פונקציות מרוכבות והתמרות אינטגרליות (104221)

תירגול לקראת הבחינה הסופית (פיתרונות)

1. קבוצת המספרים המרוכבים שמקיימת $|\frac{6}{z}-i|>1$ וגם $|e^{1-iz}|<1$ היא

א. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<-1\}$

ב. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<\mathrm{Im}(z)<3\}$

ג. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<1\}$

ד. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-1<\mathrm{Im}(z)<3\}$

ה. $\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<3\}$

תשובה: א

פיתרון: התשובה היא א'.

פיתרון ראשון:

נסמן $z=x+iy$ ונבדוק כל אילוץ בנפרד.

- $|\frac{6}{z}-i|>1$: אי השיוויון שקול ל:

$$\sqrt{x^2+(y+6)^2}=|z-6i|>|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

שבתורו מניב $y>-3$.

- $|e^{1-iz}|<1$:

$$e^{1+y}=\left|e^{1-i(x+iy)}\right|<1$$

המתקיים אם ורק אם $1+y<0$ כלומר $y<-1$.

התשובה היא החיתוך, כלומר $\boxed{\{z\in\mathbb{C}\,|\,-3<\mathrm{Im}(z)<-1\}}$.

פיתרון שני: נגדיר שתי קבוצות

$$A=\{z\in\mathbb{C}:|\tfrac{6}{z}-i|>1\}$$

$$B=\{z\in\mathbb{C}:|e^{1-iz}|<1\}$$

עלינו למצוא את החיתוך $A\cap B$. את B נחשב כמו בפיתרון הראשון. את הקבוצה A נמצא על ידי שימוש בהעתקת מביוס. אם נרשום

$$T(z)=\frac{6}{z}-i=\frac{-iz+6}{1\cdot z+0}$$

אז T היא העתקת מביוס, ונוכל לרשום

$$A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|T(z)|>1\}=T^{-1}\left(\mathbb{C}-\overline{B(0,1)}\right)=\mathbb{C}-T^{-1}\left(\overline{B(0,1)}\right)$$

כלומר, A היא המשלים של התמונה ההפוכה של דיסק היחידה. קל לחשב את ההעתקה ההפוכה

$$T^{-1} = \frac{-6}{-z-i}$$

השתמשנו בנוסחה

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \implies T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

ידוע לנו שהעתקת מביוס מעבירה מעגלים וישרים למעגלים וישרים, לכן תספיק בדיקה של שלש נקודות על מעגל היחידה $|z| = 1$

z	1	-1	i
$T^{-1}(z)$	$3-3i$	$-3-3i$	$-3i$

רואים מייד כי תמונת המעגל היא הישר $\mathrm{Im}(z) = -3$. בדיקת $z=0$, $T^{-1}(0) = -6i$, מראה שפנים המעגל עובר לחצי המישור $\mathrm{Im}(z) \le -3$. לכן הקבוצה A היא חצי המישור $\mathrm{Im}(z) > -3$.

.2 הפונקציה $v(x,y) = 3x^2y + ky^3 - x + 1$ היא משלים הרמוני של

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$$

אם ורק אם

א. $k=0$ **ב.** $k=1$ **ג.** $k=-1$ **ד.** $k=-3$ **ה.** $k=3$

תשובה: $k=-1$

פיתרון: פונקציה הרמונית $v(x,y)$ היא פיתרון של המערכת

$$\begin{cases} v_x &= -u_y \\ v_y &= u_x \end{cases}$$

התוצאה מתקבלת בקלות $k=-1$.

.3 המשלים ההרמוני של $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ הוא

א. $\frac{x}{x^2+y^2}$ **ב.** $\frac{y}{x^2+y^2}$ **ג.** $\arctan\frac{x}{y}$ **ד.** $\arctan\frac{y}{x}$ **ה.** $\arctan\frac{-y}{x^2+y^2}$

תשובה: $v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

פיתרון: פונקציה הרמונית $v(x,y)$ היא פיתרון של המערכת

$$\begin{cases} v_x &= -u_y \\ v_y &= u_x \end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases} v_x &= -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_y &= \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

קל לראות שרק הפונקציה $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ מקיימת את המערכת הזו.

4. הפונקציה $f(z)=|\overline{z}|^2$

א. אנליטית על כל המישור המרוכב

ב. אנליטית בנקודה $z=0$ אך לא גזירה בנקודה $z=0$

ג. גזירה בנקודה $z=1$ בלבד

ד. גזירה בנקודה $z=0$ אך אינה אנליטית בנקודה $z=0$

תשובה: ד.

5. יהי $\mathrm{Log}(z)$ הענף העיקרי של פונקציית הלוגריתם הטבעי, ויהי $L(z)$ ענף כלשהו של פונקציית הלוגריתם הטבעי.

א. חשב את $\oint_{|z|=1} z\mathrm{Log}(z)\ dz$

ב. הוכח כי $\mathrm{Log}(z)-L(z)$ קבוע בכל תחום ההגדרה המשותף

ג. הוכח כי $\oint_{|z|=1} zL(z)\,dz=\oint_{|z|=1} z\mathrm{Log}(z)\ dz$

תשובה: א. πi

פיתרון: פרמטריזציה סטנדרטית של מעגל היחידה היא

$$\gamma(t)=e^{it},\quad 0\le t\le 2\pi$$

נשתמש בהגדרת האינטגרל לאורך מסילה

$$\begin{aligned}\oint_\gamma = z\mathrm{Log}(z)\ dz &= \int_0^{2\pi}\gamma(t)\cdot\mathrm{Log}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi} e^{it}\cdot\mathrm{Log}(\gamma(t))\cdot ie^{it}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} -te^{2it}\,dt\\ &= \frac{1}{4}e^{2it}(2it-1)\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=\pi i\end{aligned}$$

האינטגרל האחרון התבצע באמצעות אינטגרציה בחלקים.

ב. הוכחת הטענה מופיעה בדף 2 של הסיכום הקצר הבא על נושא הענפים (branches) של פונקציות מרוכבות:

הסבר קצר על ענפים של פונקציות מרוכבות רב-ערכיות

ג. לאחר ההסבר הקצר שהובא בקישור הנ"ל, חישוב האינטגרל הופך עכשיו לפשוט

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} zL(z)\,dz &= \oint_{|z|=1} z[\mathrm{Log}(z)+2k\pi i]\,dz \\ &= \oint_{|z|=1} z\mathrm{Log}(z)\;dz + 2k\pi i\cdot\oint_{|z|=1} z\,dz \\ &= \pi i\end{aligned}$$

האינטגרל האחרון התאפס כי לפונקציה $f(z)=z$ יש פונקציה פרימיטיבית, ולכן האינטגרל על מסילה סגורה מתאפס על פי קושי-גורסה.

6. תהי $f(z)$ ענף אנליטי של z^i בתחום $D=\mathbb{C}-\{\,iy \mid y\le 0\}$. ידוע כי $f(1)=e^{2\pi}$. חשב את $f(i)$.

תשובה: $f(i)=e^{\frac{3\pi}{2}}$

פיתרון: על פי ההגדרה $z^i=e^{iL(z)}$ כאשר $L(z)$ הוא ענף של פונקציית הלוגריתם

$$L(z)=\ln|z|+iA(z)$$

כאשר $A(z)$ ענף מתאים של פונקציית הארגומנט. נתון כי $f(1)=e^{2\pi}$. כלומר

$$f(1)=1^i=e^{iL(1)}=e^{2\pi}$$

לכן $L(1)=-2\pi i$, ולכן $A(1)=e^{0i}=-2\pi$. לכן $A(z)$ היא ענף של הארגומנט בקטע $[-2\pi,0)$. לכן $A(i)=-\frac{3\pi}{2}$, ולכן

$$L(i)=\ln|i|+A(i)=0-\frac{3\pi i}{2}$$

לכן $f(i)=e^{iL(i)}=e^{\frac{3\pi}{2}}$.

7. לכל אחת מהפונקציות הבאות, מצא ענף אנליטי בתחום המבוקש

א. $f(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, $D=\{\,z\in\mathbb{C}\;:\;|z|<1\}$

ב. $f(z)=(4+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $D=\mathbb{C}-[-2i,2i]$

ג. $f(z)=(z^4-1)^{\frac{1}{2}}$, $D=\{\,z\in\mathbb{C}\;:\;|z|>1\}$

ד. $f(z)=(z^3-1)^{\frac{1}{3}}$, $D=\{\,z\in\mathbb{C}\;:\;|z|>1\}$

תשובה: פיתרון למרבית הסעיפים מופיע בקישור הבא:

הסבר קצר על ענפים של פונקציות מרוכבות רב-ערכיות

8. הפונקציה $e^x(\cos y - i\sin y)$

א. אנליטית על כל $\mathbb{C}$

ב. אינה אנליטית בשום נקודה של $\mathbb{C}$

ג. אנליטית בנקודה $z = 1$ בלבד

ד. אנליטית בנקודה $z = i$ בלבד

ה. אנליטית בנקודה $z = -i$ בלבד

תשובה: ב.

פיתרון: נרשום

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \cos y + i(-e^x \sin y)$$

לכן

$$u_x = e^x \cos y \qquad v_y = -e^x \cos y$$

$$u_y = -e^x \sin y \qquad -v_x = e^x \sin y$$

רואים בבירור שמשוואות קושי-רימן ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) אינם מתקיימים בשום נקודה ולכן הפונקציה אינה אנליטית בשום נקודה.

9. מהו המקום הגאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$$

תשובה: המעגל $|z+5| = 4$

פיתרון: מדובר בתמונה הפוכה של העתקת מביוס של המעגל $|z| = 2$. נזכיר שגם ההעתקה ההפוכה היא העתקת מביוס, וידוע שהעתקת מביוס מעתיקה מעגלים וישרים למעגלים וישרים. יספיק לכן לבדוק תמונה הפוכה של שלוש נקודות על המעגל $|z| = 2$. ראשית כל נמצא את העתקת המביוס ההפוכה

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \implies f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

לכן במקרה שלנו ההעתקה ההפוכה היא

$$f(z) = \frac{z-3}{z+3} \implies f^{-1}(z) = \frac{3z+3}{-z+1}$$

נציב למשל את הנקודות $z = 2, -2, 2i$ ונקבל

$$f^{-1}(2) = -9, \quad f^{-1}(-2) = -1, \quad f^{-1}(2i) = -1.8 + 2.4i$$

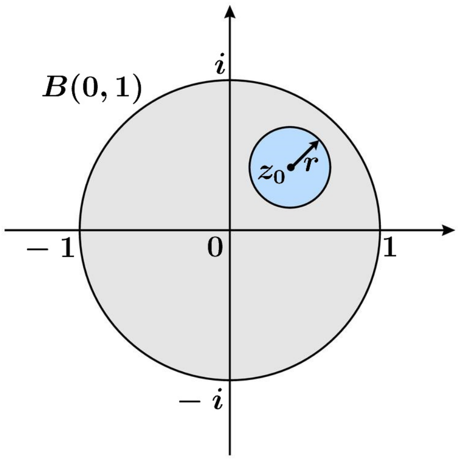
רואים מייד שמדובר במעגל. שלושת הנקודות יוצרות משולש ישר זווית שהיתר שלו הוא הקטע $(-9,-1)$.
לכן משוואת המעגל היא $|z+5| = 4$.

