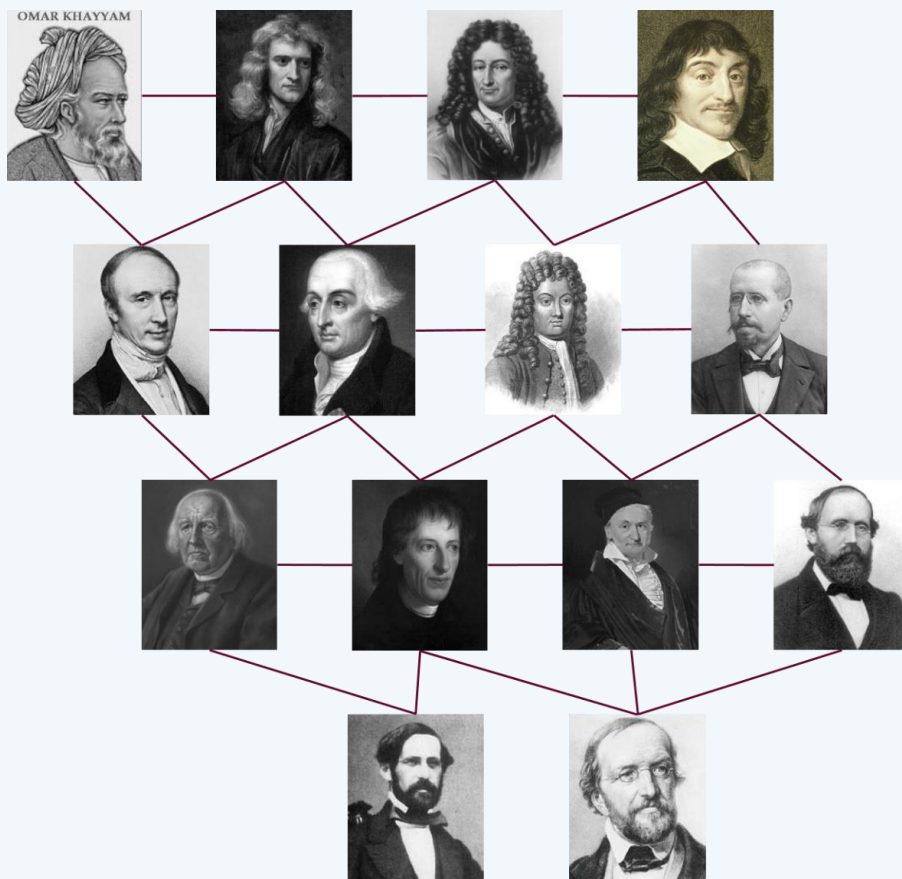


חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

חוברת הרצאות



סמי זעפרני

<http://www.samyzaf.com>

הקדמה

החוברת מקיפה את חומר הלימוד בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) כפי שהוא נלמד במוסדות להשכלה גבוהה בארץ. היא מתבססת על נסיון ארוך בהוראת קורסים דומים בטכניון (חדו"א 2, חדו"א 2מ, חדו"א 2ת), אוניברסיטת בן-גוריון (קלקולוס), אוניברסיטת חיפה, ומכללת אורנים (חדו"א ב').

תודה מיוחדת לד"ר בן-ציון קון, אשר שני ספריו בנושא חדו"א 2 שימשו כספרי הלימוד העיקריים בקורסים השונים שבהן גובשה חוברת הלימוד הנוכחית, היוו השראה וסייעו רבות לבנייתה ועיצובה של החוברת.

תודה מיוחדת לד"ר דניאל רביב מהפקולטה למתמטיקה בטכניון אשר חוברת ההרצאות המעולה שלו בקורס חדו"א 2ת סייעה לנו המון בהכנת החלק האחרון של החוברת ובהתאמתה לתוכנית הלימודים של הטכניון בקורסים חדו"א 2מ וחדו"א 2ת.

תודה לכל תלמידי הטכניון בקורס חדו"א 2ת (סמסטר ב' תשע"ח, סמסטר ב' תשע"ט) על תיקונים והערות מועילות. תודה מיוחדת לתלמידים עידו בר-חיים, אלון פפיני, איוון גלאס, אייל רייך, ועמנואל בראונשטיין, שחר לאופר, אשר השתתפתם הפעילה במהלך כל ההרצאות של הקורס (מהלך ראוי לציון והערכה בעידן היוטיוב 😊), הערותיהם, הצעותיהם, ותיקוני השגיאות הרבות, תרמו רבות לשיפור האיכות הסופית של החוברת.

מטרת החוברת לשמש כמערך הרצאות בקורס של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי בכמה משתנים. היא מקיפה את החומר העיקרי הנלמד במסגרת קורס כזה במוסדות להשכלה גבוהה בארץ, אך פוסחת על עוד הרבה נושאים חשובים שניתן למצוא בספרי הלימוד הרבים בנושא, ולכן בהמשך הומלצו מספר ספרי לימוד מלווים לחוברת.

