פיתרון גיליון תרגילים 3
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

מועד פירסום: 08.01.2018, שעה: 23:15

הערה: נא לקרוא בעיון את הפיתרונות לפני הדפסה. במידה ונפלו שגיאות כלשהם, או ניתן פיתרון חלקי, או חסר פיתרון לשאלה מסוימת נא להודיע לי בהקדם באמצעות קבוצת הוואטסאפ.

1. חשב את רדיוס התכנסות של טורי החזקות הבאים, ובדוק התכנסות בקצוות

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{1-n}}{(-2)^{3-2n}}(x+5)^n$

ב. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}(x-1)^n$

ג. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^{n+1}}{n+4}(x-7)^n$

ד. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(x-2)^n$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n}}x^n$

ו. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln n}{3^n}(x-1)^n$

פיתרון:

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{1-n}}{(-2)^{3-2n}}(x+5)^n$

ננסה לסדר קצת את נוסחת המקדם. שים לב כי $(-1)^{3-2n}=-1$

$$a_n=\frac{6^{1-n}}{(-2)^{3-2n}}=\frac{-2^{2n-3}}{6^{n-1}}=\frac{-2^{2n-3}}{2^{n-1}\cdot 3^{n-1}}=\frac{-2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

נשתמש בנוסחת המנה

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n|:|a_{n+1}|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{3^n}{2^{n-1}}=\frac{3}{2}$$

מרכז הטור שלנו הוא: $x_0=-5$, ולכן תחום ההתכנסות הבטוח הוא:

$$(x_0-R,\ x_0+R)=\left(-5-\frac{3}{2},\ -5+\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

בדיקת נקודת קצה $x_0 - R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3}{4}$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות

בדיקת נקודת קצה $x_0 + R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-12^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{3}{4}$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות

ב. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}(x-1)^n$

נשתמש במבחן המנה

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} |a_n| : |a_{n+1}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2(2n+1)}{n+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

קיבלנו שרדיוס ההתכנסות הוא $R = \infty$. כלומר טור החזקות מתכנס עבור כל x ממשי.

ג. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^{n+1}}{n+4}(x-7)^n$

במקרה זה יש להשתמש בנוסחת האדמאר

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+4}}{8^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{8}$$

בדיקת נקודת קצה $x_0 - R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^{n+1}}{n+4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^{n+1}}{n+4} \cdot \frac{1}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{n+4}$$

מתבדר על פי השוואה עם הטור ההרמוני.

<u>בדיקת נקודת קצה x_0+R:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^{n+1}}{n+4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^{n+1}}{n+4} \cdot \frac{1}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^n}{n+4}$$

מתכנס על פי מבחן לייבניץ לטורים מתחלפים.

תחום התכנסות סופי של הטור: $(7-\frac{1}{8},\ 7+\frac{1}{8}]$

ד. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(x-2)^n$

נשתמש בנוסחת האדמאר

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = 4$$

<u>בדיקת נקודת קצה x_0-R:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot (-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות.

תחום התכנסות סופי של הטור: $(-2,6)$

<u>בדיקת נקודת קצה x_0+R:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot 4^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות.

ה. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} x^n$

נשתמש בנוסחת האדמאר

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} 2n^{\frac{1}{2n}} = 2$$

<u>בדיקת נקודת קצה x_0-R:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

מתכנס על פי מבחן לייבניץ.

<u>בדיקת נקודת קצה x_0+R:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n}} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

מתבדר על פי מבחן טורי־p.

תחום התכנסות סופי של הטור: $[-2,\ 2)$

ו. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}(x-1)^n$ נשתמש בנוסחת המנה

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} |a_n| : |a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{\ln(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{n} = 3 \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בכלל של לופיטל.

