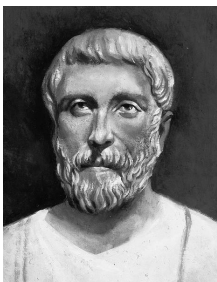


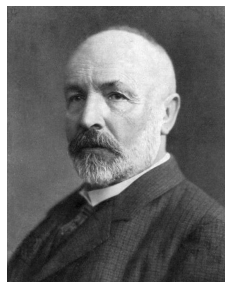
פרק 1

המספרים המרוכבים

1.1 היסטוריה של מערכת המספרים



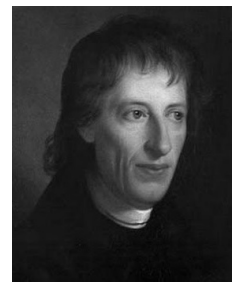
איור 1.1: Pythagoras
570BC-495BC



איור 1.2: Georg Cantor
1845-1918



איור 1.3: Richard Dedekind
1831-1916



איור 1.4: Bernard Bolzano
1781-1848

③ המספרים הטבעיים והמספרים הרציונליים (שברים) היו ידועים כבר למצרים ולבבלים הקדומים, ונעשו בהם שימושים שונים (כגון בבניית הפירמידות). המספרים האלה קיבלו ייצוג וטיפול יותר מדעי בספרות היוונית של המאה השישית לפני הספירה ובהמשך.

③ המספרים האי-רציונליים התגלו על ידי פיתגורס במאה השישית לפני הספירה, אך קיומם הוכחש והם לא התקבלו כמספרים. רק לאחר כ־2500 שנים ניתנה הגדרה מתימטית למהו מספר אי-רציונלי על ידי המתמטיקאים גאורג קנטור, ריכרד דדקינד, וברנרד בולצאנו, והם נכללו כמספרים ממשיים שווי מעמד.

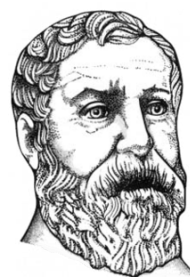
③ מושג המספר אפס הופיע בסביבות המאה החמישית בתרבות ההודית והערבית של אותם ימים, ונחשב לאחת ההמצאות הכי חשובות בהיסטוריה האנושית. הוא נכנס לשימוש באירופה לאחר הכיבוש המוסלמי של ספרד בסביבות המאה ה־11 והתקבל שם בקושי ובחשדנות רבה (אנשי דת התייחסו אליו כמספר שטני). הסימון הסופי שלו (עיגול ריק) נקבע על ידי המתמטיקאי הפרסי מוחמד איבן-מוסא אלחואריזמי במאה התשיעית לספירה. אלחואריזמי נזקק לו להמצאת ענף האלגברה, במיוחד עבור הפיתוח של האלגוריתמים לכפל וחילוק של מספרים שלמים ומספרים רציונליים. המונח "אלגוריתם" נגזר משיבוש קל של



איור 1.5: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi 780-850



איור 1.6: Gerolamo Cardano 1501-1576



איור 1.7: Hero of Alexandria 10-70



איור 1.8: Diophantus of Alexandria approx. 210-280

שמו של אלחואריזמי.

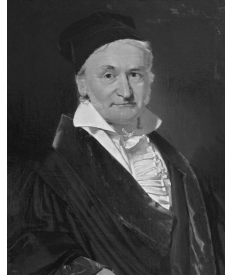
- ❶ **המספרים השליליים:** המתמטיקאי היווני דיופנטוס (Diophantus) שחי במאה השלישית לספירה, ואשר ייסוד תורת המספרים מיוחסת לו, התייחס למשוואה $4x + 20 = 0$ כמשוואה אבסורדית חסרת פיתרון. למרות זאת, באותו זמן המספרים השליליים הוצגו לראשונה בספרות המתימטית הסינית. המתמטיקאים הסינים של אותה תקופה הכירו את הכללים היסודיים של פעולות החיבור והחיסור במספרים חיוביים ושליליים, וגם ידעו לפתור מערכת של משוואות עם פיתרונות שליליים. במאה השביעית לספירה ההודים השתמשו במספרים שליליים בכדי לייצג חוב. הרעיון עבר למתמטיקאים מוסלמים במאה התשיעית לספירה אבל לא נעשה בו שימוש משמעותי. למשל המתמטיקאי אלחואריזמי לא הזכיר אותם בספר האלגברה שלו (הוא נחשב למייסד התחום). רק במאה ה-12 החלו מתמטיקאים מוסלמים לנסח חוקים אריתמטיים כמו $(a \pm b) \cdot (c \pm d)$ ואפילו לקבל פיתרונות שליליים של פולינומים.
- ❷ המתמטיקאים האירופיים התנגדו לרעיון של מספרים שליליים עד למאה ה-17, אך למרות זאת גם במהלך המאה ה-18 היה נהוג להתעלם מפיתרונות שליליים של משוואות כפיתרונות חסרי מובן. המתמטיקאי הראשון ששילב מספרים שליליים כחלק מהותי של השיטה המתימטית שבנה היה גוטפריד וילהלם לייבניץ (1646-1716), ולאחר פירסום מחקריו בנושא החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, השימוש במספרים שליליים בכל תחומי המדע הפך להיות טבעי ונפוץ.
- ❸ המספר המדומה ("דמיוני") i הוגדר בשם זה במאה ה-17 מתוך זילזול ויחס שלילי כלפי הרעיון. הוא נחשב לאובייקט פיקטיבי וחסר כל תועלת ולפעמים כסוג של בדיחה (בדומה למספרים האי-רציונליים, השליליים, 0 לפניו).
- ❹ למרות שקיימות ראיות לכך שהרעיון של המספרים המרוכבים הועלה על ידי המהנדס והמתמטיקאי הרוני האלכסנדרוני (10-70 לספירה הנוצרית), הגילוי שלו מיוחס למתמטיקאי האיטלקי Gerolamo Cardano שחי בשנים 1501-1576. רוב המתמטיקאים של תקופתו וגם לאחר מכן לא הכירו במספרים המרוכבים.

