לקירוב הנומרי של הנגזרת השנייה

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &\approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

שוב מדובר בנוסחאות **הפרש קדמי** ו**הפרש מרכזי** מסדר שני. קיימת גם נוסחת **הפרש אחורי**

¹ שאת הוכחתה נשאיר כתרגיל לתלמיד.

שנשתמש בה בדוגמה הבאה

$$(8.5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2}$$

באופן דומה נוכל לפתח נוסחאות הפרשים עבור הנגזרת השלישית, הרביעית, וכן הלאה.

ההתחלה: שיטת ההפרש הקדמי של אוילר (Euler)

§8.2

המתמטיקאי הראשון שחקר את הנושא היה המתמטיקאי השוויצרי [לאונרד אוילר](#). הוא היה הראשון שהציע להשתמש בהפרשים קטנים לקבלת פתרון מקורב למשוואה דיפרנציאלית מהצורה הכללית

$$y'(x) = F(x, y)$$

מעל קטע סופי $[a, b]$. אם x_i היא סדרת הצמתים שלנו בקטע, ואם $y_i = y(x_i)$, אז נוכל לקרב את הנגזרת $y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ על ידי

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = F(x_i, y_i)$$

ולכן נקבל נוסחת נסיגה פשוטה לחישוב סדרת הערכים y_i

(8.6)

$$y_{i+1} = y_i + F(x_i, y_i) \Delta x$$

YouTube



שיטה זו נקראת שיטת אוילר קדמית (Forward Euler Method) מאחר והיא משתמשת בנוסחת נגזרת קדמית. בהנחה שנתון לנו תנאי התחלה $y_0 = y(x_0)$ נקבל למעשה פתרון בדיד אחד לפחות למשוואה.

דוגמה 1: נחשב פתרון מקורב למד"ר $y' = 3x^2(y + 1)$ בקטע $[0, 2]$ עם התנאי $y(0) = 0$. בסוף פרק 3 מוצג פתרון מורכב בשיטת פיקארד $y = e^{x^3} - 1$ (למעשה ניחוש מוצלח). ננסה לבדוק אם הפתרון המתקבל באמצעות שיטת אוילר קרוב אליו מספיק.

הודות לפשטות המדהימה של נוסחת אוילר, קידוד הבעייה בשפת התיכנות פייתון יוצא די קצר, כפי שניתן לראות באיור 8.4.

```
a = 0 # Interval = [0,2]
b = 2
N = 100 # Division size 100
dx = (b-a)/N # x step
X = np.array([a + i*dx for i in range(N+1)]) # x nodes
Y = np.zeros(N+1) # y nodes (initialized to zero)

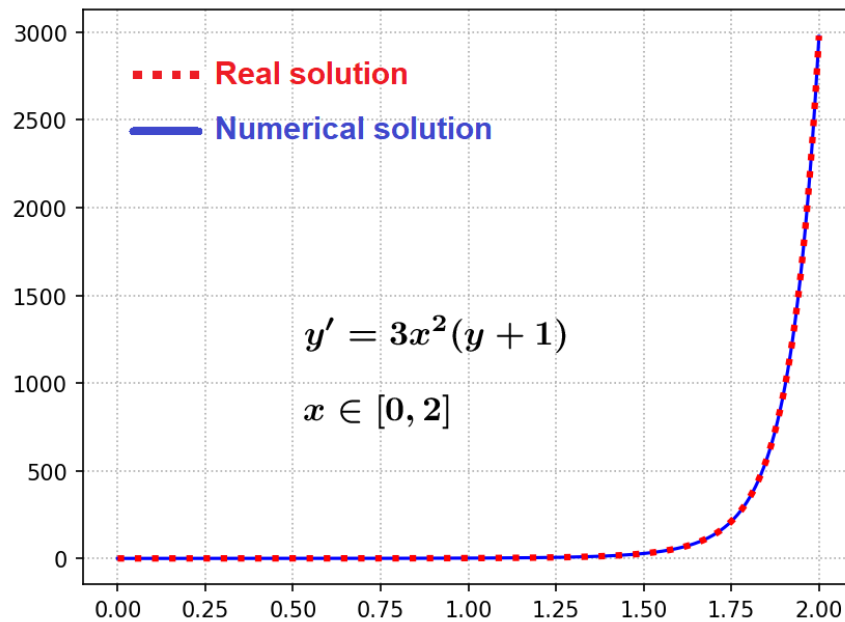
Y[0] = 0 # initial condition y(0) = 0
F = lambda i: 3*X[i]**2 * (Y[i] + 1) # this is our F from: y'=F(x,y)
for i in range(0, N):
    Y[i+1] = Y[i] + F(i)*dx
```