10. תהי $f : B(0,1) \to B(0,1)$ פונקציה אנליטית מדיסק היחידה הפתוח אל עצמו. הוכח כי לכל $|z| < 1$, $|f'(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$.

פיתרון: נקח z_0 קבוע בדיסק היחידה: $|z_0| < 1$. על פי נוסחת הנגזרת של קושי

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

כאשר $B(z_0, r)$ סביבה קטנה של הנקודה z_0 הכלולה בדיסק היחידה.



איור 1: סביבה קטנה של הנקודה z_0 הכלולה בתוך דיסק היחידה $B(0,1)$

ברור כי $|z_0| + r < 1$ ולכן $0 < r < 1 - |z_0|$. על פי למת ההערכה

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \text{Max}\,|z - z_0| = r \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| \cdot 2\pi r \\ &= r \cdot \underset{|z-z_0|=r}{\text{Max}} \frac{|f(z)|}{r^2} \leq r \cdot \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

אי-השוויון נכון עבור כל r מתאים. אם ניתן ל־r לשאוף לגבול $1 - |z_0|$ נקבל

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{1 - |z_0|}$$

11. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בדיסק $|z| < R$, כאשר R ממשי חיובי. נגדיר פונקציה ממשית $g : [0, R] \to \mathbb{R}$ על ידי

$$g(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

הוכח כי g פונקציה מונוטונית עולה.

פיתרון: לכל $r < R$, על פי עקרון המקסימום, המקסימום של $|f(z)|$ בדיסק הסגור $\overline{B(0,r)}$ מתקבל על המעגל $|z| = r$. לכן אם $r_1 < r_2$

$$g(r_1) = \underset{|z|=r_1}{\text{Max}} |f(z)| = \underset{|z|\leq r_1}{\text{Max}} |f(z)| \leq \underset{|z|\leq r_2}{\text{Max}} |f(z)| = \underset{|z|=r_2}{\text{Max}} |f(z)| = g(r_2)$$

קיבלנו $g(r_1) \leq g(r_2)$.

12. תהי $f(z)$ פונקציה לא קבועה ואנליטית בעיגול $|z - 1| \leq 2$ (כולל השפה). נניח ש־$|f(z)| = 3$ על שפת העיגול הנ"ל, הוכח של־f יש שורש אחד לפחות בתוך העיגול.

פיתרון: נניח בשלילה $f(z) \neq 0$ לכל z בעיגול. נגדיר $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. אזי $|g(z)| = \frac{1}{3}$ על שפת העיגול. על פי עיקרון המקסימום $|g(z)| \leq \frac{1}{3}$ ולכן $|f(z)| \geq 3$ על כל העיגול. קיבלנו $|f(z)| = 3$ על כל העיגול, ולכן על פי טענה 4.15 $f(z)$ קבועה על העיגול, בסתירה לנתון.

13. ערך האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{13+5\cos t}$ הוא

א. $\frac{\pi}{2}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$ **ג.** $\frac{\pi}{6}$ **ד.** $\frac{\pi}{12}$ **ה.** $\frac{\pi}{4}$

רמז: $f(z) = \frac{1}{5z^2+26z+5}$

תשובה: ג.

פיתרון: שימוש במשפט השארית: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{13+5\cos t} = \frac{2}{i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5z^2+26z+5}dz$ (הצבה: $z = e^{it}$).

14. ערך האינטגרל $\int_\gamma e^{iz}dz$ על המסילה $\gamma(t) = i + e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ הוא

א. ie^{-1} **ב.** $3e - i$ **ג.** $i(1-e^{-2})$ **ד.** $(1+i)e^{-3}$ **ה.** $(1-i)e^{-3}$

תשובה: ג.

פיתרון: יש לחשב אנטינגזרת $F(z) = -ie^{iz}$ של e^{iz} ולחשב

$$F(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - F(\gamma(-\tfrac{\pi}{2})) = F(2i) - F(0) = i(1-e^{-2})$$

15. נתונה הפונקציה $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2+a^2}$, $a \neq 0$ ממשי.

א. מצא את הקטבים של הפונקציה

ב. הוכח כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}$

תשובה: **א.** $\pm a$, $n \in \mathbb{Z}$ קטבים פשוטים.

פיתרון:

As

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z^2+a^2)\sin \pi z}$$

this has poles where the denominator vanishes, i.e. poles at $z = \pm ia$ and at $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$ These poles are all simple. We can calculate

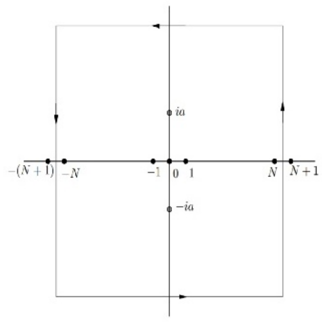
$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, ia) &= \lim_{z\to ia} \frac{(z-ia)\cos \pi z}{(z-ia)(z+ia)\sin \pi z} = \lim_{z\to ia} \frac{\cos \pi z}{(z+ia)\sin \pi z} = \frac{\cos i\pi a}{2ia \sin i\pi a} \\
&= \frac{\cosh \pi a}{-2a \sinh \pi a} = \frac{-\coth \pi a}{2a}
\end{aligned}$$

using the facts that $\cos iz = \cosh z$, $\sin iz = i \sinh z$. Similarly,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, -ia) &= \lim_{z\to -ia} \frac{(z+ia)\cos \pi z}{(z+ia)(z-ia)\sin \pi z} = \lim_{z\to -ia} \frac{\cos \pi z}{(z-ia)\sin \pi z} \\
&= \frac{\cos(-i\pi a)}{-2ia \sin(-i\pi a)} = \frac{\cosh \pi a}{-2a \sinh \pi a} = \frac{-\coth \pi a}{2a}.
\end{aligned}$$

By the formula $\boxed{\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$

$$\mathrm{Res}(f,n)=\frac{\cos\pi n}{2n\sin\pi n+(n^2+a^2)\pi\cos\pi n}=\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}.$$



$$\begin{aligned}
\int_{C_N} f &= 2\pi i\left(\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Res}(f,n)+\mathrm{Res}(f,ia)+\mathrm{Res}(f,-ia)\right)\\
&= 2\pi i\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}-\frac{\coth\pi a}{2a}-\frac{\coth\pi a}{2a}\right)\\
&= 2\pi i\left(\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}+\frac{1}{\pi a^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}-\frac{1}{a}\coth\pi a\right)\\
&= 2\pi i\left(2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}+\frac{1}{\pi a^2}-\frac{1}{a}\coth\pi a\right)
\end{aligned}$$

$$\left|\int_{C_N} f\right|\le\frac{4M(2N+1)}{N^2-a^2}\ \Rightarrow\ \lim_{N\to\infty}2\pi i\left(2\sum^{N}\frac{1}{\pi(n^2+a^2)}+\frac{1}{\pi a^2}-\frac{1}{a}\coth\pi a\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth\pi a-\frac{1}{2a^2}.$$

16. חשב את השארית של הפונקציה $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{\sin(z)-z}$ בקוטב $z=0$.

פיתרון: קל לראות ש־$z=0$ הוא אפס מסדר 2 של המונה ואפס מסדר 3 של המכנה ולכן $z=0$ הוא קוטב פשוט של $f(z)$. לכן נוכל להשתמש בנוסחה

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

לחישוב השארית של $f(z)$ בנקודה $z=0$ (תוך שימוש בכלל לופיטל)

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{z(e^z-1-z)}{\sin z-z} &= \lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1-z)+z(e^z-1)}{\cos(z)-1}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1+ze^z+e^z-1}{-\sin(z)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{3e^z+ze^z}{-\cos(z)}=-3
\end{aligned}$$

פיתרון שני:

דרך נוספת לפתור את הבעייה היא באמצעות טורי טיילור

$$\begin{aligned}
e^z-1-z &= \tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^4}{4!}\cdots\\
&= z^2\left(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{z}{3!}+\tfrac{z^2}{4!}\cdots\right)=z^2g(z)\\
\sin(z)-z &= -\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^5}{5!}-\tfrac{z^7}{7!}+\cdots\\
&= z^3\left(-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{z^2}{5!}-\tfrac{z^4}{7!}+\cdots\right)=z^3h(z)
\end{aligned}$$

ברור כי $g(0)\neq 0$,$h(0)\neq 0$, ולכן $z=0$ הוא קוטב פשוט של $f(z)=\frac{g(z)}{zh(z)}$. על פי נוסחת חישוב השארית

של קוטב פשוט

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0} z\frac{g(z)}{zh(z)}=\frac{g(0)}{h(0)}=\frac{\frac{1}{2!}}{-\frac{1}{3!}}=-3$$

17. מצא את הטור לורן סביב $z=-1$ של הפונקציה $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^5}$ בדרך הקצרה ככל האפשר.

רמז: $e^z=e^{-1}\cdot e^{z+1}$

תשובה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1}}{n!}(z+1)^n$

פיתרון: $f(z)=e^{-1}\cdot\frac{e^{z+1}}{(1+z)^3}$. יש להשתמש בטור הידוע $e^{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+1)^n$

18. **א.** מצא את הקטבים (כולל סדר) של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(e^z+e^{-z})^3}$.

ב. חשב את השארית של הפונקציה בכל אחד מהקטבים שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}$.

תשובה: **א.** $z=\frac{(2k+1)\pi i}{2}$, $z\in\mathbb{Z}$ **ב.** $\mathrm{Res}(f,z_1)=-\frac{i}{32}$ **ג.** $\frac{\pi}{16}$

פיתרון: **א.** הקטבים של $f(z)$ הם השורשים של המשוואה

$$e^z+e^{-z}=0$$

על ידי הכפלת שני האגפים ב־e^z נקבל $e^{2z}+1=0$, ולכן

$$e^{2z}=-1=e^{(2k+1)\pi i},\quad k\in\mathbb{Z}$$

ונקבל אינסוף קטבים: $z=\frac{(2k+1)\pi i}{2}$. אותנו יעניינו רק שני הקטבים הבאים: $z_1=\frac{\pi i}{2}$, $z_2=-\frac{\pi i}{2}$.

ב. נטפל בקוטב z_1 בלבד מאחר והוא רלבנטי לסעיף הבא. הטיפול בקוטב השני דומה. על פי טענה 5.27 יספיק למצוא מספר טבעי m כך שקיים הגבול $\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^m f(z)\neq 0$. לא קשה לנחש שהמספר $m=3$ יתאים. נשתמש בכלל לופיטל לחישוב הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3} &= \lim_{z\to z_1}\frac{3(z-z_1)^2}{3(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}\\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{6(z-z_1)}{6(e^z+e^{-z})(e^z-e^{-z})^2+3(e^z+e^{-z})^3}\\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{6}{6(e^z-e^{-z})^3+12(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})+9(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}\\ &= \frac{6}{6\cdot(\frac{i}{2}+\frac{i}{2})+0+0}=\frac{6}{12i}=-\frac{i}{2}\end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בשוויון $e^{z_1}+e^{-z_1}=0$ ובשוויון $e^{z_1}-e^{-z_1}=2i$.