- ❺ במחקרו המתימטי למציאת השורשים של פולינומים ממעלה שלישית כמו

$$ax^3 + bx + c = 0$$



איור 1.9: Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716



איור 1.10: Carl Friedrich Gauss 1777-1855



איור 1.11: Leonhard Euler 1707-1783



איור 1.12: Caspar Wessel 1745-1818

גילה קרדנו שניתן להגיע לחלק מהשורשים באמצעות הנוסחה

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} + \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} - \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}}$$

בחלק מהמקרים, הביטוי שמתחת לסימן השורש הפנימי היה שלילי, ולכן ללא קבלת המספר "המדומה" i לא היה ניתן להגיע לשורשי הפולינום גם כאשר כל השורשים הם ממשיים! (הרכיבים "המדומים" התבטלו בחשבון הסופי). למשל, אחד השורשים של המשוואה (שכל שורשיה ממשיים)!

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

מתקבל על ידי הנוסחה

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 4$$

ללא שימוש במספר i לא נוכל לקבל את השורשים (הממשיים) של המשוואה!

- ❶ המשמעות של הגילוי הזה היתה שללא קבלת המספרים המרוכבים, לא ניתן לפתור פולינומים ממעלה גבוהה גם במקרים שכל השורשים ממשיים!
- ❷ דוגמאות נוספות מסוג זה הובילו בסופו של דבר לוודאות שלא ניתן להמשיך ולהתקדם בשטח המחקר המתימטי ללא הכנסת המספרים המרוכבים למתמטיקה.
- ❸ גישה זו החלה להשתנות בעקבות עבודתם המתימטית של המתמטיקאים **לאונרד אוילר** (1707-1783) ו-**פרידריך גאוס** (1777-1855). הייצוג החשוב של המספרים המרוכבים כנקודות על פני המישור הדו-מימדי פותח על ידי המתמטיקאי והקרטוגרף הבלגי Caspar Wessel (1745-1818).
- ❹ כמו-כן, הסתבר שבעיות פיזיקאליות רבות בתורת החשמל והאלקטרומגנטיות אינן ניתנות לפיתרון ללא שימוש במספרים מרוכבים. הכינוי "המעליב" הפך להיות פחות ופחות מאפיין והמעמד של המספרים המרוכבים בתחומי המתמטיקה והפיזיקה עלה ועלה עד לנקודה שהיום הם נחשבים לגיטימיים בדיוק כמו המספרים הממשיים (למרות הכינוי המעליב).

המספר המדומה i מוגדר כשורש של המשוואה $x^2 + 1 = 0$, או בקיצור

$$i = \sqrt{-1}$$

כמובן, לאחר הוספת מספר חדש למערכת המספרים יש להוסיף את כל המספרים המתקבלים על ידי הכפלתו וחיבורו ליתר המספרים. קל לראות שקבוצת המספרים שתתקבל היא קבוצת המספרים המרוכבים

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

אבל בהגדרה התמימה הזו של $\mathbb{C}$ "הצרות" רק מתחילות. אומנם קבוצה זו סגורה תחת פעולות חיבור, חיסור, כפל, וחילוק, אך מלבד פעולות אלה קיימות גם פעולות החזקה והשורש למיניהם:

כיצד נגדיר את פעולת החזקה a^b כאשר a, b הם מספרים מרוכבים?

למשל מהו הערך של 2^i ? או הערך של i^i ?

כיצד יוגדרו הפונקציות הטריגונומטריות?

כיצד יוגדרו הפונקציות הלוגריתמיות?

האם קיים פיתרון למשוואה $x^2 + i = 0$? במידה ולא, האם נצטרך להמציא עוד מספר בדיוני בכדי לפתור אותה? ואז אולי יצוץ לנו פולינום חדש שאין לו שורשים? שגם עבורו נאלץ להמציא מספר דמיוני חדש? וכו' ...

באופן כללי, לאחר הכנסת המספרים המרוכבים $a + bi$ למתמטיקה, יש לטפל בכל הנושאים השונים שוב מהמסד ועד לטפחות. יש לחקור מחדש את כל נושא פיתרון פולינומים שמקדמיהם מרוכבים, משוואות מעריכיות וטריגונומטריות אשר עכשיו הארגומנטים והמקדמים שלהם עשויים להיות מספרים מרוכבים. האם הפעולה התמימה של הכנסת המספר המדומה i למתמטיקה אינה מתכון לאסון?!

לאחר מחקר לא פשוט ולא קצר מתברר שכל השאלות הללו נענו בצורה מניחה את הדעת. הוספת המספרים המרוכבים אינה מסבכת, אלא מפשטת את תחומי המתמטיקה המגוונים. המספרים המרוכבים מספיקים בכדי לענות על כל השאלות הנ"ל, ואין צורך בהוספה של מספרים דמיוניים חדשים בכדי לפתור את הבעיות החדשות שנוצרו! הכל בא על מקומו בשלום! יתירה מזו, הוספת המספרים המרוכבים מאפשרת פיתרון של בעיות ממשיות שבלעדיהן זה לא היה אפשרי. עובדה זו מחזקת את ההנחה שמדובר בהרחבה טבעית, נכונה, והכרחית של מערכת המספרים הממשית.