איור 8.4: קוד NumPy עבור פתרון המשוואה $y' = 3x^2(y + 1)$ בשיטת אוילר



הדרך הכי פשוטה להתרשם מהיעילות שלו היא לשרטט את הגרף הבדיד ולהשוות אותו לגרף של הפתרון האמיתי $y(x) = e^{x^3} - 1$. באיור 8.5 רואים עד כמה שני הגרפים קרובים. ניתן לבצע בדיקות נוספות מסוג זה באמצעות הרצת קוד מעל [מחברת הקולאב של דוגמה זו](#).



איור 8.5: הפתרון הנומרי (קו כחול) מול הפתרון האמיתי (קו אדום) של הבעיה $y' = 3x^2(y + 1)$

השאלה שנשאלת לגבי נוסחה (8.6) היא מהם התנאים על F , גודל החלוקה n , ואורך הקטע $[a, b]$, שמבטיחים התכנסות ו/או רמת דיוק רצויה ביחס לפתרון האמיתי? בכדי לענות על שאלה זו נוכיח את הטענות הבאות.

טענה 8.1: (קירוב ליניארי) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 . אזי קיימת פונקציה $\rho(x)$ בסביבת x_0 , כך ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0$, ולכל x בסביבת x_0 ,

$$(8.7) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \rho(x)(x - x_0)$$

הוכחה: נתחיל בהגדרת הפונקציה $\rho(x)$

$$(8.8) \quad \rho(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

מההגדרה ברור כי

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

אם נכפול את שני אגפי המשוואה (8.8) בביטוי $(x - x_0)$ נקבל

$$\rho(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

ולאחר העברה מאגף לאגף נקבל

$$\blacksquare \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \rho(x)(x - x_0)$$

הנוסחה (8.7) נקראת **נוסחת קירוב ליניארי** מאחר והביטוי $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ הוא למעשה פונקציה ליניארית שנעשית קרובה מאוד לפונקציה $f(x)$ בסביבה קטנה של x_0 . מקובל לרשום אותה גם באופן הבא

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + O(\Delta x)\Delta x$$

כאשר $\Delta x = x - x_0$ והביטוי $O(\Delta x)$ מציין גודל רציף **חסום** ששואף לאפס כאשר $\Delta x \rightarrow 0$. מלבד השימוש החישובי, יש לה גם שימושים תאורטיים כמו במשפט הבא (מקור: [2]).

משפט 8.2: תהי $F(x, y)$ פונקציה גזירה ברציפות מעל תחום מישורי חסום D . אם קיים פתרון $y(x)$ למד"ר עם תנאי התחלה בקטע $[a, b]$

$$\begin{cases} y' = F(x, y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

אז הפתרון הבדיד $y_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$, של שיטת אוילר מתכנס נקודתית לפתרון האמיתי בכל נקודה בדידה. יתירה מזאת: אם $e_i = y_i - y(x_i)$ היא השגיאה, אז

$$|e_i| \leq \frac{e^{\lambda i \Delta x}}{\lambda} \cdot O(\Delta x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כאשר $\lambda = \max |F_y(x, y(x))|$, n הוא מספר החלוקה של הקטע.

הוכחה: נתייחס לחלוקת הקטע $[a, b]$, $x_i, y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ כמתואר לעיל. נגדיר את **הסטייה הלוקלית** τ_i על ידי

$$\tau_i = y'(x_i) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x}$$

על פי הטענה הקודמת $\tau_i = -\rho(x_{i+1}) = O(\Delta x)$. כלומר $\tau_i \rightarrow 0$ כאשר $\Delta x = x_{i+1} - x_i \rightarrow 0$. נגדיר את **השגיאה האמיתית** e_i על ידי

$$e_i = y_i - y(x_i)$$

למעלה ראינו כי

$$\tau_i = \rho(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x} - y'(x_i)$$