<u>בדיקת נקודת קצה $x_0 - R$:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות

<u>בדיקת נקודת קצה $x_0 + R$:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n$$

מתבדר על פי מבחן ההתבדרות

תחום התכנסות סופי של הטור: $(-2,\ 4)$

2. פתח את הפונקציה הנתונה לטור חזקות וקבע את רדיוס ההתכנסות של הטור

א. $f(x) = \frac{x}{1-8x}$ **ב.** $f(x) = \frac{8x}{1+16x^7}$

פיתרון:

א. $f(x) = \frac{x}{1-8x}$

נשתמש בנוסחת הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. נציב בה את $q = 8x$

$$\frac{1}{1-8x} = \sum_{n=0}^{\infty} (8x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n$$

נכפול את שני האגפים ב־x ונקבל

$$\frac{x}{1-8x} = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 8^{n-1} x^n$$

תחום ההתכנסות של הטור ההנדסי הוא $|8x| < 1$, לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = \frac{1}{8}$.

ב. $f(x) = \dfrac{8x}{1+16x^7}$

נשתמש בנוסחת הטור ההנדסי המתחלף

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n$$

אם נציב בה $q = 16x^7$ נקבל

$$\frac{1}{1+16x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (16x^7)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 16^n x^{7n}$$

נכפול את שני האגפים ב־$8x$ ונקבל את טור החזקות המבוקש

$$\frac{8x}{1+16x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 8 \cdot 16^n x^{7n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^{4n+3} x^{7n+1}$$

תחום ההתכנסות של טור הנדסי הוא $|q| < 1$, כלומר $16|x|^7 < 1$, ולכן $|x| < \frac{1}{\sqrt[7]{16}}$.

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = \frac{1}{\sqrt[7]{16}}$.

3. אם תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ הוא הקטע $(-7, 19)$, מהו המרכז ורדיוס ההתכנסות של הטור?

פיתרון: מאחר ותחום ההתכנסות של טור חזקות הוא סימטרי ביחס למרכז הטור, אז בהכרח מרכז הטור הוא מרכז הקטע $(-7, 19)$, כלומר: $x_0 = 6$. לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = 13$.

4. חשב את נוסחת טיילור של כל אחת מהפונקציות הבאות סביב הנקודה הנתונה

א. $f(x) = \sin x$ סביב הנקודה $x = \frac{3\pi}{2}$

ב. $f(x) = e^{2x}$ סביב הנקודה $x = 3$

ג. $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה $x = 1$

ד. $f(x) = x^3 + 9x^2 - 10x + 2$ סביב הנקודה $x = 3$

פיתרון: א. $f(x) = \sin x$ סביב הנקודה $x = \frac{3\pi}{2}$

כמובן נשתמש בנוסחת הנגזרת ה־n־ית לחישוב המקדמים של טור טיילור

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

במקרה הנוכחי $f(x)=\sin x$, ומרכז הטור היא הנקודה $x_0=\frac{3\pi}{2}$ (270°). נתבונן בשבעת המקדמים הראשונים בכדי לקבל כיוון לנוסחת המקדם הכללית

$$a_0=\frac{f(\frac{3\pi}{2})}{0!}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{0!}=\frac{-1}{0!}$$

$$a_1=\frac{f'(\frac{3\pi}{2})}{1!}=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{1!}=0$$

$$a_2=\frac{f''(\frac{3\pi}{2})}{2!}=\frac{-\sin\frac{3\pi}{2}}{2!}=\frac{1}{2!}$$

$$a_3=\frac{f'''(\frac{3\pi}{2})}{3!}=\frac{-\cos\frac{3\pi}{2}}{3!}=0$$

$$a_4=\frac{f^{(4)}(\frac{3\pi}{2})}{4!}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{4!}=\frac{-1}{4!}$$

$$a_5=\frac{f^{(5)}(\frac{3\pi}{2})}{5!}=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{4!}=0$$

$$a_6=\frac{f^{(6)}(\frac{3\pi}{2})}{6!}=\frac{-\sin\frac{3\pi}{2}}{6!}=\frac{1}{6!}$$

הנוסחה הכללית של מקדמי הטור שמסתמנת היא

$$\begin{cases} a_{2k}=\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \\ a_{2k+1}=0 \\ k=0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

לכן הפיתוח של $\sin x$ סביב הנקודה $x_0=\frac{3\pi}{2}$ הוא

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^{2k}$$

מהו רדיוס ההתכנסות של הטור?