קיבלנו שהפונקציה $\varphi(z)=(z-z_1)^3 f(z)$ מקיימת את תנאי טענה 5.27 ולכן

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{\varphi(2)(z)}{2!}$$

נחשב את $\varphi^{(2)}(z)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3}\right] &= \frac{d}{dz}\left[\frac{3(z-z_1)^2(e^z+e^{-z})^3-3(z-z_1)^3(e^z+e^{-z})^2(e^z-e^{-z})}{(e^z+e^{-z})^6}\right] \\
&= \frac{d}{dz}\left[\frac{3(z-z_1)^2}{(e^z+e^{-z})^3}-\frac{3(z-z_1)^3(e^z-e^{-z})}{(e^z+e^{-z})^4}\right] \\
&= \frac{3(z-z_1)}{(e^z+e^{-z})^3}\left[\frac{4(z-z_1)^2(e^z-e^{-z})^2}{(e^z+e^{-z})^2}-(z-z_1)^2-\frac{6(z-z_1)(e^z-e^{-z})}{e^z+e^{-z}}+2\right]
\end{aligned}$$

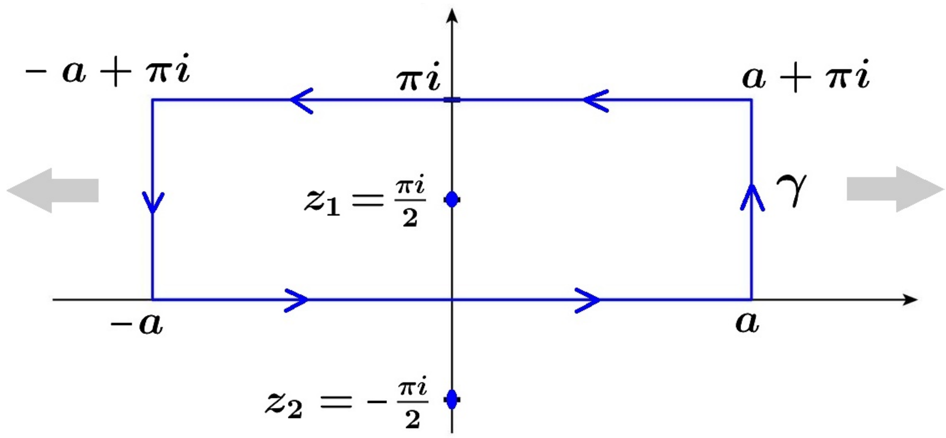
עם קצת טרחה אפשר לקבל

$$\lim_{z\to z_1}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-z_1)^3}{(e^z+e^{-z})^3}\right]=-\frac{i}{8}$$

ולכן

$$\text{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{\varphi(2)(z)}{2!}=-\frac{i}{16}$$

ג. נעשה שימוש במשפט השארית ובמסילה מלבנית γ המתוארת בשירטוט 2.



איור 2: מסילה מלבנית סביב הקוטב $z_1=\frac{\pi i}{2}$. כאשר a שואף לאינסוף מקבלים רצועה אינסופית בגובה π

יהי $a>0$ ממשי.

$$\gamma=[-a,a]+[a,a+\pi i]+[a+\pi i,-a+\pi i]+[-a+\pi i,-a]$$

נסמן את ארבעת האינטגרלים לאורך המסילה γ על ידי

$$I_1=\int_{-a}^{a}f(z)dz,\quad I_2=\int_{a}^{a+\pi i}f(z)dz,\quad I_3=\int_{a+\pi i}^{-a+\pi i}f(z)dz,\quad I_4=\int_{-a+\pi i}^{a}f(z)dz$$

לכן

$$\oint_\gamma f(z)dz=I_1+I_2+I_3+I_4=2\pi i\,\text{Res}(f,z_1)=2\pi i\cdot-\frac{i}{16}=\frac{\pi}{8}$$

נחשב מהו הערך של כל אינטגרל כאשר $a\to\infty$

$$I_1=\int_{-a}^{a}f(z)dz=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}\quad\xrightarrow[a\to\infty]{}\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}$$

האינטגרל לאורך הדופן הימנית של המלבן: $z = a + ti$, $t \in [0, \pi]$

$$I_2 = \int_a^{a+\pi i} \frac{dz}{(e^z + e^{-z})^3} = \int_a^{a+\pi i} \frac{dt}{(e^{a+ti} + e^{-a-ti})^3} = \int_a^{a+\pi i} \frac{dt}{(e^a e^{ti} + e^{-a} e^{-ti})^3}$$

על פי אי-שוויון המשולש

$$|e^a e^{ti} + e^{-a} e^{-ti}| \geq |e^a e^{ti}| - |e^{-a} e^{-ti}| = e^a - e^{-a}$$

ולכן

$$|I_2| \leq \int_a^{a+\pi i} \left| \frac{1}{(e^a e^{ti} + e^{-a} e^{-ti})^3} \right| dt \leq \int_a^{a+\pi i} \frac{1}{(e^a - e^{-a})^3} dt = \frac{a}{(e^a - e^{-a})^3} \xrightarrow[a \to \infty]{\text{לופיטל}} 0$$

באופן דומה נוכיח שגם האינטגרל לאורך הדופן השמאלית של המלבן שואף לאפס

$$|I_4| \leq \int_{-a+\pi i}^{-a} \left| \frac{1}{(e^{-a} e^{ti} + e^{a} e^{-ti})^3} \right| dt \leq \int_{-a}^{-a+\pi i} \frac{1}{(e^a - e^{-a})^3} dt = \frac{a}{(e^a - e^{-a})^3} \xrightarrow[a \to \infty]{\text{לופיטל}} 0$$

נשאר לבדוק את האינטגרל לאורך הדופן העליונה של המלבן: $z = t + \pi i$, $t \in [\pi, -\pi]$

$$I_3 = \int_{a+\pi i}^{-a+\pi i} \frac{dz}{(e^z + e^{-z})^3} = \int_a^{-a} \frac{dt}{(e^{t+\pi i} + e^{-t-\pi i})^3} = \int_a^{-a} \frac{dt}{(-e^t - e^{-t})^3} = \int_{-a}^{a} \frac{dt}{(e^t + e^{-t})^3} = I_1$$

לסיכום, קיבלנו כי

$$\frac{\pi}{8} = \lim_{a \to \infty} [I_1 + I_2 + I_3 + I_4] = \lim_{a \to \infty} 2 \int_{-a}^{a} \frac{dt}{(e^t + e^{-t})^3} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^t + e^{-t})^3}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^t + e^{-t})^3} = \frac{\pi}{16}$$

19. אם $f(z)$ פונקציה שלמה, ואם $|f(z)| \leq K|z|^n$ עבור K ממשי ו־n טבעי, אז $f(z)$ חייבת להיות פולינום.

פיתרון: לכל $r > 0$ ממשי נגדיר

$$M(r) = \text{Sup}\{|f(z)| \ : \ |z| = r\}$$

נשתמש באי-השוויון

$$|f^{(n+k)}(0)| \leq \frac{M(r) \cdot (n+k)!}{r^{n+k}}$$

על פי הנתון $M(r) \leq r^n$, ולכן

$$|f^{(n+k)}(0)| \leq \frac{r^n \cdot (n+k)!}{r^{n+k}} = \frac{(n+k)!}{r^k} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

יוצא שכל הנגזרות מסדר $n+1$ ומעלה של f בנקודה $z = 0$ מתאפסות ולכן הטור טיילור של f יוצא פולינום ממעלה n לכל היותר.

20. הוכחה חלופית למשפט ליוביל: על סמך התרגיל הקודם הראה שאם $f(z)$ פונקציה שלמה

וחסומה $|f(z)| \le M$ אז f קבועה.

פיתרון: שים לב שבפיתרון התרגיל הקודם, מקדמי הטור טיילור שמתאפסים הם a_m, $m > n$, כאשר n היא מעלת הפולינום!

21. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול $|z| < 2$. ידוע שלכל מספר טבעי n, $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n+1}$. חשב את $f(i)$.

פיתרון: קל למצוא קשר בין $\frac{n}{2n+1}$ ו־ $\frac{1}{n}$

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+1/n}$$

אם נגדיר $g(z) = \frac{1}{2+z}$, אז עבור כל מספר טבעי n

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2+1/n} = \frac{n}{2n+1}$$

על פי משפט היחידות $f(z) = g(z)$ ולכן $f(i) = g(i) = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5}$

22. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f'(z)| \le |z|$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. הוכח כי

$$f(z) = a + bz^2, \quad |b| \le \frac{1}{2}$$

23. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול היחידה $|z| \le 1$. הוכח שקיים מספר טבעי n כך ש־ $f(\frac{1}{n}) \ne \frac{1}{n+1}$.

פיתרון: $\frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}$. תהי $g(z) = \frac{z}{1+z}$. הוכח כי $f \equiv g$. מה קורה בנקודה $z = -1$?

24. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית וחסומה בתחום $D - \{z_0\}$. הוכח כי z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה. כלומר, ניתן להגדיר את f בנקודה z_0 כך ש־ f תהיה אנליטית בתחום D.

פיתרון: נניח כי $f(z)$ חסומה על ידי M בתחום $D - \{z_0\}$. יהי $R > 0$ כך שהדיסק הנקוב $0 < |z - z_0| < R$ כלול ב־ $D - \{z_0\}$. נבדוק את הטור לורן של f בדיסק הנקוב

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

יהי C_r מעגל סביב z_0 הכלול בדיסק הנקוב ($0 < r < R$). על פי משפט לורן

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$$

על פי תכונת ההערכה

$$\begin{aligned}|b_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)(z-z_0)^{n-1}dz\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\left|f(z)(z-z_0)^{n-1}\right|dz \\ &\le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot Mr^{n-1} \\ &= Mr^n\end{aligned}$$

כאשר r שואף לאפס נקבל כי $b_n = 0$ לכל n, ואנו נשארים עם טור טיילור בלבד. לכן אם נגדיר $f(z_0) = a_0$ נקבל פונקציה אנליטית.

25. אם $f(z)$ פונקציה אנליטית שלמה ואין לה גבול באינסוף, אז $z = 0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של הפונקציה $g(z) = f(\frac{1}{z})$.

פיתרון: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הטור טיילור של $f(z)$ סביב הנקודה $z = 0$. אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ הוא הטור לורן של $f(\frac{1}{z})$. אי-קיום גבול באינסוף גורר כי $f(z)$ אינה פולינום, ולכן אינסוף מקדמי a_n אינם מתאפסים. ההמשך ברור.

26. לכל $a \in \mathbb{C}$ נגדיר פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f_a(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(z) - z}{z^2}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$$

מצא את כל הערכים של a אשר עבורם f היא פונקציה אנליטית שלמה.

תשובה: $a = 0$

פיתרון: נשתמש בטור טיילור של $\sin z$

$$\sin(z) - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

לכן

$$\frac{\sin(z) - z}{z^2} = -\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \cdots$$

לכן $z = 0$ היא נקודה סינגולריות סליקה של הפונקציה $\frac{\sin(z)-z}{z^2}$, ולכן בהכרח $a = 0$.

27. אם $f(z)$, $g(z)$, פונקציות אנליטיות לא-קבועות בתחום D, ואם יש להם אותם אפסים (כולל ריבוי) אז קיימת המשכה אנליטית של הפונקציה $\frac{f(x)}{g(x)}$ בתחום D.

פיתרון:

3. Suppose f and g are analytic on a region U, with the same zeros and multiplicities of zeros.

a) Show that f/g is analytic and nowhere zero on U.