לכן

$$\begin{aligned}
e_{i+1} &= y_{i+1} - y(x_{i+1}) = y_i + F(x_i, y_i)\Delta x - y(x_{i+1}) \\
&= y_i - y(x_i) + F(x_i, y_i)\Delta x + y(x_i) - y(x_{i+1}) \\
&= e_i + F(x_i, y_i)\Delta x - (y(x_{i+1}) - y(x_i)) \\
&= e_i + F(x_i, y_i)\Delta x - y'(x_i)\Delta x + \rho(x_i)\Delta x \\
&= e_i + F(x_i, y_i)\Delta x - F(x_i, y(x_i))\Delta x + \rho(x_i)\Delta x \\
&= e_i + [F(x_i, y_i) - F(x_i, y(x_i))]\Delta x + \tau_i\Delta x \\
&= e_i + F_y(x_i, \bar{y}_i)(y_i - y(x_i))\Delta x + \tau_i\Delta x \\
&= e_i + F_y(x_i, \bar{y}_i)e_i\Delta x + \tau_i\Delta x \\
&= e_i [1 + F_y(x_i, \bar{y}_i)\Delta x] + \tau_i\Delta x
\end{aligned}$$

בשורה השביעית השתמשנו במשפט ערך הביניים של לגראנז':

$$\frac{F(x_i, y_i) - F(x_i, y(x_i))}{y_i - y(x_i)} = F_y(x_i, \bar{y}_i)$$

הנקודה $\bar{y}_i$ היא ערך ביניים שבין y_i ל- $y(x_i)$.

ננסה להעריך את גודל השגיאה האמיתית $|e_{i+1}|$ ביחס לגודל השגיאה הקודמת e_i

$$\begin{aligned}
|e_{i+1}| &= |e_i(1 + F_y(x_i, \bar{y}_i)\Delta x) + \tau_i\Delta x| \\
&\leq |e_i|(1 + |F_y(x_i, \bar{y}_i)|\Delta x) + |\tau_i|\Delta x \\
&\leq (1 + \lambda\Delta x)|e_i| + |\tau_i|\Delta x
\end{aligned}$$

הפונקציה $F(x, y)$ גזירה ברציפות בתחום הקומפקטי שלנו ולכן הנגזרת F_y חסומה שם, ולכן קיים המקסימום $\lambda = \max |F_y(x, y)|$. קיבלנו את אי-השוויון הרקורסיבי הבא

$$(8.9) \quad |e_{i+1}| \leq (1 + \lambda\Delta x)|e_i| + |\tau_i|\Delta x$$

ברור כי $1 + \lambda\Delta x > 0$ ולכן השמטנו את הערך המוחלט בכל ההופעות שלו. ננסה להפעיל את הרקורסיה על שתי דוגמאות פשוטות בכדי לקבל אי-שוויון יותר כללי אם נציב $i = 1$ באי-שוויון (8.9) נקבל

$$|e_2| \leq (1 + \lambda\Delta x)|e_1| + |\tau_1|\Delta x$$

² אם $y_i = y(x_i)$ אז $e_i = 0$ והאיבר הראשון כולו ייתאפס ממילא.



ולכן עבור $i = 2$ נקבל

$$\begin{aligned} |e_3| &\leq (1 + \lambda \Delta x) |e_2| + |\tau_2| \Delta x \\ &\leq (1 + \lambda \Delta x) [(1 + \lambda \Delta x) |e_1| + |\tau_1| \Delta x] + |\tau_2| \Delta x \\ &\leq (1 + \lambda \Delta x)^2 |e_1| + (1 + \lambda \Delta x) |\tau_1| \Delta x + |\tau_2| \Delta x \end{aligned}$$

קיבלנו

$$(8.10) \quad |e_3| \leq (1 + \lambda \Delta x)^2 |e_1| + (1 + \lambda \Delta x) |\tau_1| \Delta x + |\tau_2| \Delta x$$

עבור $i = 3$ החישוב הוא

$$\begin{aligned} |e_4| &\leq (1 + \lambda \Delta x) |e_3| + |\tau_3| \Delta x \\ &\leq (1 + \lambda \Delta x) [(1 + \lambda \Delta x)^2 |e_1| + (1 + \lambda \Delta x) |\tau_1| \Delta x + |\tau_2| \Delta x] + |\tau_3| \Delta x \\ &= (1 + \lambda \Delta x)^3 |e_1| + (1 + \lambda \Delta x)^2 |\tau_1| \Delta x + (1 + \lambda \Delta x) |\tau_2| \Delta x + |\tau_3| \Delta x \end{aligned}$$