הפורמט של החוברת מוכוון בעיקר עבור קריאה נוחה באמצעות טבלטים והתקנים אלקטרוניים למיניהם הרבים (ובכך אולי להציל כמה עצים על כדור הארץ). הגופן הגדול והתימצות אמורים גם להקל על הקריאה, ולסייע למרצים או מתרגלים להשתמש בדפי החוברת כשקפים בכיתת הלימוד (ולספק לתלמידים יותר פרטים במקומות בהם הדברים הובאו בתימצות יתר).

בגירסאות הבאות יעשה מאמץ נוסף להקיף נושאים נוספים ולהוסיף רשימת תרגילים לכל פרק. ניתנת בזאת רשות לכל המעוניין להוריד את החוברת למחשבו או לכל התקן אלקטרוני אחר, להדפיסו, לאכסנו במאגרי מידע כלשהם, ולהפיץ אותו בכל אמצעי אחר (למטרות לימוד והוראה) כל עוד לא נעשה בספר שימוש מסחרי שמפר זכויות יוצרים (אין לגבות תשלום בשום מצב).

סמי זעפרני, אוגוסט 2018

הערה לגבי גירסה 2.0 של החוברת: מאחר וברוב מוסדות האקדמיים נושא הטורים אינו נכלל כבר בתוכניות הלימודים השונות של קורסי חדו"א 2, החומר בנושא זה הוזז לסוף החוברת (נספחים א-ג), וייתכן שבגירסאות הבאות יועבר לחוברת מתאימה יותר בפורמט יותר תמציתי.

תוכן עניינים

פרק 1: גאומטריה אנליטית במישור 9

1. מערכות קואורדינטות 9
2. משוואות של קווים במישור 11
3. עקומים המוגדרים כמקומות גאומטריים 13
4. מערכת צירים קוטבית 14
5. הצגה פרמטרית של עקומים במישור 15
6. דוגמאות ידועות של עקומים 17

פרק 2: גאומטריה אנליטית במרחב \mathbb{R}^3 20

1. המרחב התלת מימדי \mathbb{R}^3 21
2. וקטורים במרחב התלת-מימדי 23
- חיבור וחיסור וקטורים 27
- כפל בין סקלר ווקטור 29
- אלגברה לינארית במרחב \mathbb{R}^3 29
- מכפלה פנימית 32
- מכפלה וקטורית 35
- מכפלה מעורבת 39
3. מישורים במרחב \mathbb{R}^3 43
- מרחק בין נקודה למישור 45
- מצב הדדי בין שני מישורים 47
- מישורים מיוחדים 48
4. ישרים במרחב \mathbb{R}^3 50
- מרחק בין נקודה לישר 54
- מצב הדדי בין שני ישרים 56
- ישרים מיוחדים 57

57 מצב הדדי בין ישר ומישור
58 5. משטחים כלליים במרחב \mathbb{R}^3
59 משטחים ממעלה 2

פרק 3: פונקציות והעתקות במרחב \mathbb{R}^n 75

75 1. מושג הפונקציה
77 גרף של פונקציה
78 דוגמאות לגרפים של פונקציות של שני משתנים
82 תחום הגדרה מקסימלי
84 קווי גובה ומפות טופוגרפיות של משטח
87 משטחי רמה
88 הרכבה של פונקציות
91 פונקציות אלמנטריות
92 2. מסילות במרחב \mathbb{R}^n
95 פרמטריזציה (Parametrization)
98 דוגמאות מורכבות
99 מסילות חלקות
104 3. טופולוגיה בסיסית
105 מרחב מטרי
107 סביבה כדורית וסביבה מלבנית
108 מושגים טופולוגיים
110 סדרות של נקודות במרחב \mathbb{R}^n

פרק 4: גבול, רציפות, וגזירות

של פונקציות במספר משתנים 115

115 1. גבול של פונקציה
116 דוגמאות
120 חישוב גבול לאורך מסלול
122 חישוב גבול לאורך סדרה
122 שימוש בקואורדינטות קוטביות
123 גבול נשנה
124 אריתמטיקה של גבולות
125 2. רציפות

130	רציפות מעל קבוצה סגורה
131	גזירות
132	נגזרות חלקיות
134	גזירות (דיפרנציאביליות), מישור משיק, וקירוב ליניארי
146	תנאי מספיק לגזירות (דיפרנציאביליות)
151	כלל השרשרת
159	נגזרת מכוונת
164	הגרדיאנט (Gradient)
171	נגזרות מסדר גבוה