ב. $f(x)=e^{2x}$ סביב הנקודה $x_0=3$

נשתמש בנוסחת הנגזרת ה־n־ית לחישוב המקדמים של טור טיילור שהצגנו בסעיף

הקודם. תחילה, נרשום את חמשת הנגזרות הראשונות של $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \\ f'(x) &= 2e^{2x} \\ f''(x) &= 4e^{2x} \\ f'''(x) &= 8e^{2x} \\ f^{(4)}(x) &= 16e^{2x} \end{aligned}$$

במקרה הנוכחי $f(x) = e^{2x}$, ומרכז הטור היא הנקודה $x_0 = 3$. נתבונן בחמשת המקדמים הראשונים בכדי לקבל כיוון לנוסחת המקדם הכללית

$$a_0 = \frac{f(3)}{0!} = \frac{e^6}{0!}$$

$$a_1 = \frac{f'(3)}{1!} = \frac{2e^6}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(3)}{2!} = \frac{4e^6}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{8e^6}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(3)}{4!} = \frac{16e^6}{4!}$$

הנוסחה הכללית של מקדמי הטור שמסתמנת היא

$$a_n = \frac{2^n e^{2x}}{n!}$$

לכן הפיתוח של e^{2x} סביב הנקודה $x_0 = 3$ הוא

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^{2x}}{n!}(x-3)^n$$

מהו רדיוס ההתכנסות של הטור?

ג. $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה $x = 1$

נשתמש בנוסחת הנגזרת ה־n־ית לחישוב המקדמים של טור טיילור שהצגנו בסעיף

הקודם. תחילה, נרשום את חמשת הנגזרות הראשונות של $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

במקרה הנוכחי $f(x) = \sqrt{x}$, ומרכז הטור היא הנקודה $x_0 = 1$. נתבונן בחמשת המקדמים הראשונים בכדי לקבל כיוון לנוסחת המקדם הכללית

$$a_0 = \frac{f(1)}{0!} = \frac{1}{0!}$$

$$a_1 = \frac{f'(1)}{1!} = \frac{1}{2 \cdot 1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = \frac{-1}{2 \cdot 2 \cdot 2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{(-3) \cdot (-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{(-5) \cdot (-3) \cdot (-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4!}$$

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(1)}{5!} = \frac{(-7) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5!}$$

הנוסחה הכללית של מקדמי הטור שמסתמנת היא

$$\begin{cases}
a_0 = 1 \\
a_1 = \frac{1}{2} \\
a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!}, \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots
\end{cases}$$

לכן הפיתוח של $f(x)=\sqrt{x}$ סביב הנקודה $x_0=1$ הוא

$$\sqrt{x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}(x-1)^n$$

נציין כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=1$ (למה?), מה קורה בקצוות של תחום ההתכנסות? ($x=0$, $x=2$)

ד. $f(x)=x^3+9x^2-10x+2$ סביב הנקודה $x=3$

זהו פולינום ממעלה 3 ולכן צפוי שכל טור טיילור שלו יישאר פולינום ממעלה 3. לכן נרשום את ארבעת הנגזרות הראשונות של $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+9x^2-10x+2\\
f'(x) &= 3x^2+18x-10\\
f''(x) &= 6x+18\\
f'''(x) &= 6\\
f^{(4)}(x) &= f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=\cdots=0
\end{aligned}$$

כל הנגזרות, החל בנגזרת הרביעית מתאפסות על כל הישר הממשי.

במקרה הנוכחי מרכז הטור היא הנקודה $x_0=3$. כל המקדמים מתאפסים מלבד ארבעת המקדמים הראשונים

$$a_0=\frac{f(3)}{0!}=\frac{2}{0!}=2$$

$$a_1=\frac{f'(3)}{1!}=\frac{71}{1!}=71$$

$$a_2=\frac{f''(3)}{2!}=\frac{36}{2!}=18$$

$$a_3=\frac{f'''(3)}{3!}=\frac{6}{3!}=1$$

$$a_4=a_5=a_6=\cdots=0$$

לכן הפיתוח של $f(x)=x^3+9x^2-10x+2$ סביב הנקודה $x_0=3$ יוצא טור טיילור סופי בעל ארבעה איברים בדיוק

$$x^3+9x^2-10x+2=2+71(x-3)+18(x-3)^2+(x-3)^3$$

נציין כי רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R=\infty$, משום שפולינום סופי תמיד מתכנס לכל ערך ממשי של x.

