הסבר קצר על ענפים של פונקציות מרוכבות רב-ערכיות

- כל ענף $L(z)$ של פונקציית הלוגריתם טבעי מוגדר על ידי

$$L(z) = \ln|z| + A(z), \quad z \neq 0$$

כאשר $A(z)$ הוא ענף של פונקציית הארגומנט. נדגיש שפונקציית הארגומנט ופונקציית הלוגריתם אינן מוגדרות בנקודה $z = 0$!

- ענף של פונקציית הארגומנט $A(z)$ נקבע באופן יחיד על ידי שלושת הדברים הבאים:
  - **זווית היסט (offset):** $0 \leq \theta_0 < 2\pi$
  - מספר שלם $k \in \mathbb{Z}$
  - בחירת צד: יש לבחור אחד מהקטעים הבאים כתחום הגדרה

$$I[\theta_0, k) = \Big[\theta_0 + 2k\pi,\ \theta_0 + 2(k+1)\pi\Big) \tag{1}$$

$$I(\theta_0, k] = \Big(\theta_0 + 2k\pi,\ \theta_0 + 2(k+1)\pi\Big] \tag{2}$$

- שתי הטענות הבאות ברורות:

טענה 1: לכל $z \neq 0$ קיימת זווית אחת ויחידה $\theta \in I[\theta_0, k)$ כך ש־ $z = |z|e^{i\theta}$.
טענה 2: לכל $z \neq 0$ קיימת זווית אחת ויחידה $\theta \in I(\theta_0, k]$ כך ש־ $z = |z|e^{i\theta}$.
הסבר: הפונקציה $e^{i\theta}$ מקיפה את כל הנקודות שעל מעגל היחידה באופן חד-חד-ערכי מלא (ללא כפילויות!) מעל כל אחד מהקטעים $I[\theta_0, k)$ או $I(\theta_0, k]$.

- למשל, הענף העיקרי של פונקציית הארגומנט $\mathrm{Arg}(z)$ (שבשימוש בקורס הנוכחי) מתקבל על ידי בחירת הקטע $I(\pi, -1]$. כלומר $\theta_0 = \pi$, $k = -1$, ולכן תחום הארגומנט הוא $(-\pi, \pi]$. באותה מידה ניתן לבחור ענפים אחרים של $\arg(z)$ מעל קטעים כגון

$$I(0, 0] = (0,\ 2\pi] \tag{a}$$

$$I(0, 6] = (6\pi,\ 8\pi] \tag{b}$$

$$I(\tfrac{\pi}{5}, 7] = (14\pi + \tfrac{\pi}{5},\ 16\pi + \tfrac{\pi}{5}] \tag{c}$$

$$I[\tfrac{\pi}{5}, 7) = [14\pi + \tfrac{\pi}{5},\ 16\pi + \tfrac{\pi}{5}) \tag{d}$$

$$I[\tfrac{\pi}{2}, -2) = [-\tfrac{3\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}) \tag{e}$$

- מההגדרה של מושג הארגומנט ברור שלכל $z \neq 0$:

$$z = re^{\theta_1} = re^{\theta_2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}: \ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$$

מכך נובע שלכל ענף $A(z)$ של פונקציית הארגומנט, ולכל $z \neq 0$, קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש־

$$\boxed{A(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \qquad (z \neq 0)}$$

- **דוגמא:** תהי $A(z)$ ענף של פונקציית הארגומנט על הקטע

$$I\left[\tfrac{\pi}{5}, 7\right) = \left[14\pi + \tfrac{\pi}{5},\ 16\pi + \tfrac{\pi}{5}\right)$$

אם נקח $z_1 = 26e^{\frac{\pi}{10}i}$ אז יש לקחת $k = 8$

$$A(z_1) = 16\pi + \tfrac{\pi}{10} \in I[\tfrac{\pi}{5}, 7) = [14\pi + \tfrac{\pi}{5},\ 16\pi + \tfrac{\pi}{5})$$