פרק 5: משפט הפונקציות הסתומות ותוצאותיו

183	משפט הפונקציות הסתומות
187	משפט הפונקציה הסתומה (שני משתנים)
193	משפט הפונקציה הסתומה (שלושה משתנים)
195	וריאנטים נוספים
196	משמעות גאומטרית
198	משפט הפונקציות הסתומות עבור מערכת משוואות
210	שימושים גאומטריים
211	משפט הפונקציות ההפוכות

פרק 6: אינטגרלים כפולים ומשולשים

227	משמעות והגדרה
229	הסכום האינטגרלי של רימן (Riemann)
230	האינטגרל הכפול מעל תחום מלבני
232	סכומי דרבו (Darboux)
233	הגדרת שטח תחום על ידי אינטגרל כפול
237	הגדרת האינטגרל הכפול מעל תחום כללי D
245	שיטות לחישוב אינטגרל כפול
245	חישוב אינטגרל כפול מעל תחום מלבני
248	חישוב אינטגרל כפול מעל תחום פשוט
253	חישוב אינטגרל כפול באמצעות החלפת משתנים
266	אינטגרל משולש
268	חישוב נפח של גוף חסום

269	הגדרת האינטגרל המשולש מעל תחום כללי
271	תכונות האינטגרל המשולש
273	4. שיטות לחישוב אינטגרל משולש
273	חישוב אינטגרל משולש מעל תיבה
274	אינטגרל משולש מעל תחום פשוט
282	חישוב אינטגרל משולש בשיטת החתכים (Cavalieri)
285	חישוב אינטגרל משולש על ידי החלפת משתנים

פרק 7: אינטגרל קווי ומשטחי 304

304	1. אינטגרל קווי מסוג ראשון
304	אורך מסילה
307	אינטגרל קווי מסוג ראשון
309	2. אינטגרל קווי מסוג שני
310	שדות וקטוריים
312	עבודת שדה לאורך מסילה
317	משפט גרין (George Green 1793–1841)
331	שדה וקטורי משמר
341	3. אינטגרל משטחי מסוג ראשון
341	משטחים פרמטריים
344	משטחים חלקים
348	משטחים דו-צדדיים
349	חישוב שטח פנים
357	אינטגרל משטחי מסוג 1
360	4. אינטגרל משטחי מסוג שני

פרק 8: אנליזה וקטורית 377

377	1. מושגי יסוד
381	המשמעות הפיזיקאלית של הרוטור
386	הלפלסיאן (Laplacian)
387	2. שדה משמר תלת-מימדי
394	3. משפט הדיברגנץ של גאוס
405	4. משפט סטוקס (George Gabriel Stokes, 1819-1903)
416	5. זהויות יסודיות של אנליזה וקטורית

פרק 9: נוסחת טיילור ובעיות קיצון 422.....

1. פיתוח נוסחת טיילור 422
2. מינימום ומקסימום של פונקציה בשני משתנים 427
- תזכורת מאלגברה: תבניות ריבועיות 430
- מיון נקודות קיצון 431
3. קיצון תחת אילוצים - שיטת כופלי לגרנד' 439
- ערכי קיצון מוחלט מעל קבוצה קומפקטית 449

נספח א: טורים מספריים אינסופיים 457.....

1. מושגי יסוד 457
- מהו טור אינסופי וכיצד מחושב סכומו? 459
2. מבחני התכנסות והתבדרות יסודיים 468
- מבחן ההתכנסות של Augustin-Louis Cauchy 468
- מבחן התבדרות יסודי 471
- תכונות נוספות 472
3. מבחני התכנסות עבור טורים חיוביים 476
- מבחן האינטגרל 477
- מבחן טורי- p (p -series Convergence Test) 481
- מבחן ההשוואה (Comparison Test) 484
- מבחן ההשוואה הגבולי 486
- מבחן המנה של דאלמבר (Jean Le Rond d'Alembert 1717-1783) .. 489
- מבחן השורש של קושי (Cauchy) 492
4. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 493
- מבחן התכנסות טורים אלגבריים (Algebraic Series) 496
5. מבחני התכנסות עבור טורים כלליים 500

נספח ב: סדרות וטורים של פונקציות 512.....

1. דוגמאות 512
2. התכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות 519
- נורמה ומרחק יוניפורמי (Uniform Norm and Distance) 521
3. טורי פונקציות 529
- התכנסות במידה שווה של טור פונקציות 534

539 מבחן M של וויארשטראס (Weirestrass M-Test)
542 תכונות מורשות תחת התכנסות במידה שווה

556 **נספח ג: טורי חזקות**

556 1. הגדרות ודוגמאות
559 2. תחום התכנסות של טור חזקות
565 3. התכנסות במידה שווה של טור חזקות
569 4. גזירה ואינטגרציה של טור חזקות
574 5. פיתוח פונקציה לטור חזקות