The only possible points of nonanalyticity or vanishing are at one of the common zeros of f and g. Suppose f and g vanish to order $m > 0$ at some point $a \in U$. Then $f(z) = (z-a)^m f_1(z)$ and $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$, where f_1 and g_1 are analytic on U and $f_1(a) \neq 0 \neq g_1(a)$. Hence $f/g = f_1/g_1$ is analytic nonvanishing at a.

b) Suppose $a \in U$, is a zero of f and g of multiplicity m. Show that

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(a)}{g^{(m)}(a)}.$$

Use only facts which we have proved in class. L'Hôpital's rule is not one of them.

The power series expansion of $f(z)$ is

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + [\text{ higher powers of } (z-a)\ ],$$

so $f_1(a) = f^{(m)}(a)/m!$. Likewise, $g_1(a) = g^{(m)}(a)/m!$. Hence

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{f^{(m)}(a)}{g^{(m)}(a)}.$$

28. חשב את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}}$.

תשובה: $\frac{8\pi i}{45}$

פיתרון: טור לורן של $e^{\frac{2}{z}}$ הוא

$$e^{\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{-n}$$

ולכן

$$z^5 e^{\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{-n+5}$$

לפונקציה $f(z) = z^5 e^{\frac{2}{z}}$ יש קוטב יחיד בנקודה $z=0$. השארית של f בנקודה $z=0$ מתקבלת עבור $n=6$:

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{2^6}{6!} = \frac{64}{720} = \frac{4}{45}$$

לכן

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z}} = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f,0) = \frac{8\pi i}{45}$$

29. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בטבעת הסגורה $1 \le |z| \le 2$ כך ש־ $|f(z)| \le 1$ על המעגל $|z|=1$, $|f(z)| \le 4$ על המעגל $|z|=2$. הוכח כי $|f(z)| \le |z|^2$ על כל הטבעת.

פיתרון: בדוק ש־ $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| \le 1$ ועשה שימוש בעיקרון המקסימום.

30. יהי $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + z^n$ פולינום ממעלה $n \ge 1$, אשר המקדם המוביל שלו הוא $a_n = 1$. הוכח כי $\mathrm{Max}_{|z|=1} |p(z)| \ge 1$.

הדרכה: הגדר $q(z) = z^n p(\frac{1}{z})$ והוכח כי $q(0) = 1$, $\mathrm{Max}_{|z|=1} |q(z)| = \mathrm{Max}_{|z|=1} |p(z)|$

פיתרון: קל לראות כי

$$\begin{aligned} q(z) &= z^n p\left(\tfrac{1}{z}\right) = z^n\left(a_0 + a_1\tfrac{1}{z} + a_2\tfrac{1}{z^2} + \cdots + \tfrac{1}{z^n}\right) \\ &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + 1 \end{aligned}$$

לכן $q(0) = 1$. על פי עקרון המקסימום,

$$M = \operatorname*{Max}_{|z|=1} |q(z)| \geq q(0) = 1$$

נבחין כי לכל $z = e^{it}$ על מעגל היחידה, גם $\frac{1}{z} = e^{-it}$ נמצא על מעגל היחידה. לכן עבור כל $z = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) על מעגל היחידה מתקיים השוויון

$$p(z) = z^{-n} q\left(\frac{1}{z}\right)$$

לכן

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} |p(z)| = \operatorname*{Max}_{|z|=1} \left|z^{-n} q\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq 2\pi} \left|e^{-int} q\left(e^{-it}\right)\right| = \operatorname*{Max}_{0\leq t\leq 2\pi} \left|q\left(e^{it}\right)\right| = M$$

הסתמכנו על העובדה כי $|e^{-it}| = 1$, $|e^{-int}| = 1$.

31. רדיוס ההתכנסות של הטור טיילור של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^8-1}$ סביב הנקודה $z_0 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ הוא

א. 1 **ב.** 2 **ג.** 3 **ד.** 4 **ה.** 5

פיתרון: ג.

32. מצא את המקדם של $(z+i)^{-3}$ בפיתוח לטור לורן (Laurent) של $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ סביב הנקודה $z_0 = -i$ בתחום $|z+i| > \sqrt{2}$.

תשובה: $a_{-3} = 0$

פיתרון: ראשית כל נרשום

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

נפתח את הטור לורן של כל אחד מהאיברים סביב $z_0 = -i$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z+i)-(1+i)} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{1-(1+i)\cdot\frac{1}{z+i}} \\ &= \frac{1}{z+i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+i)\cdot\frac{1}{z+i}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n \cdot (z+i)^{-n-1} \end{aligned}$$

תחום ההתכנסות של הטור הוא $\left|\frac{1+i}{z+i}\right| < 1$. כלומר $|z+i| > |1+i| = \sqrt{2}$. באופן דומה נמצא את הטור

לורן של האיבר השני

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{(z+i)+(1-i)} = \frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{1+(1-i)\cdot\frac{1}{z+i}}\\ &= \frac{1}{z+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[(1+i)\cdot\frac{1}{z+i}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+i)^n\cdot(z+i)^{-n-1}\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\Big[(1+i)^n-(-1)^n(1+i)^n\Big]\cdot(z+i)^{-n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\Big[(1+i)^{n-1}-(-1)^{n-1}(1+i)^{n-1}\Big]\cdot(z+i)^{-n}\end{aligned}$$

לכן

$$a_{-3} = \frac{1}{2}\Big[(1+i)^{n-1}-(-1)^{n-1}(1+i)^{n-1}\Big]\Big|_{n=3} = \frac{1}{2}\Big[(1+i)^2-(-1)^2(1+i)^2\Big] = 0$$

33. נביט בטור לורן (Laurent) של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2}$ בתחום $|z-1|>1$. מצא את המקדם של האיבר $(z-1)^{-2}$.

תשובה: $a_{-2}=6$

פיתרון:

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2} = z+\frac{3}{z-2} = z+\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = z+\frac{3}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^{-n}$$

לכן הטור לורן של $f(z)$ הוא

$$f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2} = z+\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot 2^{n-1}z^{-n}$$

לכן $a_{-2}=6$.

34. נכון או לא נכון: הנקודה $z=0$ היא נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)=\frac{1}{\sinh^2(\frac{1}{z})}$.

פיתרון: לא נכון.

$$f(z)=\frac{1}{\sinh^2(\frac{1}{z})}=\frac{2}{e^{\frac{1}{z}}-e^{-\frac{1}{z}}}$$

קל לבדוק כי $z_n=\frac{1}{2n\pi}$ היא סדרת נקודות סינגולריות שמתכנסת לנקודה $z_0=0$ אשר גם היא סינגולרית. לכן $z_0=0$ היא נקודה סינגולרית לא-מבודדת.

35. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות אנליטיות בתחום D, כך ש־$f(z)g(z)=0$ לכל $z\in D$. הוכח כי $f\equiv 0$ או $g\equiv 0$ (כלומר f זהותית אפס על D או g זהותית אפס על D).

פיתרון: נבחר סדרה מתכנסת $z_n\to z_0$, $z_n\neq z_0$, $z_n,z_0\in D$. אזי לכל n, $f(z_n)g(z_n)=0$. אחת מהפונקציות f או g חייבת להתאפס על אינסוף איברי הסדרה. נקבל תת־סדרה אינסופית שעליה מתאפסת אחת הפונקציות ולכן על פי משפט היחידות (5.20) היא זהותית אפס.

36. יהיו $f(z)$, $g(z)$ שתי פונקציות אנליטיות בתחום D, ותהי $\gamma:[a,b]\to D$ מסילה פשוטה וחלקה למקוטעין הכלולה יחד עם הפנים שלה בתוך D. ידוע כי לכל $t\in[a,b]$, $f(\gamma(t))=g(\gamma(t))$. הוכח כי $f(z)=g(z)$ על כל התחום D.

פיתרון: ניתן לפתור בשתי דרכים:
דרך 1: מנוסחת האינטגרל של קושי נובע כי $f(z)=g(z)$ לכל נקודה בפנים של γ ולכן על פי משפט היחידות $g\equiv f$ על כל D.
דרך 2: נסמן $t_n=a+\frac{1}{n}$, $z_n=\gamma(t_n)$. קיים m טבעי כך שהסדרה $\{t_n\}_{n=m}^{\infty}$ כלולה בקטע $[a,b]$. לכן $\{z_n\}_{n=m}^{\infty}$ היא סדרת נקודות על המסילה γ המתכנסת לנקודה $z_0=\gamma(a)$. על פי הנתון $f(z_n)=g(z_n)$ לכל $n\geq m$, $z_n\to z_0$, $z_n,z_0\in D$. לכן על פי משפט היחידות $g\equiv f$ על D.

37. נכון או לא-נכון: הפונקציה

$$f(z)=\begin{cases} z\sin\frac{2\pi}{z}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

אנליטית על כל המישור המרוכב $\mathbb{C}$.

תשובה: לא נכון

פיתרון: לא נכון. קל להוכיח כי הנגזרת בכיוון הציר המדומה שונה מנגזרת בכיוון הממשי באמצעות סדרות כגון $h_n=\frac{1}{n}$, $h_n=-\frac{i}{n+1/4}$.
נימוק נוסף: הנקודה $z=0$ היא אפס לא-מבודד של f ולכן אם f היתה אנליטית אז על פי משפט היחידות היתה צריכה להתאפס זהותית על כל המישור המרוכב. אבל היא אינה מתאפסת, לכן בהכרח אינה אנליטית בנקודה $z=0$.

38. אם הפולינום $p(z)$ מקיים $|p(z)|\leq 1$ מעל מעגל היחידה אז גם כל המקדמים שלו חסומים על ידי 1 בערך מוחלט.

פיתרון: הוכח את הטענה היותר כללית הבאה: אם פונקציה שלמה $|f(z)|\leq M$ על המעגל $|z|=r$ אז כל מקדמי הטור טיילור שלה סביב $z=0$ מקיימים $|a_n|\leq\frac{M}{r^n}$. כזכור $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$, עשה שימוש בלמת ההערכה בכדי לקבל את אי־השוויון הנדרש.

39. נכון או לא נכון: אם $f(z)$ פונקציה שלמה ומקיימת $|f(z)|\leq\sqrt{|z|}$ לכל $z\in\mathbb{C}$, אז בהכרח $f(z)$ מתאפסת זהותית על כל המישור המרוכב.

פיתרון: יהי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ הפיתוח של $f(z)$ לטור חזקות סביב הנקודה $z_0=1$. על פי נוסחת הנגזרת של קושי

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

כאשר γ_r הוא המעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית. נבצע הערכה של $|a_n$

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{|f(z)|dz}{|z|^{n+1}}\\ &\le \frac{1}{2\pi}\cdot \text{length}(\gamma_r)\cdot\frac{\text{Max}_{z\in\gamma_r}|f(z)|}{r^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{\text{Max}_{z\in\gamma_r}|f(z)|}{r^{n+1}}\\ &\le \frac{\text{Max}_{z\in\gamma_r}|\sqrt{z}|}{r^{n+1}} \le \frac{\sqrt{r}}{r^{n+1}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

קיבלנו שלכל $n \ge 1$, $a_n = 0$, ולכן $f(z) = a_0$. אבל אי-השוויון $\sqrt{|f(z)|} = \sqrt{|a_0|} \le \sqrt{|z|}$ גורר בהכרח $a_0 = 0$. לכן למעשה $f(z) \equiv 0$,

40. ערך האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ הוא

א. $\frac{\pi}{2}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$ **ג.** $\frac{\pi}{6}$ **ד.** $\frac{\pi}{12}$ **ה.** $\frac{\pi}{4}$

פיתרון: ג.