קיבלנו

$$(8.11) \quad |e_4| \leq (1 + \lambda \Delta x)^3 |e_1| + (1 + \lambda \Delta x)^2 |\tau_1| \Delta x + (1 + \lambda \Delta x) |\tau_2| \Delta x + |\tau_3| \Delta x$$

למעלנו ראינו כי $\tau_i = O(\Delta x)$, ולכן $\tau_i \Delta x = O(\Delta x^2)$. לכן מאי-שוויונים (8.10), (8.11), אנו למדים כי עבור כל $1 \leq k < n$,

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq (1 + \lambda \Delta x)^k |e_1| + \sum_{i=0}^{k-1} (1 + \lambda \Delta x)^i O(\Delta x^2) \\ &= (1 + \lambda \Delta x)^k |e_1| + O(\Delta x^2) \sum_{i=0}^{k-1} (1 + \lambda \Delta x)^i \\ &= (1 + \lambda \Delta x)^k |e_1| + \frac{(1 + \lambda \Delta x)^k - 1}{\lambda \Delta x} \cdot O(\Delta x^2) \\ (8.12) \quad &= (1 + \lambda \Delta x)^k |e_1| + \frac{(1 + \lambda \Delta x)^k}{\lambda} \cdot O(\Delta x) \\ &\leq (1 + \lambda \Delta x)^k O(\Delta x) + \frac{e^{\lambda k \Delta x}}{\lambda} \cdot O(\Delta x) \\ &\leq e^{\lambda k \Delta x} O(\Delta x) + \frac{e^{\lambda k \Delta x}}{\lambda} \cdot O(\Delta x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

בשורה השלישית השתמשנו בנוסחת הסכום של טור הנדסי כאשר $q = 1 + \lambda \Delta x$. כמו כן, קל להוכיח את אי-השוויון $(1 + \lambda \Delta x)^k \leq e^{\lambda k \Delta x}$. מאחר ופורמלית נוכל לרשום

$$O(\Delta x) = \lambda \cdot O(\Delta x)$$

נוכל להחליף את הביטוי $e^{\lambda k \Delta x} O(\Delta x)$ בביטוי $\frac{e^{\lambda k \Delta x}}{\lambda} \cdot O(\Delta x)$ ולכן לסיכום נוכל לרשום

$$|e_{k+1}| \leq \frac{e^{\lambda k \Delta x}}{\lambda} \cdot O(\Delta x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן הקירוב הנומרי שלנו y_i מתכנס לפתרון האמיתי בכל הנקודות x_i ככל שמספר החלוקה n שואף לאינסוף. ■

נוסחת נסיגה עבור משוואה דיפרנציאלית רגילה

§8.3

דוגמה 2: נתחיל עם משוואה דיפרנציאלית פשוטה שפתרונה פשוט וידוע עם תנאי התחלה בנקודה $x = 0$ בקטע $[0, \pi]$.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

זוהי כמובן משוואה דיפרנציאלית לניארית בעלת מקדמים קבועים שקל למצוא את פתרונה $y(x) = \cos x$. לכן נצטרך לוודא שהפתרון שמתקבל בשיטת ההפרשים זהה. נשתמש בנוסחת ההפרש האחורי (8.5) עבור הנגזרת השניה

$$\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^2} + y_i = 0$$

עבור מספר טבעי מספיק גדול n , נחלק את הקטע $[0, \pi]$ ל- n חלקים שווים. נסמן

$$d = \Delta x = \frac{\pi}{n}$$

ונפתח נוסחת נסיגה (התקדמות) לחישוב y_i עבור ערכי $i = 2, 3, \dots, n$.

$$y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} + d^2 y_i = 0$$

לכן

$$y_i = \frac{2y_{i-1} - y_{i-2}}{1 + d^2}$$

תנאי התחלה ראשון נותן: $y_0 = 1$.