5. חשב את נוסחת מקלורן של הפונקציה

א. $f(x)=\sin(x^2)$

ב. $f(x)=x^3\sin 2x$

ג. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ד. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

ה. $f(x)=\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$

פיתרון:

א. $f(x)=\sin(x^2)$

נשתמש בטור מקלורן של $\sin x$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

נחליף את x עם x^2 ונקבל את הטור המבוקש

$$\sin(x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{4k+2}$$

ב. $f(x)=x^3\sin 2x$

נציב $2x$ במקום x בטור מקלורן של $\sin x$ ונקבל

$$\sin 2x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

נכפול את שני האגפים ב־x^3 ונקבל את הטור המבוקש

$$x^3\sin 2x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+4}$$

ג. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

נשתמש בטורי מקלורן של הטור ההנדסי

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n\end{aligned}$$

באמצעות אינטגרציה איבר־איבר (כפי שהראינו במהלך השיעור), נקבל טורי מקלורן

עבור הפונקציות $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\\ \ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\end{aligned}$$

על פי תכונות פונקציית הלוגריתם

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

לכן טור מקלורן של $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ יתקבל על ידי חיסור שני טורי מקלורן

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]}{n}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{2}{2k+1}x^{2k+1}$$

השוויון האחרון נובע מהעובדה שאם $n=2k$ אז המקדם מתאפס, ואם $n=2k+1$ אז

$$\frac{[(-1)^n-1]}{n}x^n=\frac{[(-1)^{2k+1}-1]}{2k+1}x^{2k+1}=\frac{-2}{2k+1}x^{2k+1}$$

קיבלנו

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-2x-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{7}x^7-\cdots-\frac{2}{2k+1}x^{2k+1}-\cdots$$

ד. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

נשתמש שוב בנוסחת הטור ההנדסי המתחלף

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

נחליף את x ב־ x^2

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

נכפול את שני האגפים ב־ x ונקבל את הטור המבוקש

$$\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

ה. $f(x)=\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}dt$

נשתמש בטור מקלורן של $\cos t$

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{t^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots$$

לכן

$$1-\cos t=\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}-\cdots$$

על ידי חילוק שני האגפים ב־ t^2 נקבל

$$\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2!}-\frac{t^2}{4!}+\frac{t^4}{6!}-\frac{t^6}{8!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}t^{2k-2}$$

על סמך משפט האינטגרציה של טור חזקות נוכל לרשום

$$\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \;=\; \frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\frac{x^7}{7\cdot 8!}+\cdots$$

$$=\;\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\cdot(2k)!}t^{2k-1}$$

הערה: אין דרך רגילה לחשב את האינטגרל $\int\frac{1-\cos x}{x^2}$. לא קיימת שום שיטה למצוא פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$! לכן טור מקלורן הוא הדרך היחידה להתקרב לתשובה.

.6 על ידי שימוש בטור מקלורן של הפונקציה $f(x)=\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}dt$. חשב את הערך של $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2}$ בקירוב של 10^{-6}.

פיתרון: נשתמש בתוצאה שקיבלנו בסוף שאלה 5

$$\int_0^1\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 6!}-\frac{1}{7\cdot 8!}+r_4(1)$$

מאחר והטור האחרון הוא טור מחליף סימן, על פי מבחן לייבניץ

$$|r_4(1)|<\frac{1}{9\cdot 10!}=\frac{1}{9\cdot 3628800}<10^{-7}$$

לכן סכום ארבעת האיברים הראשונים בטור יספיק בכדי לקבל תוצאה שרמת הדיוק שלה היא 10^{-7} (7 ספרות לאחר הנקודה העשרונית)

$$\int_0^1\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt\approx\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{4\cdot 4!}+\frac{1}{6\cdot 6!}-\frac{1}{8\cdot 8!}=0.2398117$$

הערה: הביטוי $\frac{1-\cos t}{t^2}$ אינו מוגדר עבור $t=0$, אך זוהי נקודת אי־רציפות סליקה, ולכן ניתן "לתקן" את הפונקציה בנקודה זו על ידי הגדרתה בנקודה להיות $\frac{1}{2}$. אך זה קורה אוטומטית על ידי הטור חזקות שלה!