שימוש במשפט השארית על חצי מעגל עליון. יש שני קטבים פשוטים בחצי המישור העליון: $z = i, 2i$. האינטגרל על חצי המעגל העליון שואף לאפס על פי הערכה פשוטה של האינטגרל הקווי.

41. הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx = -\frac{\pi\sin(2)}{e}$

רמז: $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$

פיתרון: נחשב את

$$\oint_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}dz = \oint_{\gamma_R}\frac{\cos z}{z^2+4z+5}dz + i\oint_{\gamma_R}\frac{\sin z}{z^2+4z+5}dz$$

ברור שכאן $P(z) = 1$, $Q(z) = z^2+4z+5$ מקיימים את תנאי טענה 5.29. הקטבים של הפונקציה $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz}$ הם שורשי הפולינום z^2+4z+5

$$z_1, z_2 = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = -2+i, -2-i$$

יש לנו קוטב יחיד $z_1 = -2+i$ שנמצא בחצי העליון של המישור, ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx = 2\pi i\cdot\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},\ -2+i\right)$$

מדובר בקוטב פשוט, ולכן

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}, -2+i\right) &= \lim_{z\to -2+i} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}(z+2-i) \\
&= \lim_{z\to -2+i} \frac{e^{iz}}{z+2+i} \\
&= \frac{e^{-1-2i}}{2i} \\
&= \frac{e^{-1}\sin(-2)}{2} - \frac{ie^{-1}\cos(-2)}{2}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}dz &= 2\pi i \cdot \left[\frac{e^{-1}\sin(-2)}{2} - \frac{ie^{-1}\cos(-2)}{2}\right] \\
&= \frac{\pi\cos(2)}{e} - \frac{\pi\sin(2)}{e}i
\end{aligned}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx = -\frac{\pi\sin(2)}{e}$$

.42 האיבר השלישי $(n=-3)$ בטור החזקות השליליות של $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ סביב הנקודה $z=-2$ הוא

א. $\frac{\pi}{5}$ **ב.** $\frac{5}{6}$ **ג.** $\frac{\pi}{6}$ **ד.** $\frac{7}{12}$ **ה.** $\frac{2}{3}$

תשובה: ב.

פיתרון: ב.

נציב $w=z+2$ ונקבל

$$\begin{aligned}
(z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (w-5)\sin\frac{1}{w} \\
&= (w-5)\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{3!w^3} + \frac{1}{5!w^5} - \frac{1}{7!w^7} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{5}{w} - \frac{1}{3!w^2} + \frac{5}{3!w^3} + \frac{1}{5!w^4} - \frac{5}{5!w^5} + \cdots \\
&= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \frac{5}{120(z+2)^5} + \cdots
\end{aligned}$$

.43 הערך של האינטגרל $\oint_\gamma \frac{e^z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ כאשר γ היא המעגל $|z|=4$ בכיוון חיובי הוא

א. $\frac{\pi}{4+i}$ **ב.** $\frac{4+i}{\pi}$ **ג.** $\frac{\pi}{4i}$ **ד.** $\frac{i}{\pi}$ **ה.** $\frac{\pi-i}{\pi+i}$

תשובה: ד.

פיתרון: ד.

The poles of $\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} = \dfrac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}$ are at $z = \pm\pi i$ inside C and are both of order two.

Residue at $z = \pi i$ is $\displaystyle\lim_{z\to\pi i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-\pi i)^2 \frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\} = \frac{\pi+i}{4\pi^3}$.

Residue at $z = -\pi i$ is $\displaystyle\lim_{z\to-\pi i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+\pi i)^2 \frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\} = \frac{\pi-i}{4\pi^3}$.

Then $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz = 2\pi i \text{ (sum of residues)} = 2\pi i\left(\frac{\pi+i}{4\pi^3}+\frac{\pi-i}{4\pi^3}\right) = \frac{i}{\pi}$.

44. הערך של האינטגרל $\displaystyle\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac12)(z+2)}$ הוא

א. $-\frac{\pi}{6}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$ **ג.** π **ד.** $\frac{\pi}{4}$ **ה.** $\frac{i\pi}{3}$

תשובה: ג.

פיתרון: נסמן $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2)}$. יש להשתמש במשפט השארית. יש לנו שני קטבים בתוך העיגול $|z|=1$: $z_0=0$, קוטב מסדר 2, ו־ $z_1=-\frac12$, קוטב פשוט:

$$\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac12)(z+2)} = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-\frac12)\right]$$

נסמן

$$\varphi(z)=z^2f(z)=\frac{z^4-2z^2+1}{z^2+\frac52z+1}$$

אזי

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to0}\frac{\varphi'(z)}{1!}=\frac{(-2z-5/2)(z^4-2z^2+1)}{(z^2+5/2z+1)^2}+\frac{4z^3-4z}{z^2+5/2z+1}\Big|_{z=0}=-\frac52$$

הקוטב $z_1=-\frac12$ הוא קוטב פשוט ולכן

$$\mathrm{Res}(f,-\frac12)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2)}\Big|_{z=-\frac12}=\frac{9/16}{1/4\cdot3/2}=3/2$$

לכן

$$\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(z+\frac12)(z+2)}=\frac{i}{2}\cdot2\pi i\left(-\frac52+\frac32\right)=\pi$$

45. חשב את האינטגרלים

א. $\oint_{|z|=1}\sin\frac1z dz$ **ב.** $\oint_{|z|=1}\sin^2\frac1z dz$

תשובה: א. $2\pi i$ ב. 0

פיתרון:

Since
$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots,$$
we have $\mathrm{Res}[\sin(z^{-1}), 0] = 1$, so
$$\int_\gamma \sin(z^{-1})\, dz = 2\pi i.$$

b) $\int_\gamma \sin^2(z^{-1})\, dz$.

The quick answer is that the integral is zero, since the integrand is even, hence has no odd powers in its Laurent expansion, so its residue at 0 is zero.

To see this explicitly, use the identity
$$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2},$$
which we know holds for real z, hence for all $z \in \mathbb{C}$ since both sides are entire functions. This gives the power series
$$\sin^2 z = \frac{1}{2}\left[1 - 1 + \frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^4}{4!} + \frac{(2z)^6}{6!} - + \cdots\right],$$
which gives the Laurent expansion
$$\sin^2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{2!z^2} - \frac{2^3}{4!z^4} + \frac{2^5}{6!z^6} - + \cdots.$$
in which the coefficient of $1/z$ is zero.

46. הערך של האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3\pi x)}{x^2+3}dx$ הוא

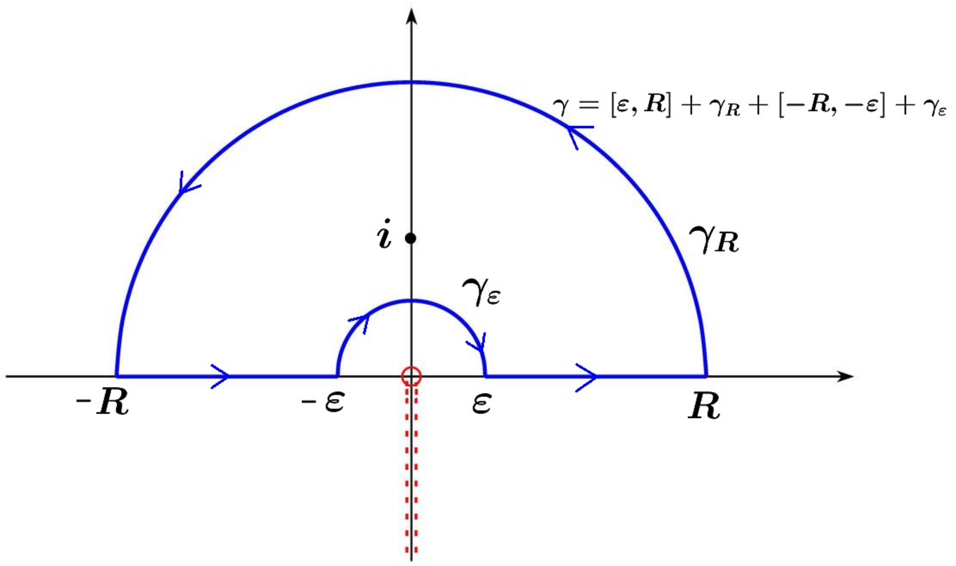
א. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{3\pi\sqrt{3}}$ **ב.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\pi\sqrt{3}}$ **ג.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{3\pi}$ **ד.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-3\pi}$ **ה.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{3}}$

תשובה: ב.

פיתרון:

Here, you use the residue theorem. The region is bounded by the upper half circle of radius R centered at the origin and the x-axis from $-R$ to R; we trace this combined curve counterclockwise, as usual. Then we integrate the function $f(z) = \frac{exp(3\pi i z)}{z^2+3}$ over our curve, the answer is $2\pi i Res|_{i\sqrt{3}}(f(z))$. The latter gives $\frac{\pi}{\sqrt{3}}exp(-3\pi\sqrt{3})$. Let R go to ∞, then the integral over the upper semi-circle goes to 0 and the rest to the sum of our required integral and i times a similar integral with $sin(3\pi x)$. This latter integral is, of course, zero; the answer is b) above.

47. הוכח כי
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0, \qquad \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}$$
על ידי שימוש במסילה הנתונה בתרשים הבא



איור 3: המסילה γ עוקפת את הנקודה הסינגולרית $z = 0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

פיתרון: נציג הוכחה מתימטית של האינטגרל הראשון ללא שימוש בפונקציות מרוכבות,

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

נפתור את האינטגרל השני על ידי ההצבה $x = \frac{1}{t}$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_1^0 \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

לכן

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

נגדיר פונקציה מרוכבת

$$f(z) = \frac{\log^2(z)}{1+z^2}$$

כאשר $\log(z)$ מבוסס על הענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (אשר החריץ שלו, המצויר בצבע אדום בתרשים 3, אינו נחתך עם המסילה γ). נניח כי $R > 1$, $\varepsilon < 1$ ולכן הקוטב הפשוט $z = i$ של $f(z)$ נמצא בתוך המסילה γ. על פי משפט השארית

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \\
&= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i \cdot \frac{\log^2(z)}{z+i}\Big|_{z=i} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{\log^2(i)}{2i} = 2\pi i \cdot \frac{(\pi i/2)^2}{2i} = -\frac{\pi^3}{4}
\end{aligned}$$

נעריך את הגודל של כל אחד מארבעת האינטגרלים

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{|z|^2-1} \le \pi R \cdot \frac{R^{\frac{1}{2}}}{R^2-1} = \frac{\pi R^{\frac{3}{2}}}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

באופן דומה האינטגרל על המעגל הקטן ישאף לאפס כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{[\ln|z| + i\arg(z)]^2}{1+z^2}dz\right| \le \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|\ln|z| + i\arg(z)|^2}{|1+z^2|}dz \\ &\le \pi\varepsilon \cdot \frac{(\ln\varepsilon + 2\pi)^2}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\end{aligned}$$

נותרו שני האינטגרלים על הקטעים הממשיים

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\ln(-x) + i\pi]^2}{1+x^2}dx = \int_\varepsilon^R \frac{[\ln x + i\pi]^2}{1+x^2}dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x + 2\pi i \ln x - \pi^2}{1+x^2}dx \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \pi^2\int_\varepsilon^R \frac{1}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

לסיכם קיבלנו שכאשר $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= 2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx - \pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx + 2\pi\cdot 0 - \pi^2\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3}{4}\end{aligned}$$

לכן

$$2\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = -\frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{4}$$

ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^3}{8}$$

48. הערך של האינטגרל $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{5+4\cos\theta}d\theta$ הוא

א. $\frac{\pi}{3}$ **ב.** $\frac{\pi}{6}$ **ג.** $\frac{2\pi}{3}$ **ד.** $\frac{-4\pi}{3}$ **ה.** $\frac{\pi}{4}$

תשובה: $\frac{\pi}{3}$

פיתרון: א.