אם נקח $z_2 = 26e^{\frac{\pi}{3}i}$ אז הארגומנט המתאים הוא $\theta = 14\pi + \frac{\pi}{3}$, כלומר במקרה זה יש לקחת $k = 7$.[1]

- **מסקנה:** אם $L(z)$ ענף כלשהו של פונקציית הלוגריתם, אז לכל $z \neq 0$, קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש־

$$\boxed{L(z) = \mathrm{Log}(z) + 2k\pi i}$$

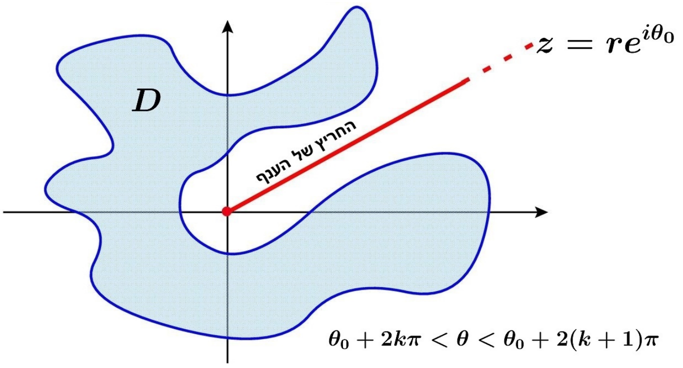
הוכחה: על פי הגדרת פונקציית הלוגריתם המרוכב, קיים ענף $A(z)$ של פונקציית הארגומנט, כך ש־

$$\begin{aligned} L(z) &= \ln|z| + iA(z) \\ &= \ln|z| + i[\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi] \\ &= [\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)] + 2k\pi i \\ &= \mathrm{Log}(z) + 2k\pi i \end{aligned}$$

- הפונקציות הרב-ערכיות $\arg(z)$, $\log(z)$, אנליטיות בכל נקודה z המקיימת $\arg(z) \neq \theta_0$, כאשר θ_0 היא זווית ההיסט של קטע הענף $I[\theta_0, k)$ או $I(\theta_0, k]$. הקרן $z = re^{i\theta_0}$, $0 \leq r < \infty$, נקראת ”החריץ“ של הענף.

---

[1] יש לשים לב לכך שלמרות ש־ $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{10}$, הערך של k המתאים ל־ z_1 גדול מזה של z_2



איור 1: הענף $F(z)$ אנליטי בתחום D כי D אינו חותך את החריץ $re^{i\theta_0}$, $0 \le r < \infty$ של $F(z)$

- נאמר שלפונקציה רב-ערכית $f(z)$ יש ענף אנליטי בתחום D, אם קיים ענף $F(z)$ של הפונקציה שהוא אנליטי בתחום D. במקרה הטיפוסי, יש למצוא ענף F עם חריץ ידוע, כאשר החריץ שלו אינו נחתך עם D (ראה שירטוט 1) אבל הבעייה עשויה להיות יותר מסובכת במקרים קיצוניים.

- **דוגמא:** לכל אחת מהפונקציות הרב-ערכיות הבאות, מצא ענף אנליטי בתחום המבוקש

א. $f(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 \}$

ב. $f(z) = (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 \}$

ג. $f(z) = (4+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 \}$

ד. $f(z) = (4+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $D = \mathbb{C} - [-2i, 2i]$

ה. $f(z) = (z^4-1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1 \}$

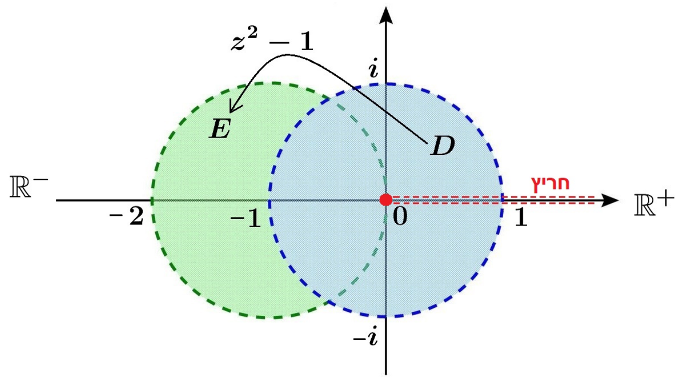
ו. $f(z) = (z^3-1)^{\frac{1}{3}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1 \}$