תנאי התחלה שני נותן:

$$0 = y'(0) \approx \frac{y(d) - y(0)}{d} = \frac{y_1 - y_0}{d}$$



לכן בהכרח $y_1 = 1$. קיבלנו נוסחת רקורסיה מלאה עבור y_i

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 \\ y_i = \frac{2y_{i-1} - y_{i-2}}{1 + d^2} \end{cases}$$

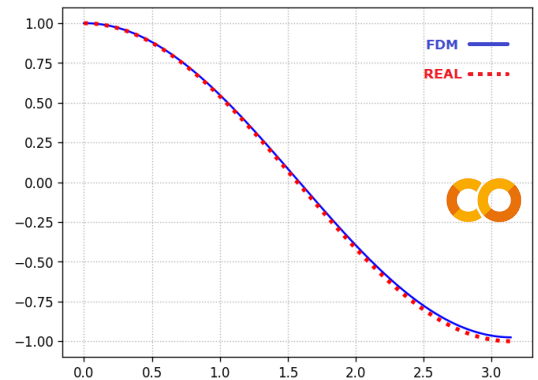
הנוסחה מאפשרת לחשב את כל הערכים של y על סמך שני תנאי ההתחלה ונוסחת ההתקדמות כפי שניתן לראות בקוד הפיתוח הבא

```
a = 0 # Interval = [0,2]
b = pi
N = 200 # Division size
dx = (b-a)/N # x step
X = np.array([a + i*dx for i in range(N+1)]) # x nodes
Y = np.zeros(N+1) # y nodes (initialized to zero)

Y[0] = 1 # initial condition y(0) = 1
Y[1] = 1 # initial condition y'(0) = 1
for i in range(2, N+1):
    Y[i] = (2*Y[i-1] - Y[i-2]) / (1 + dx**2)

plt.plot(X, Y, color="blue", linewidth=1.5)
Yreal = np.cos(X) # The real solution of the equation
plt.plot(X, Yreal, color="red", linewidth=1.5)
```

איור 8.6: קוד בשפת התיכנות פייתון לשם חישוב המערך y



איור 8.7: שרטוט הפתרון שהתקבל מול האמיתי ($\cos x$)

באיור 8.7 ניתן לראות עד כמה רמת הדיוק של הפתרון הבדיד קרובה לפתרון האמיתי של המשוואה, עבור חלוקה $n = 200$ (ולכן $d = \frac{\pi}{200}$). כאשר לוקחים $n = 1000$, רמת הדיוק עולה ל-99.7%. זמן החישוב הוא זניח (אלפיות שניה) ולכן ניתן להגיע לרמת דיוק גבוהה במינימום זמן.

מערכת משוואות לינאריות על סריג הפרשים

§8.4

נוסחת נסיגה לא תמיד מתאפשרת. ברוב המקרים, הדרך היחידה לפתור בעיות התחלה או בעיות שפה היא באמצעות פתרון של מערכת משוואות לינאריות במספר גדול של משתנים.

דוגמה 3: ננסה עכשיו לפתור את [משוואת Airy](#) על הקטע הסופי $[-3, 3]$ עם תנאי שפה על קצות הקטע $a = -3$, $b = 3$.

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(-3) = 4 \\ y(3) = -5 \end{cases}$$

זו משוואה דיפרנציאלית שעולה בתחום האופטיקה, וכמעט בכל קורס בסיסי במשוואות דיפרנציאליות רגילות לומדים כיצד לפתור אותה עם תנאי התחלה בנקודה פנימית של הקטע באמצעות שימוש בטורי חזקות. דוגמא לפתרון כזה ניתן למצוא בפרק 5. השיטות האלה לא מספיקות בכדי לפתור את המשוואה בצירוף תנאי שפה על הקטע. נראה כיצד לפתור את

הבעייה באמצעות שיטת ההפרשים הסופיים.