מהזוגיות של $\cos\theta$ נובע

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}\\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}\cdot\frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{5+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}}\\
&= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{5+2z+2z^{-1}}\\
&= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}\\
&= \frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})},\,-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

49. חשב את ערך האינטגרל $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

תשובה: $\sqrt{2}\pi$

50. חשב את ערך האינטגרל $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

תשובה: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

פיתרון: נשתמש בהצבה הסטנדרטית $z=e^{i\theta}$ (ולכן $dz=ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta=\frac{dz}{ie^{i\theta}}=\frac{dz}{iz}$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta} &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2+\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2id\theta}{4i+e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2idz}{iz(4i+z-\frac{1}{z})}=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dz}{z^2+4iz-1}\\
&= 2\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}
\end{aligned}$$

כאשר z_1, z_2 הם השורשים של המשוואה הריבועית $z^2+4iz-1=0$

$$z_1=(-2+\sqrt{3})i,\qquad z_2=(-2-\sqrt{3})i$$

קל לבדוק שהקוטב הפשוט z_1 נמצא בתוך המעגל $|z|=1$, אבל הקוטב z_2 לא שייך. לכן על פי משפט

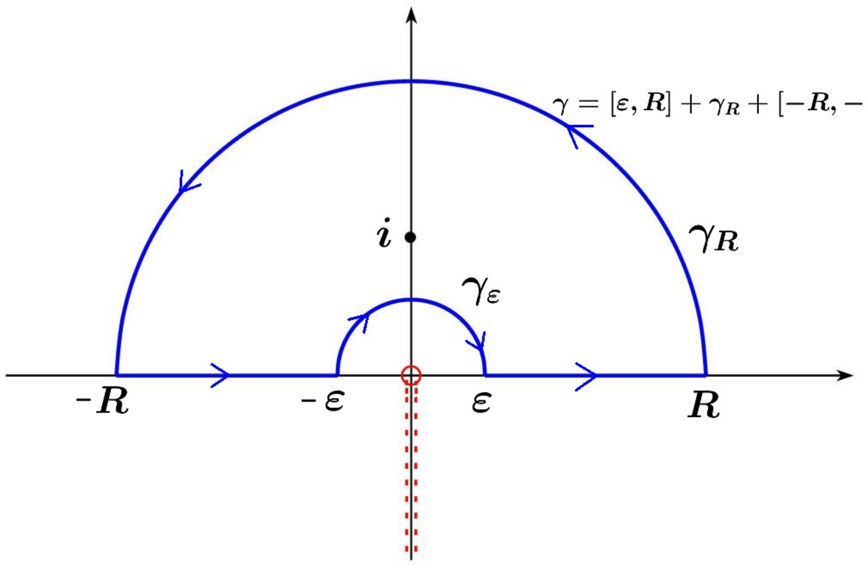
השארית

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right)$$
$$= 4\pi i \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} = 4\pi i \cdot \frac{1}{(-2+\sqrt{3})i - (-2-\sqrt{3})i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

.51 הוכיחו כי לכל $0 < a < 2$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$$

הדרכה: יש לבחור ענף מתאים לפונקציה הרב-ערכית $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z^2}$ ולקחת את המסילה שבתרשים 4.
מומלץ לקרוא קודם את הפיתרון של שאלה 47!



איור 4: המסילה γ עוקפת את הנקודה הסינגולרית $z = 0$ ואת החריץ המתאים לענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

פיתרון: נגדיר פונקציה מרוכבת

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z^2}$$

כאשר פונקציית הלוגריתם בביטוי $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ מבוססת על הענף $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (אשר החריץ שלו, המצויר בצבע אדום בתרשים 4, אינו נחתך עם המסילה γ). נניח כי $R > 1$, $\varepsilon < 1$ ולכן הקוטב הפשוט $z = i$ של $f(z)$ נמצא בתוך המסילה γ. על פי משפט השארית

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{z^{a-1}}{z+i}\Big|_{z=i}$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{(2i)^{a-1}}{2i} = \pi e^{(a-1)\log(2i)} = \pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}$$

נעריך את הגודל של כל אחד מארבעת האינטגרלים

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^2-1} \le \pi R \cdot \frac{R^{a-1}}{R^2-1} = \frac{\pi R^a}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

באופן דומה האינטגרל על המעגל הקטן ישאף לאפס כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz\right| = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{a-1}}{|1+z^2|}dz \le \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon^2}dz$$

$$\le \pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon^2} = \frac{\pi\varepsilon^a}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

נותרו שני האינטגרלים על הקטעים הממשיים

$$\int_{[\varepsilon,R]} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{(a-1)(\ln(-x)+i\pi)}}{1+x^2}dx = \int_\varepsilon^R \frac{e^{(a-1)(\ln(x)+i\pi)}}{1+x^2}dx$$

$$= \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}\cdot e^{(a-1)\pi i}}{1+x^2}dx = e^{(a-1)\pi i}\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx$$

לסיכם קיבלנו שכאשר $R\to\infty$,$\varepsilon \to 0$,

$$\oint_\gamma \frac{z^{a-1}}{1+z^2}dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx + e^{(a-1)\pi i}\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx$$

$$= \left(1+e^{(a-1)\pi i}\right)\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx = \pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}$$

לכן

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx = \frac{\pi e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}}{1+e^{(a-1)\pi i}} = \frac{\pi}{e^{\frac{-(a-1)\pi i}{2}}+e^{\frac{(a-1)\pi i}{2}}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{(a-1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}$$

.52 תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ורציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$, ותהי

$$g(x) = f(2x+1)\cos 3x$$

אזי $\hat{g}(\omega)$ שווה ל-

א. $\frac{1}{2}\left[\hat{f}(2\omega+1)+\hat{f}(2\omega-1)\right]$

ב. $\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega}{2}}\hat{f}(\frac{\omega}{2})$

ג. $\frac{1}{4}\left[e^{\frac{i(\omega+3)}{2}}\hat{f}(\frac{\omega+3}{2})+e^{\frac{i(\omega-3)}{2}}\hat{f}(\frac{\omega-3}{2})\right]$

ד. $\frac{1}{6}\left[e^{\frac{i(\omega+1)}{3}}\hat{f}(\omega+3)+e^{-\frac{i(\omega+1)}{3}}\hat{f}(\omega-3)\right]$

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות

.53 עבור כל מספר ממשי x, חשב את הערך של האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

ב. חשב את ערך האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega$

רמז: העזר בהתמרת פוריה של $f(x)=e^{-|x|}$.

תשובה: **א.** $\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ **ב.** $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{4}$

פיתרון: בדוגמה קודמת ראינו שההתמרת פוריה של $f(x)=e^{-|x|}$ היא

$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

א. ברור כי שתי הפונקציות האלה נמצאות במרחב $G(\mathbb{R})$, רציפות, וגזירות ברציפות. לכן מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל כי

$$\begin{aligned}
e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}\,d\omega\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}[\cos\omega x+i\sin\omega x]\,d\omega\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega
\end{aligned}$$

החלק המדומה מתאפס בגלל ש־ $e^{-|x|}$ היא פונקציה ממשית (או בגלל ש־ $\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}$ היא פונקציה אי-זוגית). לכן נקבל את הנוסחה

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=e^{-|x|}$$

ולכן

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

ב. מנוסחת פלנשראל נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-|x|}\right)^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\right]^2 d\omega$$

מכיוון ש־ $\left(e^{-|x|}\right)^2=e^{-2|x|}$ ו־

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|x|}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2\pi}$$

הרי ש־

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega=\frac{\pi}{4}$$

54. לכל מספר ממשי $a>0$ נגדיר את הפונקציה

$$f_a(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{a}, & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$$

א. חשב את ההתמרת פוריה של $f_a(x)$.

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx$

תשובה: **א.** $\widehat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{1-\cos\omega a}{\pi a\omega^2}, & \omega\neq 0\\ \frac{a}{2\pi}, & \omega=0\end{cases}$ **ב.** $\frac{\pi}{3}$

פיתרון: **א.** מתוך החוברת של בוריס פענן (טורי פורייה והתמרות אינטגרליות):

הפונקציה $f_a(x)$ היא פונקציה זוגית, ולכן התמרת פורייה שלה נתונה לפי הנוסחה

$$\hat{f}_a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f_a(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)\cos\omega x\,dx.$$

אם $\omega=0$, אז

$$\hat{f}_a(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=-\frac{a}{2\pi}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\Big|_0^a=\frac{a}{2\pi},$$

ואם $\omega\neq 0$, אז

$$\hat{f}_a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^a$$

$$+\frac{1}{\pi a\omega}\int_0^a\sin\omega x\,dx=-\frac{1}{\pi a\omega^2}\cos\omega x\Big|_0^a=\frac{1-\cos\omega a}{\pi a\omega^2}.$$

בסך הכל נקבל

$$\hat{f}_a(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\omega a}{\pi a\omega^2}, & \omega\neq 0\\[2mm] \dfrac{a}{2\pi}, & \omega=0.\end{cases}$$

הערה: מספיק לעשות את המקרה $\omega\neq 0$ ולקבל $\hat{f}(0)=\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)$ על סמך תכונת הרציפות של $\hat{f}$.