פיתרון:

א. על פי ההגדרה $(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$. יש למצוא ענף של $\log$ כך ש־ $\log(z^2-1)$ תהיה אנליטית בעיגול D. ראשית כל נמצא את התמונה E של D תחת הפונקציה z^2-1

$$E = \left\{ z^2 - 1 \mid z \in D \right\}$$

ההעתקה z^2 מעתיקה את עיגול היחידה D לעצמו, ולכן z^2-1 תזיז את D לעיגול $|z+1| = 1$.



איור 2: הפונקציה z^2-1 מעתיקה את עיגול היחידה D לעיגול E: $|z+1| < 1$

הענף הסטנדרטי של הלוגריתם לא יתאים לנו כי הוא לא אנליטי בחריץ $\mathbb{R}^-$ שחוצה את העיגול E. אבל אם נבחר את הענף של הלוגריתם המתאים לקטע $(0,2\pi)$

$$L_0(z) = \ln|z| + i\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi, \quad z = re^{\theta}$$

אז החריץ שלו הוא הקרן $\mathbb{R}^+$ (ממשיים אי-שליליים) אינה חותכת את העיגול E, ולכן $L_0(z^2-1)$ ענף אנליטי של $\log(z^2-1)$ בעיגול E. לכן

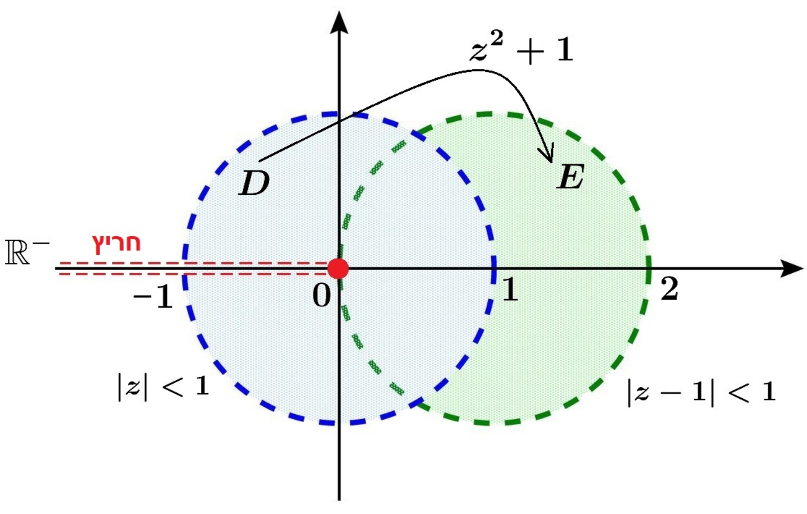
$$F(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}L_0(z^2-1)}$$

היא תשובה לשאלה (כמובן יש עוד תשובות).

ב. על פי ההגדרה $(z^2+1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2+1)}$. יש למצוא ענף של log כך ש־ $\log(z^2+1)$ תהיה אנליטית בעיגול D. כמו קודם, התמונה E של D תחת הפונקציה z^2+1

$$E = \left\{\, z^2-1 \mid z \in D \right\}$$

ההעתקה z^2 מעתיקה את עיגול היחידה D לעצמו, ולכן z^2+1 תזיז את D לעיגול $|z-1|=1$.



איור 3: הפונקציה z^2+1 מעתיקה את עיגול היחידה D לעיגול E: $|z-1|<1$

הענף הסטנדרטי של הלוגריתם Log יתאים לנו כאן כי החריץ שלו $\mathbb{R}^-$ אינו חותך את E (כפי שרואים בשירטוט 3) ולכן $\text{Log}(z^2-1)$ ענף אנליטי בעיגול E. לכן

$$F(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(z^2-1\right)}$$

היא תשובה לשאלה (מתוך אינסוף תשובות נוספות).