עבור מספר טבעי מספיק גדול n , נחלק את הקטע $[-3, 3]$ ל- n חלקים שווים באורך

$$d = \Delta x = \frac{6}{n}$$

נשתמש בנוסחת ההפרש המרכזי (הנוסחה השנייה של (8.4)) עבור y''

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{d^2} - x_i y_i = 0$$

נבנה מערכת משוואות לינאריות ב- $n+1$ נעלמים $y_0, y_1, \dots, y_n$.

$$\begin{cases} y_0 = 4 \\ y_{i-1} - (d^2 x_i + 2)y_i + y_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_n = -5 \end{cases}$$

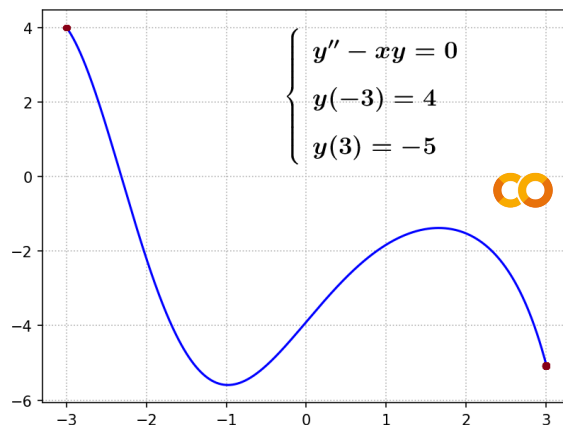
תנאי השפה $y(-3) = 4$ מתורגם למשוואה $y_0 = 1$, ותנאי השפה $y(3) = -5$ מתורגם למשוואה $y_n = -5$. הפתרון של המערכת מתבצע בקלות רבה על ידי כל תוכנה נומרית בסיסית. למשל באמצעות חבילת NumPy ניתן לפתור את הבעייה כפי שרואים באיורים 8.8, 8.9.

```

a = -3                # Interval = [-3,3]
b = 3
N = 1000              # Division size
d = (b-a)/N           # x step
X = np.array([a + i*d for i in range(N+1)]) # x nodes
Y = np.zeros(N+1)     # y nodes (initialized to zero)
A = np.zeros((N+1, N+1))
B = np.zeros(N+1)
X = [a+i*d for i in range(N+1)]
for i in range(1, N):
    A[i,i-1] = 1
    A[i,i] = -d**2 * X[i] - 2
    A[i,i+1] = 1
    B[i] = 0
A[0,0] = 1
B[0] = 4
A[N,N] = 1
B[N] = -5
Y = np.linalg.solve(A, B)

```

איור 8.8: קוד בשפת התיכנות פייתון לשם חישוב המערך y



איור 8.9: שרטוט הפתרון שהתקבל עבור משוואת Airy

מאחר ונרצה גם לבדוק עד כמה שיטת ההפרשים הסופיים מדויקת, נרצה לבדוק אם הפתרון שקיבלנו נכון ועד כמה הוא מדויק? בפרק 5 מצאנו את הפתרון הכללי הקלאסי של משוואת

Airy

$$(8.13) \quad y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (3k-1) \cdot 3k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 3k \cdot (3k+1)} \right)$$

על ידי הצבת תנאי השפה שלנו על $x = -3$, $x = 3$, נקבל זוג משוואות לינאריות בנעלמים a_0, a_1 , ולקבל את הפתרון הפרטי עבור המשוואה עם תנאי השפה. חישוב נומרי פשוט באמצעות

NumPy  נותן את התוצאה

$$a_0 = -3.899582585804049$$

$$a_1 = 2.527852502969321$$

על ידי הצבת ערכים אלה בפתרון הכללי (8.13) נקבל פונקציה כמעט זהה לזו שקיבלנו בשיטת ההפרשים הסופיים. בהמשך נוסיף קישור לקוד  שמוכיח זאת.

דוגמה 4: נחפש פתרון נומרי לבעיית ההתחלה הבאה בקטע $[0.5, 1.5]$.

$$\begin{cases} (x^2 - 2x)y'' - 2y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

על סמך משפט 5.14 ניתן לוודא שיש לבעייה זו פתרון בצורת טור חזקות שמתכנס בקטע $(0, 2)$, ולכן תחום החיפוש שלנו לגיטימי. תנאי ההתחלה שלנו נתון על נקודה $x = 1$ באמצע הקטע. נחלק את הקטע $[0.5, 1.5]$ למספר זוגי של קטעים $2n$ כך ש- $x_0 = 0.5$, $x_n = 1$, $x_{2n} = 1.5$ ובאופן כללי $x_i = 0.5 + \frac{i}{2n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$.