ב. נתבונן במקרה $a=2$

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{2}, & |x|<2\\ 0, & |x|\geq 2\end{cases}$$

ההתמרת פורייה של $f(x)$ היא

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2\omega}{2\pi\omega^2}, & \omega\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

על סמך משפט 6.2 ההתמרת פורייה $\hat{f}(\omega)$ רציפה ולכן הנקודה $\omega=0$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של הפונקציה $\frac{1-\cos 2\omega}{2\pi\omega^2}$. מהזהות $1-\cos 2\omega=2\sin^2\omega$ נקבל

$$\hat{f}(\omega)=\frac{\sin^2\omega}{\pi\omega^2}$$

על פי נוסחת פלאנשרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\omega}{\pi\omega^2}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^2\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^2=-\frac{2}{3\pi}\left(1-\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=2}=\frac{2}{3\pi}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\omega}{\pi\omega^2}\right)^2=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin^4\omega}{\omega^4}\right)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin^4\omega}{\omega^4}\right)=\frac{2}{3\pi}$$

לכן

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin^4 \omega}{\omega^4}\right) = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{\pi}{3}$$

.55 חשב את ההתמרת פוריה של $f(x) = |x|e^{-|x|}$

תשובה: $\frac{1-\omega^2}{\pi(1+\omega^2)^2}$

פיתרון:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} (xe^{-x})e^{-i\omega x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} (-xe^{x})e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} xe^{-(1+i\omega)x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} xe^{(1-i\omega)x}dx
\end{aligned}$$

על ידי שימוש באינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{xe^{-(1+i\omega)x}}{2\pi(1+i\omega)}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{2\pi(1+i\omega)}\int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx \\
&\quad - \frac{xe^{(1-i\omega)x}}{2\pi(1-i\omega)}\Big|_{x=-\infty}^{x=0} + \frac{1}{2\pi(1-i\omega)}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi(1+i\omega)^2} + \frac{1}{2\pi(1-i\omega)^2} \\
&= \frac{1-\omega^2}{\pi(1+\omega^2)^2}
\end{aligned}$$

.56 יהי $a > 0$ קבוע ממשי. חשב את ההתמרת פורייה של כל אחת מהפונקציות הבאות

א. $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ **ב.** $f(x) = \frac{\cos ax}{a^2+x^2}$ **ג.** $f(x) = \frac{\sin ax}{a^2+x^2}$

תשובה: **א.** $\frac{e^{-a|\omega|}}{2a}$ **ב.** $\frac{e^{-a|\omega+a|}+e^{-a|\omega-a|}}{4a}$ **ג.** $\frac{e^{-a|\omega-b|}+e^{-a|\omega+b|}}{4a}$ (מודולציה)

.57 הוכח שאם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ רציפה, $f \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$, f' רציפה למקוטעין, $\widehat{f} \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$, אז

$$\boxed{\widehat{\widehat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)}$$

פיתרון:

התמרת פורייה הפוכה בנקודה $-x$:

התמרת פורייה בהיפוך משתנים ($\omega \leftrightarrow x$):

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega\cdot(-x)} d\omega \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-ix\omega} d\omega \\ &= 2\pi \widehat{\widehat{f}}(x) \end{aligned}$$

יש להבחין שבשלב האחרון חל היפוך תפקידים: x מציין תדר ו־ω מציין זמן. לפעמים רושמים את התוצאה הזו גם כך:

$$\boxed{f(-x) = 2\pi \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x)}$$

58. א. חשב את ההתמרות פורייה של $\frac{1}{x^2+a^2}$

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

הדרכה: ראה תרגיל 57, פלאנשרל מוכלל

תשובה: **א.** $\frac{1}{2a} e^{-a|x|}$ **ב.** $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$

פיתרון: בהרצאה ראינו שהתמרת פורייה של $f(x) = e^{-a|x|}$ היא

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}$$

א. על פי תרגיל 57

$$\mathcal{F}\left[\frac{a}{\pi(\omega^2+a^2)}\right]_x = \frac{1}{2\pi} f(-x) = \frac{1}{2\pi} e^{-a|x|}$$

לכן

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$$

ב. נשתמש בשוויון פלאנשרל מוכלל

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} \cdot \frac{1}{x^2+b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|} \frac{1}{2b} e^{-b|\omega|} = \frac{1}{2ab} \int_0^\infty e^{-(a+b)} d\omega = \frac{1}{2ab(a+b)}$$

לכן

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

59. נכון או לא נכון: קיימת פונקציה רציפה ואי־זוגית $f \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$ כך ש־

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \begin{cases} 1-\omega, & |\omega| \le 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

פיתרון: לא נכון. זוהי התמרת פורייה, לכן על פי משפט 6.2 צריכה להיות רציפה. אבל היא אינה רציפה! בנוסף לזאת היא צריכה להיות אי־זוגית אך היא זוגית!

60. תהי $f(x)=e^{-x^2}$. חשב את $f*f$.

תשובה: $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

פיתרון: בדוגמה קודמת חישבנו את ההתמרת פורייה של $f(x)$

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

לכן על פי משפט הקונבולוציה

$$\widehat{f*f}\,(\omega)=2\pi\cdot\hat{f}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega)=2\pi\cdot\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

לכן

$$(f*f)(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}\right]$$

על פי נוסחת ההזזה

$$\mathcal{F}[c\cdot g(ax)](\omega)=\frac{c}{|a|}\,\hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

יש למצוא קבועים c, a, כך ש־

$$\mathcal{F}\left[c\cdot e^{-(ax)^2}\right](\omega)=\frac{c}{|a|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(\omega/a)^2}{4}}=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

כלומר

$$\frac{c}{2|a|\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2},\qquad -\frac{(\omega/a)^2}{4}=-\frac{\omega^2}{2}$$

קל לקבל

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad c=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

לכן

$$f*f=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}\right]=ce^{-(ax)^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

61. מצא את הפיתרון של המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

תשובה: $f(x)=\pm\sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2}$

פיתרון: נניח כי $f\in G(\mathbb{R})$. רואים מייד כי האינטגרל שבאגף שמאל הוא למעשה הקונבולוציה של f עם עצמה

$$(f*f)(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

על פי משפט הקונבולוציה

$$\widehat{f*f}\,(\omega)=\hat{f}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega)=[\hat{f}(\omega)]^2=\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\omega)$$

בהרצאה חישבנו את ההתמרת פורייה של הגאוסיאן e^{-x^2}

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\tag{1}$$

על סמך נוסחת ההזזה

$$\boxed{\mathcal{F}[f(ax)](\omega)=\frac{1}{|a|}\,\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

אם נקח $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-(ax)^2}\right] &= \mathcal{F}\left[e^{-(x/\sqrt{2})^2}\right]=\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right]\\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{2}\omega)^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\end{aligned}$$

לכן

$$\widehat{f}(\omega)=\pm\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

על סמך שוויון (1) קל לקבל את שני הפיתרונות

$$f(x)=\pm\sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2}$$

.62 פתור את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=\frac{1}{x^2+1}$$

תשובה: $f(x)=\pm\frac{2}{\sqrt{\pi}(4x^2+1)}$

פיתרון: בדומה לפיתרון תרגיל 61 גם כאן נוכל לרשום

$$(f*f)(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

לאחר הפעלת התמרת פורייה על שני האגפים נקבל

$$2\pi\left[\widehat{f}(w)\right]^2=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$$

את ההתמרת פורייה של $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ חישבנו בתרגיל 58. לכן

$$\widehat{f}(\omega)=\pm\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-|\frac{\omega}{2}|}$$

על ידי שימוש בנוסחת ההזזה

$$\boxed{\mathcal{F}[g(ax)](\omega)=\frac{1}{|a|}\,\widehat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

נקבל

$$f(x)=\pm\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}=\pm\frac{2}{\sqrt{\pi}(4x^2+1)}$$

63. נכון או לא נכון: תהי

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

ותהי $g=f*f$. אזי $\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)d\omega=\frac{4}{3}$, כאשר $\hat{g}$ היא ההתמרת פורייה של g.

תשובה: נכון

פיתרון: נכון.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f*f](\omega)\,d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{f}(\omega)\,d\omega\\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})^2dx\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=x-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

64. לכל ממשי $a>0$ נגדיר את הפונקציה

$$\chi_a(x)=\begin{cases}1, & |x|\le a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

א. חשבו את ההתמרת פורייה של $g(x)=\chi_a*\chi_b$, עבור כל שני ממשיים $0<a<b$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 5x\cdot\sin^2 2x}{x^4}$.

תשובה: **א.** $\widehat{g}(\omega)=\begin{cases}\frac{2\sin(\omega a)\cdot\sin(\omega b)}{\pi\omega^2}, & \omega\ne 0\\ \frac{2ab}{\pi}, & \omega=0\end{cases}$ **ב.** π

פיתרון: **א.** על ידי שימוש ישיר בהגדרת התמרת פורייה קל לקבל

$$\widehat{\chi}_a(\omega)=\begin{cases}\frac{\sin(\omega a)}{\omega\pi}, & \omega\ne 0\\ \frac{a}{\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

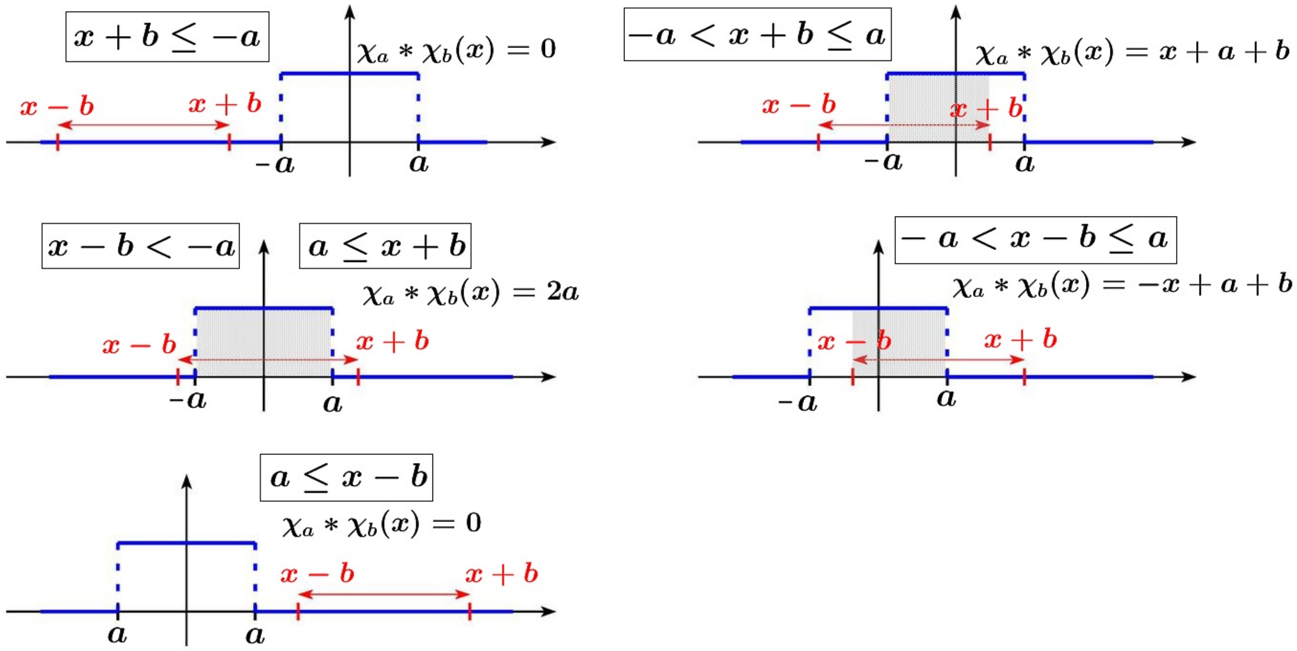
ממשפט הקונבולוציה נקבל

$$\widehat{g}(\omega)=2\pi\cdot\widehat{\chi}_a(\omega)\cdot\widehat{\chi}_b(\omega)=\begin{cases}2\pi\cdot\frac{\sin(\omega a)}{\omega\pi}\cdot\frac{\sin(\omega b)}{\omega\pi}, & \omega\ne 0\\ 2\pi\cdot\frac{a}{\pi}\cdot\frac{b}{\pi}, & \omega=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sin(\omega a)\cdot\sin(\omega b)}{\pi\omega^2}, & \omega\ne 0\\ \frac{2ab}{\pi}, & \omega=0\end{cases}$$

ב. נחשב את הקונבולוציה $\chi_a*\chi_b$ על פי ההגדרה

$$(\chi_a*\chi_b)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_a(x-y)\chi_b(y)dy=\int_{-b}^{b}\chi_a(x-y)\cdot 1\,dy=\int_{x-b}^{x+b}\chi_a(t)\,dt$$

