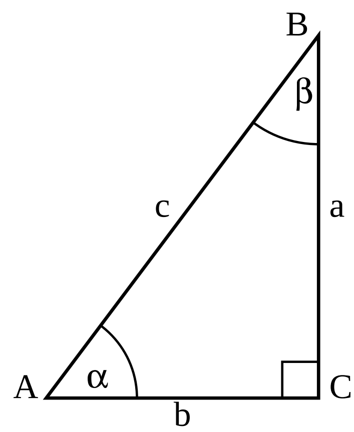
רשימת משפטים ונוסחאות בטריגונומטריה

****

הגדרות וזהויות יסוד



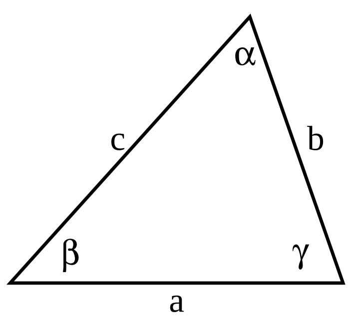
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{הניצב מול הזוית}}{\text{הניצב שליד הזוית}}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{הניצב שליד הזוית}}{\text{הניצב מול הזוית}}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{הניצב מול הזוית}}{\text{היתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{הניצב ליד הזוית}}{\text{היתר}}$$

משפט הסינוסים



במשולש כללי, אם α הזוית מול הצלע a, β הזוית מול הצלע b, ו־γ הזוית מול הצלע c, אז מתקיים השוויון הבא

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

כאשר R הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

משפט הקוסינוסים

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

באופן שקול:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

נוסחאות לזוית קהה $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$

$$\begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(180^\circ - \alpha) \\ \cos\alpha &= -\cos(180^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

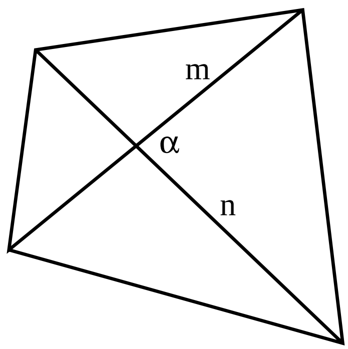
שטח המשולש

שטח המשולש שווה למחצית מכפלת שתיים מצלעותיו בסינוס הזווית הכלואה ביניהן:

$$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$

שטח המרובע

שטח המרובע שווה למחצית מכפלת אלכסוניו בסינוס הזווית ביניהם:



$$S = \frac{mn\sin\alpha}{2}$$

הזהויות היסודיות

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha & \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan\alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha & \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot\alpha \\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \cot\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

נוסחאות עבור סכום והפרש של שתי זויות

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

נוסחאות עבור זוית כפולה וחצי זוית

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan\tfrac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cos\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

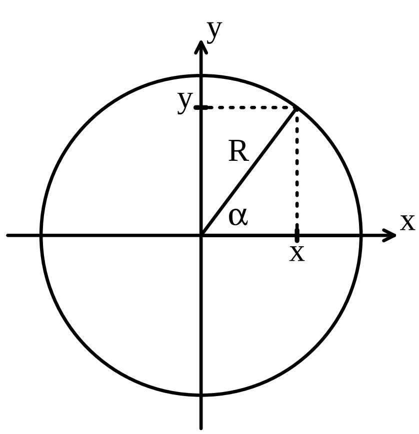
$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

טבלת ערכים עבור זויות מיוחדות

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$

הרחבת ההגדרה של הפונקציות הטריגונומטריות

נגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוית $0° \le \alpha \le 360°$ באופן הבא:



$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{y}{R}\\ \cos\alpha &= \frac{x}{R}\\ \tan\alpha &= \frac{y}{x}\\ \cot\alpha &= \frac{x}{y}\end{aligned}$$

נוסחאות טריגונומטריות נוספות

$$
\begin{aligned}
\sin(180-\alpha) &= \sin\alpha \\
\cos(180-\alpha) &= -\cos\alpha \\
\sin 180n &= 0 \\
\cos 180n &= (-1)^n
\end{aligned}
$$

בשתי הנוסחאות האחרונות n מציין מספר שלם, שלילי או חיובי, כולל אפס.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) & \tan\alpha &= \cot(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) \\
\tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \cot\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

נוסחאות מעבר ממכפלה לסכום

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

נוסחאות מעבר מסכום למכפלה

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} \\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

חזקות של $\sin$ ו־$\cos$

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha \\
\sin^3\alpha &= \tfrac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha) \\
\sin^4\alpha &= \tfrac{1}{8}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha \\
\cos^3\alpha &= \tfrac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha) \\
\cos^4\alpha &= \tfrac{1}{8}(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)
\end{aligned}
$$