נשתמש בנוסחה (8.4) עבור הנגזרות של y

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

נקבל את הצורה הנומרית של המשוואה שלנו $(x^2 - 2x)y'' - 2y = 0$:

$$(x_i^2 - 2x_i) \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \right) - 2y_i = 0$$

לכן

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - \frac{2y_i \Delta x^2}{x_i^2 - 2x_i} = 0$$

נשתמש בסימון $d = \Delta x$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - \frac{2d^2 y_i}{x_i^2 - 2x_i} = 0$$

לכן

$$y_{i+1} - \left(2 + \frac{2d^2}{x_i^2 - 2x_i} \right) y_i + y_{i-1} = 0$$

לא קשה לוודא שהביטוי $x_i^2 - 2x_i$ אינו מתאפס בקטע $(0.5, 1.5)$, ולכן האילוץ הנומרי שלנו

מוגדר היטב עבור כל ערכי x_i . כזכור, $x_i = 0.5 + \frac{i}{2n}$, ולכן

$$\begin{aligned} x_i^2 - 2x_i &= \left(0.5 + \frac{i}{2n}\right)^2 - 2\left(0.5 + \frac{i}{2n}\right) \\ &= 0.25 + \frac{i}{2n} + \frac{i^2}{4n^2} - 1 - \frac{i}{n} \\ &= \frac{i^2}{4n^2} - \frac{i}{2n} - 0.75 \end{aligned}$$

המקדם c_i של y_i הוא לכן

$$\begin{aligned} c_i &= -\left(2 + \frac{2d^2}{x_i^2 - 2x_i}\right) = -2 - \frac{2d^2}{\frac{i^2}{4n^2} - \frac{i}{2n} - 0.75} \\ &= -2 - \frac{8n^2d^2}{i^2 - 2ni - 3n^2} \end{aligned}$$

קיבלנו לכן

$$c_i = -2 - \frac{8n^2d^2}{i^2 - 2ni - 3n^2}$$

לכן לכל i בטווח $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$, נקבל משוואה ליניארית במשתנים y_{i+1}, y_i, y_{i-1}

$$y_{i-1} + c_i y_i + y_{i+1} = 0$$

קיבלנו $2n - 1$ משוואות ליניאריות ב- $2n + 1$ נעלמים $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$. להשלמת המערכת דרושות לנו עוד שתי משוואות שנמקם בשורה $i = 0$, ושורה $i = 2n$. מתנאי ההתחלה הראשון $y(1) = 0$ נקבל את המשוואה: $y_n = 0$ (כזכור $x_n = 1$!). מתנאי ההתחלה השני $y'(1) = -1$ נקבל

$$-1 = y'(1) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{d} = \frac{y_{n+1}}{d}$$

לכן בהכרח $y_{n+1} = -d = -\frac{1}{2n}$.

קיבלנו אם כן מערכת ליניארית של $2n + 1$ משוואות ו- $2n + 1$ נעלמים y_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = 0 \\ y_0 + c_1 y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + c_2 y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + c_3 y_3 + y_4 = 0 \\ \vdots \\ y_{2n-2} + c_{2n-1} y_{2n-1} + y_{2n} = 0 \\ y_{n+1} = -d \end{array} \right.$$



קיימות שיטות מהירות לפתרון מערכות מסוג זה (מטריצת מקדמים דלילה). הקוד הבא הוא דוגמא לאיך זה מתבצע בשפת התיכנות פייתון (חבילת NumPy):



```
a=0.5
b=1.5
n = 500
dx = (b-a)/(2*n)
# Linear system of (2n+1)x(2n+1) equations: AY = B
# A = coefficients matrix
A = np.zeros((2*n+1,2*n+1))
# Right side coefficients array
B = np.zeros(2*n+1)
# A = coefficients matrix for our (2n+1)x(2n+1) linear system
# These define 2n-1 linear equations out of 2n+1 that we need for our
# 2n+1 unknowns: Y[0], Y[1], ... Y[2n].
# Note that A[i,i-1], A[i,i], A[i,i+1] are the coefficients of Y[i-1], Y[i], Y[i+1], respectively
for i in range(1, 2*n):
    A[i,i-1] = 1
    A[i,i] = -2 - (8*n**2 * dx**2)/(i**2 - 2*n*i - 3*n**2)
    A[i,i+1] = 1
    B[i] = 0
A[0,n] = 1
B[n] = 0
A[2*n,n+1] = 1 # This is the coefficient of Y[n+1]
B[2*n] = -dx # This is the right side value: 1 * Y[n+1] = -dx
# Then we solve our system
Y = np.linalg.solve(A, B)
```