בשלב האחרון ביצענו הצבה $t = x - y$ ולכן גבולות האינטגרציה הוזזו בהתאם. נשתמש בתרשים 5 בכדי לחשב את האינטגרל האחרון



איור 5: חישוב גרפי של הקונבולוציה $(\chi_a * \chi_b)(x)$

ניתן לתמצת את חמשת המצבים השונים המוצגים בתרשים באמצעות שלושה מקרים

$$(\chi_a * \chi_b)(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a+b \\ a+b-|x|, & b-a \leq |x| < a+b \\ 2a, & |x| < b-a \end{cases}$$

(אפשר גם להגדיר באמצעות חמישה מקרים אם התימצות לשלושה מקרים לא ברור)

ב. נגדיר $g = \chi_2 * \chi_5$. אזי על פי התוצאה הקודמת נקבל

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 7 \\ 7-|x|, & 3 \leq |x| < 7 \\ 4, & |x| < 3 \end{cases}$$

ברור כי g אינטגרבילית בריבוע (כלומר שייכת למרחב $L^2(\mathbb{R})$) ורציפה למקוטעין ב־$\mathbb{R}$. לכן

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{2\sin(2\omega)\sin(5\omega)}{\pi\omega^2}$$

על פי משפט ההתמרה ההפוכה

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(2\omega)\sin(5\omega)}{\pi\omega^2} e^{i\omega x} d\omega$$

לכן עבור $x = 0$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(2\omega)\sin(5\omega)}{\pi\omega^2} d\omega = 4$$

ונקבל

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2\omega)\sin(5\omega)}{\omega^2}d\omega = \pi$$

במעבר למשתנה x נקבל

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x)\sin(5x)}{x^2}dx = \pi$$

.65 חשב את התמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t}\cos 2t$ **ב.** $e^{-4t}\cosh 2t$

ג. $t^n \sin t$ **ד.** $\dfrac{1}{(t-a)(t-b)}$

ה. $e^{-2t}\cos^2 3t - 3t^2 e^{3t}$ **ו.** $\dfrac{5}{(t+2)^2+9}$

תשובה: **א.** $\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ **ב.** $\frac{s+4}{(s+4)^2-4}$ **ג.** $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$
ה. $\frac{1}{2(s+2)} + \frac{s+2}{2(s^2+4s+40)} - \frac{6}{(s-3)^3}$

.66 מצא את ההתמרת לפלס של $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$.

.67 על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ **ב.** $\displaystyle\int_0^\infty t^3 e^{-t}\sin t\,dt$

ג. $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-x}dx$ **ד.** $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-3x}dx$

תשובה: **א.** $\frac{3}{25}$ **ב.** 0 **ג.** 24 **ד.** $\frac{80}{243}$

.68 חשב את התמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $\dfrac{3s-14}{s^2-4s+18}$ **ב.** $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

ג. $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$ **ד.** $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

ה. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ **ו.** $\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

ז. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ **ח.** $\dfrac{s^3}{s^4-16}$

ט. $\dfrac{1}{s^4+1}$

תשובה: **א.** $\frac{\sqrt{14}}{14}(-8\sin\sqrt{14}t + 3\sqrt{14}\cos\sqrt{14} * te^{2t})$ **ב.** $t-\sin t$ **ג.** $(e^t-1)e^t$
ד. $\frac{1}{4}(2t\cos 2t + \sin 2t)$ **ה.** $t\sin 2t$ **ו.** רמז: $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]$ **ז.** $\frac{1}{16}(-2t\cos 2t + \sin 2t)$
ח. $\frac{1}{4}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right) + \cos 2t$ **ט.** $\frac{\sqrt{2}t}{4}\left(e^{\sqrt{2}t}\sin\frac{\sqrt{2}t}{2} - e^{\sqrt{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}t}{2} + \sin\frac{\sqrt{2}t}{2} + \cos\frac{\sqrt{2}t}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}}\right)$

69. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''+3y'-4y=0, \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=-2$

ב. $y''-y=0, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=-1$

ג. $y''+4y'+4y=0, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

ד. $y''+4y=0, \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=1$

ה. $y''+4y'+7y=0, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=1$

ו. $ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

תשובה: **א.** $2e^{t}+e^{-4t}$ **ב.** e^{-t} **ג.** $(t+1)e^{-2t}$ **ד.** $\frac{\sin(2t)}{2}+2\cos 2t$
ה. $(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)+\cos(\sqrt{3}t))e^{-2t}$ **ו.** $-\frac{\sin t}{t}$

70. מצא פתרון פרטי למשוואה הדיפרנציאלית הבאה בקטע $[0,\infty)$, המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים

$$\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+7y(t)=u_1(t) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

כאשר $u_1(t)$ היא פונקציית הביסייד.

תשובה:

$$y(t)=e^{-2t}\left[\cos\sqrt{3}t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right]-\frac{e^{-2(t-1)}}{7}\left[\cos\sqrt{3}(t-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-1)\right]+\frac{1}{7}u_1(t)$$

פיתרון:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[y''(t)+4y'(t)+7y(t)\right] &= \mathscr{L}\left[y''(t)\right]+4\mathscr{L}\left[y'(t)\right]+7\mathscr{L}\left[y(t)\right] \\
&= s^2\mathscr{L}\left[y(t)\right]-sy(0)-y'(0)+4[s\mathscr{L}\left[y(t)\right]-y(0)]+7\mathscr{L}\left[y(t)\right] \\
&= s^2\mathscr{L}\left[y(t)\right]-s+4(s\mathscr{L}\left[y(t)\right]-1)+7\mathscr{L}\left[y(t)\right] \\
&= (s^2+4s+7)\mathscr{L}\left[y(t)\right]-s-4
\end{aligned}$$

על פי שורה 10 בטבלת לפלס

$$\mathscr{L}\left[u_1(t)\right](s)=\frac{e^{-s}}{s}$$

קיבלנו

$$(s^2+4s+7)\mathscr{L}\left[y(t)\right]-s-4=\frac{e^{-s}}{s}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[y(t)\right] &= \frac{s+4}{s^2+4s+7}+\frac{e^{-s}}{s(s^2+4s+7)} \\
&= \frac{s+4}{s^2+4s+7}-\frac{(s+4)e^{-s}}{7(s^2+4s+7)}+\frac{e^{-s}}{7s}
\end{aligned}$$

נרשום

$$\frac{s+4}{s^2+4s+7}=\frac{s+2}{(s+2)^2+3}+\frac{2}{(s+2)^2+3}$$

על ידי שימוש בנוסחה 8 של טבלת לפלס

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+4s+7}\right]=e^{-2t}\left[\cos\sqrt{3}t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right]$$

על ידי שימוש בנוסחה 10 נקבל

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+4)e^{-s}}{7(s^2+4s+7)}\right]=\frac{e^{-2(t-1)}}{7}\left[\cos\sqrt{3}(t-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-1)\right]$$

על ידי שימוש בנוסחה 9 נקבל

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{7s}\right]=\frac{1}{7}u_1(t)$$

ולכן

$$y(t)=e^{-2t}\left[\cos\sqrt{3}t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right]-\frac{e^{-2(t-1)}}{7}\left[\cos\sqrt{3}(t-1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-1)\right]+\frac{1}{7}u_1(t)$$

71. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y''+4y'+13y=2t+3e^{-2t}\cos 3t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

תשובה: $y=-\frac{179}{507}e^{-2t}\sin 3t+\frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t+\frac{2}{13}t-\frac{8}{169}$

פיתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$s^2\mathscr{L}[y]+1+4s\mathscr{L}[y]+13\mathscr{L}[y]=\frac{2}{s^2}+\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9}$$

לכן

$$\mathscr{L}[y]=-\frac{1}{s^2+4s+13}+\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}+\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}$$

עכשיו עלינו למצוא את ההתמרה ההפוכה של כל האיברים שבאגף ימין.

האיבר הראשון קל:

$$\frac{1}{s^2+4s+13}=\frac{1}{(s+2)^2+9}=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{(s+2)^2+9}\right]$$

ולכן

$$\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2+4s+13}\right]=-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

הטיפול באיבר השני יותר מורכב. ראשית כל נשתמש בשיטת השברים החלקיים בכדי לפרק אותו לשברים יסודיים (מומלץ לחזור שוב על נושא שברים יסודיים בספר חדו"א 1, סעיף 9.3)

$$\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+13}$$

לאחר אירגון לפולינום נקבל

$$(A+C)s^3+(4A+B+D)s^2+(13A+4B)s+13B=2$$

ולכן

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 4A+B+D &= 0 \\ 13A+4B &= 0 \\ 13B &= 2 \end{aligned}$$

פיתרון המערכת הליניארית הוא

$$A=-\frac{8}{169},\quad B=\frac{2}{13},\quad C=\frac{8}{169},\quad D=\frac{6}{169}$$

לכן

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= -\frac{8}{169s}+\frac{2}{13s^2}+\frac{2(4s+3)}{169(s^2+4s+13)} \\ &= -\frac{8}{169}\cdot\frac{1}{s}+\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{8}{169}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right]-\frac{10}{3\cdot169}\left[\frac{3}{(s+2)^2+9}\right] \end{aligned}$$

עכשיו נוכל להתמש בנוסחאות הרגילות של התמרות לפלס הפוכה ולקבל

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right]=-\frac{8}{169}+\frac{2}{13}t+\frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t-\frac{10}{507}e^{-2t}\sin 3t$$

נעבור עכשיו לאיבר השלישי והאחרון

$$\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}=-\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)$$

לכן על פי נוסחה 14 בטבלת לפלס

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\right]=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t$$

לאחר סיכום שלושת התוצאות של שלושת האיברים נקבל את הפיתרון של בעיית ההתחלה שלנו

$$y=-\frac{179}{507}e^{-2t}\sin 3t+\frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t+\frac{2}{13}t-\frac{8}{169}$$

72. פתור את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y''+y=\varphi(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le t<\infty \end{cases} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

פיתרון: קל לראות ש־ $\varphi(t) = 1 - u_{\frac{\pi}{2}}(t)$. נפעיל התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[y'' + y] &= s^2\widehat{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\widehat{y}(s) - s \\ &= \mathscr{L}[\varphi(t)] = \mathscr{L}\left[1 - u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}\end{aligned}$$

לאחר חילוץ פשוט נקבל

$$\widehat{y}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^3}$$

לכן

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^3}\right] = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\cdot u_{\frac{\pi}{2}}(t)\cdot\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

73. מצא את הפיתרון הפרטי המוגדר על חצי הישר $[0,\infty)$ למשוואה

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(x)dx = h(t), & (0 < t < \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

כאשר

$$h(t) = \begin{cases} 1, & (0 \le t \le 1) \\ 2t, & (1 < t < \infty) \end{cases}$$

תשובה: $y(t) = e^{-t} + u_1(t)\cdot te^{-t}$

פיתרון: נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים

$$s\mathscr{L}[y] + 2\mathscr{L}[y] + \frac{1}{s}\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[h(t)]$$

נקבל

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s}\mathscr{L}[y] = 1 + \frac{1}{s} + \frac{3e^{-s}}{s}$$

לכן

$$\mathscr{L}[y] = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}$$

לכן

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}\right] = e^{-t} + u_1(t)\cdot te^{-t}$$