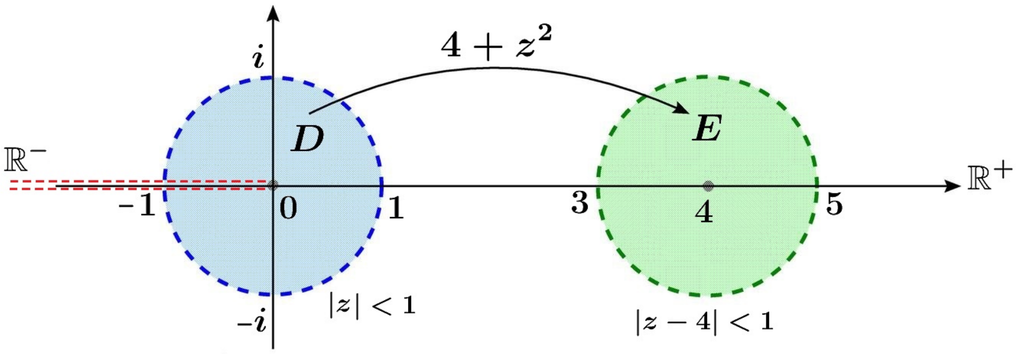
ג. $f(z) = (4+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$

על פי ההגדרה $(4+z^2)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(4+z^2)}$. יש למצוא ענף של log כך ש־ $\log(4+z^2)$ תהיה

אנליטית בעיגול D. ראשית כל נמצא את התמונה E של D תחת הפונקציה $4+z^2$

$$E=\left\{4+z^2\ :\ z\in D\right\}=\{\,z\in\mathbb{C}\ :\ |z-4|<1\}$$

כמו קודם, לא קשה לראות שהתמונה של עיגול היחידה D תחת ההזזה $4+z^2$ היא העיגול $|z-4|<1$.



איור 4: הפונקציה $4+z^2$ מעתיקה את עיגול היחידה D לעיגול E: $|z-4|<1$

במקרה זה הענף העיקרי של הלוגריתם Log יספיק בהחלט כי החריץ שלו $\mathbb{R}^-$ אינו פוגש את העיגול E. כלומר התשובה לסעיף זה היא

$$F(z)=(4+z^2)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(4+z^2)}$$

ד. $f(z)=(4+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad D=\mathbb{C}-[-2i,2i]$

מקור:

A branch for $(4+z^2)^{\frac{1}{2}}$ such that it is analytic in $\mathbb{C}-[-2i,2i]$

במקרה זה יש לרשום

$$\log(4+z^2)=\log[(z+2i)(z-2i)]=\log(z+2i)+\log(z-2i)$$

לשוויון האחרון אין משמעות ברורה לחלוטין כי מדובר בפונקציה רב-ערכית, אבל הוא נותן כיוון ברור לפיתרון הבעייה. יש למצוא שני ענפים של הלוגריתם $L_1(z)$, $L_2(z)$ אשר סכומם יהיה אנליטי בתחום D. במקרה הנוכחי יספיק לקחת בשני המקרים את הענף $L(z)$ המתאים לטווח הארגומנט $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. החריץ של ענף זה הוא הציר המדומה השלילי (במקרים אחרים ייתכן ונזדקק לשני ענפים שונים!). הפיתרון שלנו יהיה

$$F(z)=e^{\frac{1}{2}L(z+2i)}\cdot e^{\frac{1}{2}L(z-2i)}$$

עלינו להוכיח כי $F(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}-[-2i,2i]$. החריץ של $L(z+2i)$ הוא $[2i,-\infty i)$, והחריץ של $L(z-2i)$ הוא $[-2i,-\infty i)$. לכן $F(z)$ אנליטית לפחות בתחום $\mathbb{C}-[2i,\infty i)$.