איור 8.10: פתרון המערכת על ידי Python/Numpy

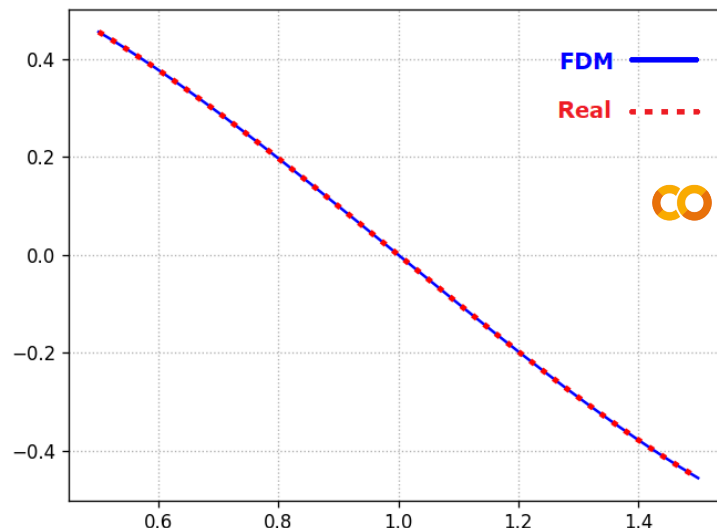
בכדי לאמת את התוצאה שהתקבלה, פתרנו את הבעיה בשיטה הרגילה של מציאת פתרון בצורת טור חזקות סביב הנקודה $x = 1$. חבילת SymPy מספקת פתרון כזה שניתן לראות במחברת המקושרת לאיור 8.10

$$y(x) = C_1 \cdot (1 - (x - 1)^2) + C_2 \left(x - \frac{(x - 1)^7}{35} - \frac{(x - 1)^5}{15} - \frac{(x - 1)^3}{3} - 1 \right) + O(x^9)$$

המקדמים C_1, C_2 , נקבעים על פי תנאי ההתחלה: $C_1 = y(1)$, $C_2 = y'(1)$. במקרה שלנו $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, ולכן הפתרון הפרטי לבעיה שלנו הוא

$$y(x) = 1 - x + \frac{(x - 1)^3}{3} + \frac{(x - 1)^5}{15} + \frac{(x - 1)^7}{35}$$

באיור 8.11 רואים כיצד הפתרון הסימבולי של SymPy (קו אדום מרוסק) מתלכד עם הפתרון הנומרי שקיבלנו באמצעות שיטת ההפרשים הסופיים (קו כחול).



איור 8.11: הפתרון הנומרי והפתרון הסימבולי מתלכדים ברמת דיוק גבוהה

ביבליוגרפיה

§8.5

1. **Introductory Finite Difference Methods for PDEs.** *D. M. Causon, C. G. Mingham.* UNIVERSITY OF MANCHESTER, ENGLAND, 2010).
<https://www.cs.man.ac.uk/~fumie/tmp/introductory-finite-difference-methods-for-pdes.pdf>
<https://www.bookboon.com>
2. **Finite Difference Methods for Solving Differential Equations.** *I-Liang Chern.* LECTURE NOTES, NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY.
<http://www.math.ntu.edu.tw/~chern/notes/FD2013.pdf>
3. **Finite difference methods for 2D and 3D wave equations.** *Hans Petter Langtangen.* [HTTPS://HPLGIT.GITHUB.IO](https://hplgit.github.io).
https://hplgit.github.io/num-methods-for-PDEs/doc/pub/wave/sphinx/_main_wave005.html
<https://hplgit.github.io/num-methods-for-PDEs/doc/pub/wave/sphinx>
4. **Finite Difference Computing with PDEs - A Modern Software Approach.** *Hans Petter Langtangen, Svein Linge.* SPRINGER LINK.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-55456-3>
<https://hplgit.github.io/fdm-book/doc/pub/book/pdf/fdm-book-4print.pdf>
5. **Programming for Computations - A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python.** *Svein Linge, Hans Petter Langtangen.* SPRINGER LINK.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32428-9>
https://hplgit.github.io/prog4comp/doc/pub/p4c_Python.pdf