לא קשה להוכיח שהפונקציה רציפה ואנליטית בקרן $[-2i, -\infty i)$ (ראה בקישור הנ"ל) ולכן קיבלנו ענף אנליטי $F(z)$ של $f(z) = (4+z^2)^{\frac{1}{2}}$ בתחום $D = \mathbb{C} - [-2i, 2i]$

ה. $f(z) = (z^4-1)^{\frac{1}{2}}$, $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$

יש לשים לב לכך שהתחום D הוא התחום המשלים של עיגול היחידה הסגור!

נרשום

$$\log(z^4-1) = \log(z^2-1) + \log(z^2+1)$$

בתרגילים הקודמים ראינו כי ההעתקה z^2+1 מעבירה את עיגול היחידה למעגל $|z-1| < 1$, וההעתקה z^2-1 מעבירה אותו לעיגול $|z+1| < 1$. במקרה הראשון נקח את הענף העיקרי של הלוגריתם $L_1 = \operatorname{Log}$ (החריץ הוא $\mathbb{R}^-$), ובמקרה השני נקח את הענף L_2 בטווח ארגומנט $(0, 2\pi)$ (החריץ $\mathbb{R}^+$). ניתן לבדוק שהסכום אנליטי בתחום D (ראה קישור לעיל).

- במקרים קיצוניים שיטת החריצים לא ממש ישימה ויש להשתמש בכלים חזקים יותר. אחת השיטות הנפוצות להגדרת ענף אנליטי היא **שיטת הנגזרת הלוגריתמית**. אם $f(z)$ אנליטית בתחום D ואין לה שם אפסים, אז הביטוי $\frac{f'(z)}{f(z)}$ מוגדר ב־D והוא נקרא **נגזרת לוגריתמית של** $f(z)$ (מהסיבה הפשוטה שהוא מתקבל כנגזרת של $\log f(z)$). נקבע נקודה $z_0 \in D$, ולכל $z \in D$ נגדיר

$$L(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

במידה והאינטגרל אינו תלוי במסילה המחברת בין z_0 ל־z, נקבל את $L(z)$ כענף אנליטי של $\log f(z)$.

- **תרגיל:** תהי $f(z)$ ענף אנליטי של z^i בתחום $D = \mathbb{C} - \{\, iy \mid y \le 0\}$. ידוע כי $f(1) = e^{2\pi}$. חשב את $f(i)$.

פיתרון: על פי ההגדרה $z^i = e^{iL(z)}$ כאשר $L(z)$ הוא ענף של פונקציית הלוגריתם

$$L(z) = \ln|z| + iA(z)$$

כאשר $A(z)$ ענף מתאים של פונקציית הארגומנט. נתון כי $f(1) = e^{2\pi}$. כלומר

$$f(1) = 1^i = e^{iL(1)} = e^{2\pi}$$

לכן $L(1) = -2\pi i$, ולכן $A(1) = e^{0i} = -2\pi$. לכן $A(z)$ היא ענף של הארגומנט בקטע $[-2\pi, 0)$. לכן $A(i) = -\frac{3\pi}{2}$, ולכן

$$L(i) = \ln|i| + A(i) = 0 - \frac{3\pi i}{2} = -\frac{3\pi i}{2}$$

לכן $f(i) = e^{iL(i)} = e^{\frac{3\pi}{2}}$.

תרגיל: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית שלמה עם אפס מסדר 2 בנקודה $z=0$. הוכח כי לפונקציה $\sqrt{f(z)}$ יש ענף אנליטי בסביבת $z=0$.

הדרכה: קיימת פונקציה שלמה $g(z)$ כך ש־ $f(z)=z^2g(z)$, $g(0)\neq 0$. לכן קיימת סביבה $B(0,r)$ של $z=0$ אשר בה $g(z)\neq 0$. נגדיר

$$L(z)=\int_0^z \frac{g'(w)}{g(w)}dw$$

הראה ש־ $L(z)$ מוגדרת היטב ולאחר מכן בדוק שהפונקציה

$$h(z)=ze^{\frac{1}{2}L(z)}$$

היא ענף אנליטי של $\sqrt{f(z)}$ בסביבה הנ"ל.